Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2015/16
21. Oktober 2015

Algebraische Geometrie
Prof. Dr. Martin Möller
Matteo Costantini
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Seien X, Y noethersche topologische Räume und $f\colon X \to Y$ eine stetige abgeschlossene (d.h. für $U \subseteq X$ abgeschlossen ist $f(U) \subseteq Y$ abgeschlossen) Abbildung.

Zeige: Dann ist $\dim f(X) \leq \dim X$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Seien d, n positive natürliche Zahlen und $M_0, \ldots, M_N$ alle Monome vom Grad d in den $n+1$ Variablen $x_0, \ldots, x_n$ (d.h. $N = \binom{n+d}{n} - 1$). Dann definieren wir die *d-uple Veronese-Einbettung des* $\mathbb{P}^n$ als

$$\rho_d\colon \mathbb{P}^n \ni p \mapsto (M_0(p) : \cdots : M_N(p)) \in \mathbb{P}^N.$$

(a) Sei $\rho_3(\mathbb{P}^1) = \mathcal{C} \subset \mathbb{P}^3$ das Bild der 3-uple Veronese Einbettung. Wir nennen $\mathcal{C}$ die *getwistete Kubik*. Gib Erzeuger des Verschwindungsideals $I(\mathcal{C}) \subset k[x_0, x_1, x_2, x_3]$ an und zeige $\dim \mathcal{C} = 1$.

Hinweis: Betrachte zunächst die Abbildung

$$\theta\colon k[y_0, \ldots, y_3] \to k[x_0, x_1], \quad y_i \mapsto M_i$$

und zeige, dass $Z(\operatorname{Kern}\theta) = \operatorname{Bild}\rho_3$ ist.

(b) Sei $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ eine r-dimensionale projektive Varietät. Wir nennen Y einen *vollständigen Durchschnitt*, falls $I(Y)$ durch $n - r$ Elemente erzeugt werden kann. Wir nennen Y einen *mengentheoretischen vollständigen Durchschnitt*, falls Y als Durchschnitt von $n-r$ Hyperflächen geschrieben werden kann.

Nun sei $X = Z(\mathfrak{a}) \subset \mathbb{P}^n$ und $\mathfrak{a}$ sei durch q Elemente erzeugbar. Zeige, dass $\dim X \geq n - q$ ist. Zeige außerdem, dass jeder vollständige Durchschnitt ein mengentheoretischer vollständiger Durchschnitt ist.

(c) Sei $X = \mathcal{C} \cap U_0 \subset \mathbb{A}^3$ die Dehomogensierung in x_0. Finde Hyperflächen $H_1, H_2 \subseteq \mathbb{A}^3$, sodass $X = H_1 \cap H_2$ ein vollständiger Durchschnitt ist.

(d) Seien nun $H_1 = Z(y_0 y_2 - y_1^2)$ und $H_2 = Z(y_2(y_1 y_3 - y_2^2) - y_3(y_0 y_3 - y_1 y_2))$.

Zeige: $\mathcal{C}$ ist der mengentheoretische vollständige Durchschnitt von H_1 und H_2, aber $\mathcal{C}$ ist kein vollständiger Durchschnitt. Zeige dafür, dass sich $I(\mathcal{C})$ nicht von zwei Elementen erzeugen lässt.

Hinweis: Welche k-Dimensionen haben die k-Vektorräume der Monome verschiedenen Grades?

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Sei k ein Körper, dessen Charakteristik nicht 2 ist.

Zeige: Der Kreis $Z(x^2 + y^2 - 1) \subset \mathbb{A}_k^2$ ist irreduzibel.

Hinweis: Eisenstein-Kriterium.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Für ganze Zahlen $n \leq m$ definieren wir die *Segre-Einbettung*

$$\Psi\colon \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \ni (a_0, \ldots, a_n) \times (b_0, \ldots, b_m) \to (a_0b_0, a_0b_1, \ldots, a_nb_m) \in \mathbb{P}^N,$$

d.h. $N = mn + m + n$, wobei die Koordinaten im $\mathbb{P}^N$ in lexikographischer Ordnung stehen.

(a) Gib ein Ideal $\mathfrak{a} \subset k[w, x, y, z]$ an, sodass $Q = Z(\mathfrak{a})$ die Segre-Einbettung von $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ in $\mathbb{P}^3$ ist.

Hinweis: Betrachte den Kern des Ringhomomorphismus

$$k[\{z_{ij}\}] \to k[x_0, x_1, y_0, y_1], \quad z_{ij} \mapsto x_iy_j.$$

(b) Eine *Gerade* ist eine Kurve, die von Polynomen von Grad 1 ausgeschnitten wird.

Zeige, dass Q zwei Familien von Geraden, $\{L_t\}$ und $\{M_t\}$ enthält, $t \in \mathbb{P}^1$, sodass für $t \neq u$ gilt $L_t \cap L_u = M_t \cap M_u = \emptyset$ und für beliebige $t, u \in \mathbb{P}^1$ die Schnittmenge $M_t \cap L_u$ aus genau einem Punkt besteht.

Abgabe bis Beginn der Übung um **14 Uhr** am **Mittwoch, den 28. Oktober**.