Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2015/16
14. Oktober 2015

Algebraische Geometrie
Prof. Dr. Martin Möller
Matteo Costantini
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $X \subset Y$ topologische Räume. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) X ist irreduzibel, d.h. aus $X = X_1 \cup X_2$ mit X_1, X_2 abgeschlossen folgt $X_1 = X$ oder $X_2 = X$.

(b) Jede offene nichtleere Teilmenge von X liegt dicht.

(c) Je zwei offene nichtleere Teilmengen von X haben nicht-leeren Schnitt.

(d) Der Abschluss $\overline{X} \subset Y$ ist irreduzibel.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Betrachte folgende Mengen in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$.

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 : y^2 = x\} \qquad W = (0,0)$$
$$Y = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 : y = 0\} \qquad Z = (1,1)$$

Bestimme die Koordinatenringe zu den Varietäten $X \cup Y$, $X \cap Y$, $W \cap Z$ und $W \cup Z$.

(b) Berechne die Dimension von $V(y^2 - x)$.

Bestimme die Verschwindungsideale der Punkte, die auf $V(y^2 - x)$ liegen.

(c) Sei k ein Körper. Zeige, dass $k[x,y]/(xy)$ nicht zu $k[t]$ isomorph ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeige, dass die Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}^2$ ungleich der Produkt-Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum. X heißt *quasi-kompakt*, falls jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

(a) Zeige, dass $\mathbb{C}$ mit der analytischen topologie versehen nicht noethersch ist.

(b) Zeige, dass X genau dann noethersch ist, wenn jede offene Teilmenge von X quasi-kompakt ist.

Abgabe bis Beginn der Übung um **14 Uhr** am **Mittwoch, den 21. Oktober**.