Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2015/16
2. Dezember 2015

Algebraische Geometrie
Prof. Dr. Martin Möller
Matteo Costantini
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Sei $C \subset \mathbb{P}^n$ eine Kurve mit $\deg C = d$.

Zeige: C ist in einem d-dimensionalen linearen Raum enthalten.

(b) Sei $C \subset \mathbb{P}^2$ eine Konik, d.h. von Grad 2.

Zeige: C ist rational, d.h. birational zu $\mathbb{P}^1$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Seien $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}^2$ Kurven, die keine irreduzible Komponente gemeinsam haben und $P \in C_1 \cap C_2$.

Zeige: Ist C_1 in P singulär, so ist $i(C_1, C_2; P) \geq 2$ und ist auch C_2 in P singulär, so ist $i(C_1, C_2; P) \geq 3$.

(b) Sei $C \subset \mathbb{P}^2$ eine irreduzible Kurve von Grad d.

Zeige, dass C höchstens $\dfrac{(d-1)(d-2)}{2}$ Singularitäten hat.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\mathbb{A}^4 \supset Y = Z(x,y) \cup Z(z,w)$ und $Z = Z(x-z, y-w)$. In wie vielen Punkten schneiden sich Y und Z? Was ist die k-Dimension von

$$k[x,y,z,w]/(I(Y)+I(Z))?$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $C \subset \mathbb{P}^2$ eine glatte Kurve. Ein Punkt $P \in C$ heißt *Wendepunkt*, falls C die Tangente mit P in P mit Vielfachheit mindestens 3 schneidet.

Sei nun $C = Z(f) \subset \mathbb{P}^2$ glatt von Grad d. Dann ist

$$h = \det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{0 \leq i,j \leq 2}$$

homogen von Grad $3(d-2)$.

Zeige: $P \in C$ ist genau dann ein Wendepunkt, wenn $P \in Z(h)$.

Abgabe bis Beginn der Übung um **14 Uhr** am **Mittwoch, den 9. Dezember**.