Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2015/16
11. November 2015

Algebraische Geometrie
Prof. Dr. Martin Möller
Matteo Costantini
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Sei $V \subset \mathbb{A}^n$ eine affine Varietät und $P = (p_1, \dots, p_n) \in V$.

(a) Sei $V = Z(I)$ und zu $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ definieren wir

$$f_P \coloneqq \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P)(x_i - p_i) \in k[x_1, \dots, x_n]$$

und für ein Ideal J sei $J_P \coloneqq \langle f_P \mid f \in \sqrt{J} \rangle$.

Zeige, dass $T_P(V) \cong Z(I_P)$ (als affine Varietäten).

(b) Zeige, dass $I_P = I \bmod \mathfrak{m}_P^2$.

(c) Sei $P = (0, 0, 0)$. Was ist das Bild von $x + y + z^2 + xyz$ in $\mathfrak{m}_P / \mathfrak{m}_P^2$?

(d) Seien nun $P \in W \subset V \subset \mathbb{A}^n$ affine Varietäten.

Zeige: $T_P(W)$ ist ein k-Untervektorraum von $T_P(V)$.

(e) Sei $V = k[x_1, \dots, x_n]/I$ und $W = k[x_1, \dots, x_n]/(I + (f))$.

Zeige: $\dim T_P(V) - 1 \leq \dim T_P(W) \leq \dim T_P(V)$.

(f) Zeige, dass (x, z) in $k[x, y, z]/(xy - z^2)$ kein Hauptideal ist.

Hinweis: Was sind die Dimensionen der Tangentialräume im Ursprung?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien V, W affine Varietäten und $\varphi \colon V \to W$ ein Morphismus.

(a) Zeige, dass φ für jeden Punkt $P \in V$ einen Morphismus

$$\varphi_P^\sharp \colon \mathcal{O}_{\varphi(P)} \to \mathcal{O}_P$$

von lokalen Ringen induziert.

(b) Zeige, dass, in der Situation von Aufgabe 1(d), $\varphi_P^\sharp$ die Einbettung $T_P \to T_{\varphi(P)}$ induziert.

(c) Sei $\varphi \colon Z(y - x^2) \to Z(y)$ die Projektion. Gib $\varphi_{(0,0)}^\sharp$ an.

(d) Sei $\varphi \colon Z(y - x^2) \to Z(x)$ die Projektion. Gib $\varphi_{(0,0)}^\sharp$ an.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Die Kurve $\mathcal{C} = Z(x^4 - y^2 + y^2x^6) \subset \mathbb{A}^2$ ist im Punkt $P = (0,0)$ singulär.

Zeige: Der Blowup $\widetilde{\mathcal{C}}$ von $\mathcal{C}$ im Punkt P hat eine Singularität im Punkt $\widetilde{P}$ aber der Blowup von $\widetilde{\mathcal{C}}$ in $\widetilde{P}$ ist nichtsingulär.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Sei $X = Z(x^2y + xy^2 - x^4 - y^4)$ und $Y = Z(xy(x+y))$ im Nullpunkt analytisch isomorph sind.

Abgabe bis Beginn der Übung um **14 Uhr** am **Mittwoch, dem 18. November**.