# Übungsblatt 11

## Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Finde ein Beispiel für $S$-Schemata $X$ und $Y$, so dass das Schema $X \times_S Y$ ungleich dem (topologischen) Faserprodukt der zugrunde liegenden topologischen Räume ist.

*Hinweis*: Was ist $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$?

(b) Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus von Schemata und $y \in Y$ ein Punkt.

Zeige: $X \times_Y \{y\}$ ist homöomorph zu $\{x \in X : f(x) = y\} \subseteq X$.

## Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $f\colon X \to Y$ ein Schemamorphismus.

Wir nennen $f$ *endlich*, falls es eine offene affine Überdeckung $Y = \bigcup V_i$ mit $V_i = \operatorname{Spec} B_i$ gibt, so dass die Urbilder $f^{-1}(V_i) = \operatorname{Spec} A_i$ affin sind und alle $A_i$ endlich-erzeugte $B_i$-Moduln sind.

(a) Zeige: $f$ ist genau dann endlich, wenn *für jede* affine offene Teilmenge $V = \operatorname{Spec} B \subseteq Y$ gilt: Das Urbild $f^{-1}(V) = \operatorname{Spec} A$ ist affin und $A$ ist ein endlich-erzeugter $B$-Modul.

(b) Zeige: Ist $f$ endlich, so ist $f^{-1}(p)$ endlich für alle Punkte $p \in Y$.

(c) Sei $k$ ein Körper und $p(t) \in k[t]$ ein Polynom vom Grad $n$ und $f\colon \operatorname{Spec} k[t] \to \operatorname{Spec} k[u]$ durch $u \mapsto p(t)$ gegeben.

Zeige: $f$ ist endlich.

(d) Gib ein Beispiel für Schemata $X$ und $Y$ und einen Morphismus $f$ an, der endliche Fasern hat, aber nicht endlich ist.

## Aufgabe 3 (5 Punkte)

(a) Seien $X, Y$ affine Varietäten mit $\dim X = n \geq \dim Y = m$ und $f\colon X \to Y$ ein dominanter Morphismus.

Zeige: Die Menge der Punkte $p \in Y$ mit $\dim f^{-1}(p) + m = n$ liegt dicht in $Y$.

(b) Zeige: Es gibt keinen dominanten Morphismus $\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^m$ für $n > m$.

*Hinweis*: Betrachte eine Hyperfläche und einen Punkt im $\mathbb{P}^m$.

## Aufgabe 4 (2 Punkte)

Sei $\pi\colon \operatorname{Spec} \mathbb{Q}[x,y]/(y^2 - x) \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}}$ die Projektion auf die $x$-Achse.

Bestimme die Fasern über $1, 0, -1$ und dem generischen Punkt $(0)$ und gib die zugehörigen Erweiterungen der Restklassenkörper an.

---

**Abgabe** bis Beginn der Übung um **14 Uhr** am **Mittwoch, den 20. Januar**.