Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2017
27. Juni 2017

Geometrie L2/L5
Prof. Dr. Martin Möller
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Gegeben sei die Ellipse $E : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, sowie $P = (x_0, y_0) \in E$.

Zeigen Sie, dass die Tangente an E durch den Punkt P die Gleichung $T_P : \dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$ erfüllt.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Gegeben sei die Ellipse $E(a, b) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

(a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Brennpunkte $F_1(a, b) = (e(a, b), 0)$ und $F_2(a, b) = (-e(a, b), 0)$ in Abhängigkeit von a und b.

(b) Geben Sie die Exzentrizität $\varepsilon(a, b)$ in Abhängigkeit von a und b an.

(c) Zeigen Sie, dass die Leitgeraden durch

$$l_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{a^2}{e(a, b)}\right\} \quad \text{und} \quad l_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -\frac{a^2}{e(a, b)}\right\}$$

gegeben sind.

(d) Zeigen Sie, dass Leitgeraden, Brennpunkt und Exzentrizität eine Ellipse eindeutig bestimmen: Zu gegebenen $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $a > 0$, $b > 0$ und $0 < \varepsilon(a, b) < 1$ gilt, ist

$$\left\{P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{|Pl_1(a, b)|}{|PF_1(a, b)|} = \varepsilon(a, b)\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben sei die Hyperbel

$$H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

mit Asymptotengeraden $y = \pm\frac{b}{a}x$. Für $P \in H$ bezeichnen wir die Tangente an H durch P mit T_P.

Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des Dreiecks, das durch T_P und die Asymptotengeraden gebildet wird, unabhängig von P ist.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Gegeben sei die Parabel $P : y = ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$.

Zeigen Sie, dass der Brennpunkt F und die Leitgerade L durch

$$F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-b^2}{4a} + c\right) \quad \text{und} \quad L = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{1+b^2}{4a} + c\right\}$$

gegeben sind.

Abgabe bis **12:00** am **Freitag, den 30. Juni** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.