Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2015/16
4. November 2015

Algebraische Geometrie
Prof. Dr. Martin Möller
Matteo Costantini
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Wir definieren die *Cremona-Transformation* $\varphi \colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ durch

$$(a_0 : a_1 : a_2) \mapsto (a_1 a_2 : a_0 a_2 : a_0 a_1),$$

falls je zwei Koordinaten nicht null sind.

(a) Zeige, dass φ birational und selbstinvers ist.

(b) Finde offene Teilmengen $U, V \subset \mathbb{P}^2$, so dass $\varphi|_U$ ein Isomorphismus auf V ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeige, dass das Bild der Segre-Einbettung von $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ in $\mathbb{P}^3$ birational äquivalent aber nicht isomorph zu $\mathbb{P}^2$ ist.

Hinweis: Zeige zunächst, dass $\mathbb{P}^2 \setminus Z(f)$ immer affin ist und sich daher je zwei Kurven in $\mathbb{P}^2$ schneiden.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

(a) Zeige: $Z(y^2 - x^3) \subseteq \mathbb{A}^2$ ist birational aber nicht isomorph zu $\mathbb{A}^1$.

Hinweis: Zeige: Einer der Koordinatenringe ist nicht in seinem Quotientenkörper ganz abgeschlossen.

(b) Zeige: $Z(y^2 z - x^2(x+z)) \subseteq \mathbb{P}^2$ ist birational zu $\mathbb{P}^1$.

Hinweis: Verwende die Projektion von $(0:0:1)$ auf $Z(z)$.

(c) Sei $n > 2$. Zeige: Die Fermat-Kurve $Z(z^n - y^n - x^n)$ ist *nicht* birational zu $\mathbb{P}^1$.

Hinweis: Zeige zunächst: Es gibt keine nichtkonstante Lösung $f(t)^n + g(t)^n = h(t)^n$ mit $f, g, h \in \mathbb{C}[t]$ teilerfremd. Nimm an, es gäbe eine solche Lösung und diese sei von minimalem Grad. Verwende, dass $\mathbb{C}[t]$ ein Hauptidealring ist und es eine Zerlegung

$$h(t)^n - g(t)^n = \prod_{i=1}^{n} (h(t) - \zeta^i g(t)), \quad \zeta \text{ primitive } n\text{-te Einheitswurzel},$$

gibt, um zu zeigen, dass jedes $h(t) - \zeta^i g(t)$ bereits eine n-te Potenz ist und konstruiere so eine Lösung der ursprünglichen Gleichung von kleinerem Grad.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Sei $\widetilde{\mathbb{A}^3}$ die Aufblasung des $\mathbb{A}^3$ entlang der Gerade $V(x_1, x_2) \cong \mathbb{A}^1$. Zeige, dass der exzeptionelle Divisor isomorph zu $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1$ ist. Wann schneiden sich die strikten Transformierten zweier Geraden in $\mathbb{A}^3$ durch $V(x_1, x_2)$ in der Aufblasung?

(b) Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n$ eine affine Varietät und seien $Y_1, Y_2 \subset X$ irreduzible abgeschlossene Teilmengen, von den keine die andere enthält. Sei $\widetilde{X}$ die Aufblasung von X entlang des Ideals $I(Y_1) + I(Y_2)$.

Zeige: Die strikten Transformierten von Y_1 und Y_2 sind in $\widetilde{X}$ disjunkt.

Abgabe bis Beginn der Übung um **14 Uhr** am **Mittwoch, dem 11. November**.