Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2015/16
3. Februar 2016

Algebraische Geometrie
Prof. Dr. Martin Möller
Matteo Costantini
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 14

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Sei $\rho_d \colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^m$ die d-uple Veronese-Einbettung (Blatt 2, Aufgabe 2). Was ist $\rho_d^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1)$?

Aufgabe 2 (5 Punkte)

(a) Berechne mit Hilfe der Riemann-Hurwitz-Formel das topologische Geschlecht der hyperelliptischen Kurve $Z(y^2 - f(x))$ mit $f(x) = (x - p_1) \cdots (x - p_n)$ und $n \geq 6$ und gerade (siehe Blatt 10, Aufgabe 1) über $\mathbb{C}$.

(b) Sei $X \subset \mathbb{P}^n$ eine glatte Kurve. Sei $p_k \colon X \to \mathbb{P}^k$ eine generische Projektionen wie in dem Beweis von Satz 18.11. Sei $d = \deg(X)$, ν die Anzahl der rationalen Doppelpunkte von $p_2(X)$ und β die Anzahl der Verzweigungspunkte von p_1.

Zeige Aussage IIb) aus dem Beweis von Satz 18.11:

$$d(d-1) = \beta + 2\nu.$$

Hinweis: Zeige zunächst, dass ohne Einschränkung $p_1 \colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^1, (X : Y : Z) \mapsto (X : Y)$ gegeben ist. Wende den Satz von Bézout auf die Kurven $p_2(X) = V(F(X, Y, Z))$ und $V(\frac{\partial F}{\partial X})$ an.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $f \colon X \to Y$ ein endlicher Morphismus glatter Kurven.

Zeige, dass f nur endlich viele Verzweigungspunkte hat.

Hinweis: Zeige, dass P genau dann ein Verzweigungspunkt von f ist, wenn der Halm der Garbe der relativen Differentailformen bei P nicht verschwindet, d.h. $\left(\Omega_{X/Y}\right)_P \neq 0$. Zeige weiter, dass $\Omega_{X/Y}$ ein Torsions-$\mathcal{O}_X$-Modul ist und folgere, dass nur an endlich vielen Punkten $\left(\Omega_{X/Y}\right)_P \neq 0$ ist.

Erinnerung: Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Wir nennen $m \in M$ ein *R-Torsionselement*, falls es ein $r \in R$ gibt, sodass $r \cdot m = 0$. Ein Modul heißt *Torsionsmodul*, falls alle $m \in M$ Torsionselemente sind. Ein *Torsions-$\mathcal{O}_X$-Modul* $\mathcal{F}$ ist eine kohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe, so dass $\mathcal{F}(U)$ ein $\mathcal{O}_X(U)$-Torsionsmodul für alle $U \subseteq X$ offen ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $f \colon X \to Y$ ein endlicher Morphismus glatter Kurven.

Zeige: $f^* \mathcal{O}_Y(D) = \mathcal{O}_X(f^* D)$ in $\mathrm{Pic}(X)$.

Abgabe bis Beginn der Übung um **10 Uhr** am **Freitag, den 12. Februar**.