Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2015/16
18. Dezember 2015

Algebraische Geometrie
Prof. Dr. Martin Möller
Matteo Costantini
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper mit Char $k \neq 2$ und $f = (x - p_1) \cdots (x - p_n) \in k[x]$, $n \geq 5$, ein Polynom ohne mehrfache Nullstellen.

(a) Zeige: $X = \operatorname{Spec} k[x,y]/(y^2 - f(x)) = Z(y^2 - f(x)) \subset \mathbb{A}^2$ ist regulär, aber $\overline{X} \subset \mathbb{P}^2$ ist singulär.

(b) Sei außerdem $Y = \operatorname{Spec} k[z,u]/(z^2 - u^l f(1/u))$ mit $l = n$ für n gerade und $l = n+1$ sonst.

Verklebe X und Y zu einer regulären Kurve in $\mathbb{P}^2$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und $f \in R$.

(a) Zeige: $(D(f), \mathcal{O}_R|_{D(f)}) \cong \operatorname{Spec} R_f$ als affine Schemata.

(b) Zeige: $D(f) = \emptyset \iff f$ ist nilpotent.

(c) Sei $I \subseteq R$ ein Ideal und $S \subseteq R$ ein multiplikatives System.

Beschreibe $\operatorname{Spec} R/I$ und $\operatorname{Spec} R_S$ als affine Schemata.

(d) Sei nun S ein kommutativer Ring und $\varphi \colon R \to S$ ein injektiver Ringhomomorphismus und sei $f \colon \operatorname{Spec} S \to \operatorname{Spec} R$ die induzierte Abbildung.

Zeige: f ist dominant, d.h. $f(\operatorname{Spec} S)$ liegt dicht in $\operatorname{Spec} R$, und $f^\sharp \colon \mathcal{O}_R \to f_*\mathcal{O}_S$ ist injektiv.

(e) Sei nun φ surjektiv.

Zeige: Dann ist f ein Homöomorphismus auf eine abgeschlossene Teilmenge von $\operatorname{Spec} R$ und $f^\sharp \colon \mathcal{O}_R \to f_*\mathcal{O}_S$ ist surjektiv.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

(a) Beschreibe und male $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ und zeige, dass $(\operatorname{Spec} \mathbb{Z}, \mathcal{O}_\mathbb{Z})$ in der Kategorie der affinen Schemata terminal ist, d.h. zu jedem affinen Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ existiert genau ein Schema-Morphismus $(X, \mathcal{O}_X) \to (\operatorname{Spec} \mathbb{Z}, \mathcal{O}_\mathbb{Z})$.

(b) Sei R ein Ring.

Zeige: $\operatorname{Spec} R$ ist genau dann unzusammenhängend, wenn es zwei idempotente Elemente $e_1, e_2 \in R$ mit $e_1 + e_2 = 1$ und $e_1^2 = e_1$ und $e_2^2 = e_2$ gibt.

Hinweis: Zeige: In dem Fall ist $R \cong R_1 \times R_2$ für Ringe R_1, R_2.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

(a) Sei X ein topologischer Raum und $Z \subseteq X$ eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge. Ein Punkt $x \in Z$ heißt *generischer Punkt*, falls $\overline{\{x\}} = Z$.

Zeige: Ist X ein Schema, so besitzt jede nichtleere abgeschlossene irreduzible Teilmenge einen eindeutigen generischen Punkt.

(b) Sei X ein Schema und K ein Körper.

Zeige: Ein Schemamorphismus $\operatorname{Spec} K \to X$ entspricht einem Punkt $x \in X$ zusammen mit einem Morphismus des Restklassenkörpers $k(x) \to K$.

(c) Sei nun R ein diskreter Bewertungsring, d.h. ein lokaler nullteilerfreier Hauptidealring, der kein Körper ist.

Beschreibe und male das affine Schema $\operatorname{Spec} R$.

(d) Finde ein Beispiel für affine Schemata $X = \operatorname{Spec} S$ und $Y = \operatorname{Spec} R$ und einen Morphismus $f\colon X \to Y$, der ein Morphismus geringter Räume ist, der aber nicht von einem Ringhomomorphismus $R \to S$ stammt, d.h. kein Morphismus *lokal geringter* Räume ist.

Abgabe bis Beginn der Übung um **14 Uhr** am **Mittwoch, den 13. Januar 2016**.