Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2015/16
18. November 2015

Algebraische Geometrie
Prof. Dr. Martin Möller
Matteo Costantini
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Berechne das Hilbertpolynom $H(M,t)$ für die Längenfunktion und

(a) $M = S/(xy)$ über $S = k[x,y]$;

(b) $M = S/(xy, xz, yz)$ über $S = k[x,y,z]$;

(c) $M = S/(x)$ über $S = k[x,y,z]$.

Dabei ist M immer bezüglich der von S induzierten Graduierung versehen.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei $S = k[x,y]$, M ein S-Modul und betrachte

$$0 \to xM \to M \to M/xM \to 0.$$

Berechne die Hilbertpolynome von M, xM und M/xM bezüglich der von M induzierten Graduierung und der Längenfunktionn für

(a) $M = S$ und

(b) $M = S/(xy)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $S' = k[x,y]/(y^2 - x^3)$.

(a) Sei $\mathfrak{m} = (x,y)$ und $S = S'_{\mathfrak{m}}$ der lokale Ring. Zeige, dass $\mathfrak{m}$ in S kein Hauptideal ist, aber es ein $\mathfrak{m}$-primäres Hauptideal $\mathfrak{q}$ gibt.

(b) Sei nun $\mathfrak{m} = (x-1, y-1)$ und $S = S'_{\mathfrak{m}}$ der lokale Ring. Zeige, dass $\mathfrak{m}$ in S ein Hauptideal ist.

(c) Sei nun $S' = k[x,y,z]/(xy - z^2)$, $\mathfrak{m} = (x,y,z)$ und $S = S'_{\mathfrak{m}}$.

Zeige, dass $\mathfrak{m}$ in S nicht von zwei Elementen erzeugt werden kann, aber dass es $f, g \in S$ und ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal $\mathfrak{q} = (f,g)$ gibt.

Hinweis: Proposition 8.8 aus der Vorlesung.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Sei A ein noetherscher lokaler Ring, $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal, $\mathfrak{q}$ ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal, M ein endlich erzeuger A-Modul und (M_n) eine stabile $\mathfrak{q}$-Filtrierung, d.h.

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_n \supseteq \cdots \quad \text{mit} \quad \mathfrak{q}M_n \subseteq M_{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und $\mathfrak{q}M_n = M_{n+1}$ für hinreichend große n.

(a) Seien nun (M_n), (M'_n) zwei stabile $\mathfrak{q}$-Filtierungen von M.

Zeige: Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $M_{n+n_0} \subseteq M'_n$ und $M'_{n+n_0} \subseteq M_n$ für alle $n \geq 0$.

(b) Zeige: Der Grad und der Leitkoeffizient des Hilbertpolynoms $\chi_{\mathfrak{q}}^M$ sind unabhängig von der $\mathfrak{q}$-stabilen Filtrierung.

(c) Sei nun $S = k[x,y]_{(x,y)}$ und $M = xS$. Seien $\mathfrak{q} = (x,y)$ und

$$M_n = \mathfrak{q}^n M \quad \text{und} \quad M'_n = M \cap \mathfrak{q}^n S$$

zwei $\mathfrak{q}$-stabile Filtrierungen von M.

Berechne die Hilbertpolynome $H(M, \mathfrak{q})$ bezüglich beider Filtrierungen.

(d) Sei wieder $S = k[x,y]_{(x,y)}$ aber $M = S$. Seien $\mathfrak{q} = (x,y)$ und $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}^2$.

Berechne die Hilbertpolynome $H(M, \mathfrak{q})$ und $H(M, \mathfrak{q}')$ für die Filtrierungen $M_n = \mathfrak{q}^n M$ beziehungsweise $M'_n = (\mathfrak{q}')^n M$.

Hinweis: Achtung! $S/\mathfrak{q}^2$ ist kein Körper, sondern nur ein artinscher Ring. $H(M, \mathfrak{q}')$ misst also die Längen als $S/\mathfrak{q}^2$-Modul.

Abgabe bis Beginn der Übung um **14 Uhr** am **Mittwoch, den 25. November**.