Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2015/16
28. Oktober 2015

Algebraische Geometrie
Prof. Dr. Martin Möller
Matteo Costantini
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien R ein kommutativer Ring mit 1 und S eine R-Algebra. Ein Element $s \in S$ heißt *ganz über* R, falls es ein normiertes Polynom

$$f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in R[x]$$

gibt, so dass $f(s) = 0$.

(a) Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $s \in S$ ist ganz über R.

(ii) $R[s]$ ist ein endlich erzeugter R-Modul (hierbei ist $R[s]$ die kleinste R-Unteralgebra von S, die s enthält).

(iii) Es gibt einen Teilring $T \subset S$, so dass $R[s] \subset T$ und T als R-Modul endlich erzeugt ist.

Hinweis: Satz von Cayley-Hamilton.

(b) Sei $T \subset S$ die Menge der Elemente, die über R ganz sind.

Zeige: T ist ein Teilring von S.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $H \cong \mathbb{P}^n$ eine Hyperebene in $\mathbb{P}^{n+1}$ und sei $p \in \mathbb{P}^{n+1} \setminus H$. Wir definieren eine Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{P}^{n+1} \setminus \{p\} \to \mathbb{P}^n, \quad q \mapsto \overline{pq} \cap H.$$

Dabei bezeichnet $\overline{pq}$ die Gerade durch die Punkte p und q im $\mathbb{P}^{n+1}$.

(a) Zeige, dass φ ein Morphismus von Varietäten ist.

(b) Sei X nun die getwistete Kubik, also

$$X = \{(x : y : z : w) = (t^3 : t^2u : tu^2 : u^3),\ (t : u) \in \mathbb{P}^1\} \subset \mathbb{P}^3.$$

Sei außerdem $p = (0 : 0 : 1 : 0)$ und $H = V(z)$.

Zeige, dass $\varphi(X)$ durch ein kubisches Polynom im $\mathbb{P}^2$ ausgeschnitten wird und gib dessen Gleichung an.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei Y eine projektive Varietät und $S(Y)$ der projektive Koordinatenring.

Zeige: Es gilt $\dim S(Y) = \dim Y + 1$.

Hinweis: Verwende die Überdeckung des $\mathbb{P}^n$ durch affine Standardräume.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $X = \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Zeige: X ist keine affine Varietät.

Hinweis: Was ist $A(X)$?

Abgabe bis Beginn der Übung um **14 Uhr** am **Mittwoch, den 4. November**.