Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2015/16
20. Januar 2016

Algebraische Geometrie
Prof. Dr. Martin Möller
Matteo Costantini
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Sei $f\colon X \to Y$ ein Schemamorphismus und $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe auf X.

(a) Sei k algebraisch abgeschlossen und seien X, Y Varietäten über k.

Finde X, Y, f und $\mathcal{F}$, sodass $f_*\mathcal{F}$ nicht kohärent ist.

(b) Zeige: Ist f ein endlicher Morphismus so ist $f_*\mathcal{F}$ kohärent.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $X = \operatorname{Spec} k[x,y]/(y^2 - x^3)$.

Zeige: Es gibt keine Umgebung $X \supseteq U \ni P = Z(x,y)$ mit $\varphi \in \mathcal{O}_X(U)$, so dass φ bei P eine Nullstelle von Ordnung 1 hat und sonst auf U keine Nullstellen besitzt, d.h. wir können diesem Punkt kein Geradenbündel zuordnen.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Seien U_0 und U_1 die affinen Standardüberdeckungen von $\mathbb{P}^1$.

(a) Zeige, dass $x_0^m \in \Gamma(U_0, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$ für $n > 0$ genau dann zu einem globalen Schnitt auf $\mathbb{P}^1$ fortgesetzt werden kann, wenn $n = m$ ist.

Hinweis: Gib zunächst die Übergangsfunktion von U_0 nach U_1 an.

(b) Zeige: Für $n \in \mathbb{Z}$ ist $\Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)) = k[x,y]_n$.

(c) Zeige: Es gibt einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z} \to \operatorname{Pic}(\mathbb{P}^1)$.

(d) Ist $\Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)) \otimes \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)) \cong \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m+n))$ für alle $m, n \in \mathbb{Z}$?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei M ein A-Modul. Wir erinnern uns an folgende Definitionen aus der Algebra:

- Die *Tensoralgebra* $T(M) = \bigoplus_{n\geq 0} T^n(M) = \bigoplus_{n\geq 0} M^{\otimes n}$ wird durch $\otimes$ zu einer graduierten assoziativen Algebra.
- Die *symmetrische Algebra* $S(M) = \bigoplus_{n\geq 0} S^n(M) = T(M)/I$, wobei $I = \langle x \otimes y - y \otimes x \mid x, y \in M\rangle$ das Kommutatorideal ist, wird durch $\otimes$ zu einer graduierten kommutativen Algebra.
- Die *alternierende Algebra* $\bigwedge(M) = \bigoplus_{n\geq 0} \bigwedge^n(M) = T(M)/J$, wobei $J = \langle x \otimes x \mid x \in M\rangle$ ist, wird durch $\wedge$ zu einer graduierten assoziativen Algebra.

Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ nun ein lokal-geringter Raum und $\mathcal{F}$ eine $\mathcal{O}_X$-Garbe. Dann definieren wir die Garben $T(\mathcal{F}), S(\mathcal{F})$ und $\bigwedge(\mathcal{F})$ als Garbifizierungen der entsprechenden Prägarben.

(a) Zeige zunächst: $\bigwedge(M)$ ist antikommutativ, d.h. $x \otimes y - y \otimes x \in J$.

Zeige außerdem: Für $u \in \bigwedge^r M$ und $v \in \bigwedge^s M$ ist $u \wedge v = (-1)^{rs} v \wedge u$.

(b) Sei nun $\mathcal{F}$ lokal frei von Rang n.

Zeige: $T^r(\mathcal{F}), S^r(\mathcal{F})$ und $\bigwedge^r(\mathcal{F})$ sind lokal frei von Rang n^r, $\binom{n+r-1}{n-1}$ und $\binom{n}{r}$.

(c) Sei $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz lokal freier Garben von Rang n', n und n''. Wir setzen außerdem $\det \mathcal{F} = \bigwedge^{\operatorname{Rang} \mathcal{F}} \mathcal{F}$.

Zeige: $\bigwedge^n \mathcal{F} \cong \bigwedge^{n'} \mathcal{F}' \otimes \bigwedge^{n''} \mathcal{F}''$.

Hinweis: Wähle eine Überdeckung, die $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ und $\mathcal{F}''$ trivialisiert. Wie hängen die Übergangsfunktionen (Matrizen!) der Modulgarben mit den Übergangsfunktionen der Determinantenbündel zusammen?

Abgabe bis Beginn der Übung um **14 Uhr** am **Mittwoch, den 27. Januar**.