Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
23. Juni 2017

Prof. Dr. Martin Möller
Markus Rennig

Seminar im Sommersemester 2017

Geometrische Gruppentheorie

Das Seminar findet am 28.06.2017 und 30.06.2017 als Blockseminar in Raum 404 in der Robert–Mayer–Straße 10 statt. Die Vorträge sollen jeweils 80 Minuten dauern.

28.06., 09:00 Uhr. *Freie und endlich präsentierte Gruppen* **Jeonghoon So**

Freie Gruppen werden zusammen mit einem *freien Erzeugendensystem* durch eine universelle Eigenschaft definiert. [LS77, S. 1] Sie lassen sich mittels *Wörtern* auf dem *Alphabet*, das aus den Elementen des freien Erzeugendensystems und deren Inversen besteht konstruieren. [MKS76, Abschnitt 1.2] Der *Rang* einer freien Gruppe ist wohldefiniert und es gibt bis auf Isomorphie genau eine freie Gruppe vom Rang $n \in \mathbb{N}$. [LS77, S. 1]
Das *freie Produkt* von Gruppen ist durch eine universelle Eigenschaft gegeben. [CgRR08, S. 63f.] Quotienten nach (endlich erzeugten) Untergruppen Freier Gruppen sind endlich erzeugt (von *endlicher Präsentation*).

Literatur: [MKS76], [LS77], [CgRR08]

28.06., 10:40 Uhr. *Wortproblem,* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *und der zwei-Quadrate-Satz* **Nadine Schiller**

Das kürzen von Relationen in einer Gruppe, die mittels Erzeugern und *Relationen* gegeben ist, führt zum *Wortproblem* und der Frage, ob es für eine gegebene Präsentation lösbar ist. Für freie Gruppen ist dies entscheidbar. Mittels Nielsen-Transformationen lässt sich des weiteren zeigen, dass jede Untergruppe einer freien Gruppe erneut frei ist. [LS77, Abschnitt I.2] Berechnet man die Präsentation von $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ nach [CgRR08, S. 32ff.], findet sich eine erste Anwendung in der Zahlentheorie. So lässt sich mit diesem Wissen der *Zwei-Quadrate-Satz* [CgRR08, S. 34f.] beweisen.

Literatur: [MKS76], [LS77] , [CgRR08]

30.06. 09:00 Uhr. *Operation von endlich präsentierten Gruppen* **Johannes Schwab**

In Vortrag 2 wurde eine Präsentation von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ berechnet. Diese operiert wie alle *Dreiecksgruppen* durch *Möbius-Transformation* auf der oberen Halbebene. Mit Hilfe eines *Ping-Pong-Arguments* lässt sich nun eine freie Untergruppe vom Rang zwei finden. [CgRR08, S. 10f.] Die allgemeine Version dieser Rechnung ist als *Ping-Pong-Lemma* [Löh11, Abschnitt 4.4] bekannt und gibt Auskunft, wann zwei Elemente eine Gruppe frei erzeugen.

Literatur: [Löh11], [CgRR08]

30.06., 10:40 Uhr. *Cayley-Graphen* **Vanessa Walkenhorst**

Der *Cayley-Graph* $Cay(G,S)$ [MKS76, Abschnitt 1.6], [Löh11, Abschnitt 3] einer Gruppe G hängt von der Wahl eines Erzeugendensystems S ab. Mit wenigen Einschränkungen an dieses, ist die Gruppe genau dann frei, wenn der Cayley-Graph ein *Baum* ist. [Löh11, Abschnitt 3.3] Des Weiteren lässt sich ein Graph und damit eine endlich präsentierte Gruppe mit einer Metrik, die die kürzeste Pfadlänge misst, ausstatten [Löh11, Abschnitt 5.2] und sogar zu einem geodätischen metrischen Raum erweitern. Die Operation von G durch Linkstranslation auf dem Cayley-Graphen $Cay(G,S)$ ist genau dann frei, wenn in S kein Element der Ordnung 2 enthalten ist. [Löh11, S.53f.] Spezieller ist eine Gruppe genau dann frei, wenn sie frei auf einem Baum operiert. [Löh11, Abschnitt 4.2]

Literatur:[MKS76], [Löh11]

30.06., 13:00 Uhr. *Hyperbolische Gruppen* **Daniel Liedtke**

Auf einem metrischen Raum lässt sich das *Gromov-Produkt* und damit die *δ-Hyperbolizität* definieren. [CgRR08, S. 171 f.], [Löh11, Abschnitt 7.2] Über den Cayley-Graphen und die in Vortrag 4 vorgestellte Metrik erhält man den Begriff einer *hyperbolischen Gruppe*. Zur Wohldefiniertheit dieses Begriffs müssen *quasi-Isometrien* eingeführt und gezeigt werden, dass die Cayley-Graphen bezüglich zweier Erzeugendensysteme quasi-isometrisch sind. [Löh11, Korollar 7.2.12] Eine Gruppe ist genau dann hyperbolisch, wenn es eine eigentlich diskontinuierliche Operation auf einem *eigentlich hyperbolischen Raum* gibt. [CgRR08, Satz 14.2 und 14.6] Beispiele hyperbolischer Gruppen sind also Fundamentalgruppen hyperbolischer Mannigfaltigkeiten.

Literatur: [CgRR08], [Löh11]

Literatur

[CgRR08] Thorsten Camps, Volkmar große Rebel, and Gerhard Rosenberger. *Einführung in die kombinatorische und die geometrische Gruppentheorie*. Heldermann, 2008.

[Löh11] Clara Löh. *Geometric group theory, an introduction*, Vorlesungsskript, `http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/ggt_ws1011/lecture_notes.pdf`, 2011.

[LS77] Roger C. Lyndon and Paul E. Schupp. *Combinatorial group theory*, volume 89. Springer, 1977.

[MKS76] Wilhelm Magnus, Abraham Karrass, and Donald Solitar. *Combinatorial group theory: Presentations of groups in terms of generators and relations*. Dover books on advanced mathematics. Dover Publications, New York, 2., rev. ed. edition, 1976.