Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2015/16
27. Januar 2016

Algebraische Geometrie
Prof. Dr. Martin Möller
Matteo Costantini
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 13

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien X, Y topologische Räume, $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X, $\mathcal{G}$ eine Garbe auf Y und $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung.

(a) Gib eine Bijektion $\operatorname{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \operatorname{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$ der Morphismen in der Kategorie der Garben auf X bzw. Y an.

(b) Seien nun X, Y geringte Räume, $\mathcal{F}$ eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe, $\mathcal{G}$ eine $\mathcal{O}_Y$-Modulgarbe und $f\colon X \to Y$ ein Morphismus geringter Räume.

Gib eine Bijektion $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$ der Morphismen in der Kategorie der Modulgarben an.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Sei $(B, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring und $k \subseteq B$ ein Körper mit $k \cong B/\mathfrak{m}$.

Gib einen Isomorphismus $\delta\colon \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \Omega_{B/k} \otimes_B k$ an.

(b) Gib ein Beispiel für eine Kurve X über k an, sodass $\Omega_{X/k}$ nicht lokal frei ist.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

(a) Sei $f\colon X = \operatorname{Spec} B \to Y = \operatorname{Spec} A$ ein Morphismus affiner Schemata und seien $\widetilde{M}$ und $\widetilde{N}$ quasikohärente Garben auf X bzw. Y.

Bestimme $f_*\widetilde{M}$ und $f^*\widetilde{N}$.

(b) Zeige: Ist $X = \operatorname{Spec} A$ und $U \subseteq X$ ein abgeschlossenes Unterschema, so ist U auch affin.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Bestimme die globalen Schnitte der Differentialformen $\Omega_{X/k}$ folgender Varietäten X:

(a) $X = \mathbb{P}^1_k$.

(b) X die hyperelliptische Kurve mit affinem Teil $Z(y^2 - f(x))$, $f(x) = x(x-p_1)\cdots(x-p_n)$ mit p_i verschieden und $n = 2g+1 \geq 5$ im $\mathbb{P}^2$ (siehe Blatt 10, Aufgabe 1).

Zeige außerdem, dass $\deg \Omega_{X/k} = 2g - 2$ ist.

Hinweis: Zeige zunächst, dass für $0 \leq i < g$ sich $\omega_i := x^i(\mathrm{d}x)/y$ zu globalen Differentialen auf X fortsetzen lassen. Berechne die Nullstellenordnungen der ω_i für $x = 0$ und zeige so, dass sie linear unabhängig sind.

Abgabe bis Beginn der Übung um **14 Uhr** am **Mittwoch, den 3. Februar**.