

Skript zur Vorlesung

Algebraische Geometrie (4std.)

Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. Martin Möller

Frankfurt am Main, 16. Februar 2016

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Ziele	2
1.2	Literatur	2
2	Affine Varietäten	3
3	Dimension affiner Varietäten	5
4	Projektive Varietäten	9
5	Morphismen	15
6	Rationale Abbildungen	21
7	Lokale Eigenschaften, Singularitäten	28
8	Das Hilbertpolynom	33
9	Der Satz von Bézout	41
10	Divisoren auf Kurven	48
11	Garben	51
12	Varietäten	56
13	Schemata	59
14	Tensorprodukte und Fasern	65
15	Vektorbündel und kohärente Garben	68
16	Projektive Schemata	74
17	Differenzialformen	78
18	Die Sätze von Riemann-Hurwitz und Riemann-Roch	83
	Literatur	97
	Stichwortverzeichnis	98

1 Einleitung

Algebraische Geometrie untersucht die Nullstellenmengen von polynomialen Gleichungssystemen. Unter den bekanntesten Problemen über solche Nullstellenmengen ist das Fermatsche Problem, welches die Nichtexistenz von ganzzahligen Lösungen von

$$x^n + y^n = z^n$$

für $n \geq 3$ behauptet, abgesehen von den Trivialsösungen, bei denen eine Variable Null ist. Die Lösung von Wiles ist ein gefeierter Satz aus der arithmetischen Geometrie, d.h. aus der Kombination von Algebraischer Geometrie und Zahlentheorie. Wir werden in dieser Vorlesung längst nicht in die Nähe kommen, den Beweis von Wiles zu verstehen, aber das Beispiel der Fermatschen Gleichung als Leitfaden benutzen, um grundlegende Begriffe der algebraischen Geometrie zu verstehen.

Zunächst kann man die Gleichung durch z^n dividieren und kann nach den Lösungen von

$$x^n + y^n = 1$$

im Körper der rationalen Zahlen fragen. Eine Gleichung in zwei Variablen definiert eine eindimensional algebraische Varietät, eine Kurve. Ein erster Schritt wird also den Dimensionsbegriff Lösungsmengen von Gleichungssystemen einzuführen.

Warum verhält sich $n = 2$ so unterschiedlich zu den Fällen $n \geq 3$? In Abschnitt ?? werden wir den Tangentialraum zu algebraischen Varietäten und später in Abschnitt ?? Differentialformen einführen. Die Dimension des Raums der Differentialformen auf einer glatten projektiven Kurven wird das Geschlecht der Kurve genannt. Für $n = 2$ ist das Geschlecht der Fermat-Kurve Null und für $n \geq 3$ ist das Geschlecht positiv. Das Motto 'hohes Geschlecht impliziert wenige rationale Punkte' ist prinzipiell korrekt. Man kann es sogar auch für höherdimensionale algebraische Varietäten verallgemeinern. Dafür sollte man die Definition des Geschlechts mit Hilfe kohomologischer Invarianten verwenden, die wir in Abschnitt ?? definieren.

Dies ist der Beginn eines der wichtigsten Forschungsfelder der algebraischen Geometrie: die Klassifikation von algebraischen Varietäten. Zum einen besteht dies aus einer Grobklassifikation mit Hilfe von Invarianten. Die oben angedeutete Verallgemeinerung des Geschlechts ist die Kodaira-Dimension. Zum anderen gibt es die Frage, 'wie viele' algebraische Varietäten es zu gegebener Invariante gibt. Zum Beispiel definiert

$$x^n + y^n + tx^2y^{n-2} = 1$$

für alle $t \in \mathbb{C}$ eine algebraische Kurve, für $t = 0$ die ursprüngliche Kurve. Den Raum aller Deformationen nennt man einen Modulraum und die Geometrie von Modulräumen ist eine zentrale Frage in der algebraischen Geometrie.

1.1 Ziele

Die Begriffe des einführenden Abschnitts dienen als allgemeine Motivation, gehen aber über den Inhalt dieser einführenden Vorlesung deutlich hinaus.

Wir werden hier wird noch nachgeliefert!

1.2 Literatur

Hauptgrundlage dieser Vorlesung ist das Buch von Hartshorne ([Har77]). Dieses Buch behandelt viele Begriffe, ist aber nicht so reich an Beispielen. Mehr davon findet man in den Büchern von Harris ([Har95]) oder Shafarevich ([Sha13]). Der Schema-theoretische Zugang ist im neuen Buch von Goertz und Wedhorn ([GW10]) ausführlich ausgearbeitet. Die Grundlagen sind auch im Buch von Mumford ([Mum95]) knapp aber sehr übersichtlich zusammengestellt. Manche Teile des Skripts sind auch an die Darstellung im Vorlesungsmanuscript von Gathmann ([Gat14]) angelehnt.

Algebraische Geometrie über den komplexen Zahlen kann man auch vom Standpunkt der komplexen Mannigfaltigkeiten betrachten. Diesen Zugang verwendet das klassische Buch von Griffiths und Harris ([GH94]).

2 Affine Varietäten

In den Abschnitten 2 bis 12 einschließlich sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper.

In diesem Abschnitt führen wir die Grundbausteine ein, aus denen die Objekte der algebraischen Geometrie zusammengesetzt sind. Wir definieren $\mathbb{A}^n(k) = k^n$ als den *affinen Raum* der Dimension n (und rechtfertigen diesen Dimensionsbegriff später). Ist $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ ein Polynom, so heißt ein Punkt $P = (a_1, \dots, a_n)$ eine *Nullstelle*, falls $f(P) = 0$ ist. Ist $T \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ eine Menge von Polynomen, so wird

$$Z(T) = \{P \in \mathbb{A}^n(k) \mid f(P) = 0 \text{ für alle } f \in T\}$$

die *Verschwindungsvarietät* (oder der *Nullstellenlokus*, das Z kommt von 'zero locus') von T genannt. Eine (k -) *algebraische Menge* in $\mathbb{A}^n(k)$ ist eine Teilmenge der Form $Z(T)$ für eine Menge T von Polynomen. Offenbar ist

$$Z(\mathfrak{a}) = Z(T), \quad \text{wobei } \mathfrak{a} = \langle T \rangle$$

das von T erzeugte Ideal ist.

Proposition 2.1 *Die leere Menge und ganz $\mathbb{A}^n(k)$ sind algebraische Mengen in $\mathbb{A}^n(k)$. Die Vereinigung von zwei algebraischen Mengen Y_1 und Y_2 ist ein algebraische Menge. Ist Y_i eine Familie algebraischer Mengen indiziert durch $i \in I$, so ist auch $\bigcap_{i \in I} Y_i$ eine algebraische Menge.*

Beweis: Sei $Y_i = Z(T_i)$. Dann ist $Y_1 \cup Y_2 = Z(T_1 T_2)$, wobei $T_1 T_2$ das elementweise Produkt der Mengen bedeutet. Ausserdem ist $\bigcap_{i \in I} Y_i = Z(\bigcup_{i \in I} T_i)$. Da $\emptyset = Z(1)$ und $\mathbb{A}^n(k) = Z(\emptyset)$, folgt die Behauptung. \square

Die Proposition besagt, dass die algebraischen Mengen in $\mathbb{A}^n(k)$ den Axiomen für die abgeschlossenen Mengen einer Topologie genügen. Diese Topologie wird *Zariski-Topologie* genannt und wir betrachten in Zukunft $\mathbb{A}^n(k)$ als topologischen Raum mit der Zariski-Topologie. Wie in jedem topologischen Raum wird eine nichtleere Teilmenge Y *irreduzibel* genannt, falls in jeder Schreibweise $Y = Y_1 \cup Y_2$ als Vereinigung abgeschlossener Varietäten $Y_1 = Y$ oder $Y_2 = Y$ ist.

Definition 2.2 *Eine affine Varietät ist eine algebraische Menge in einem affinen Raum $\mathbb{A}^n(k)$, versehen mit der Struktur eines topologischen Raums durch die Zariski-Topologie. Eine quasi-affine Varietät ist eine offene Menge in einer affinen Varietät, versehen mit der induzierten Topologie.*

In der Hauptquelle [Har77] wird bei einer affinen und bei einer quasi-affinen Varietät *zudem vorausgesetzt, dass der Raum irreduzibel* ist. Dies ist nicht in allen Büchern über algebraische Geometrie der Fall und wir verwenden diese

Konvention *nicht*, sondern schreiben das Adjektiv irreduzibel gegebenenfalls hinzu.

Die Zariski-Topologie ist *nicht Hausdorffsch*, d.h. zu zwei verschiedenen Punkten existieren in der Zariski-Topologie im Allgemeinen nicht zwei offene Umgebungen, die disjunkt sind. Diese sieht man bereits am Beispiel der *affinen Geraden* $\mathbb{A}^1(k)$. Dort sind abgeschlossene Mengen nämlich nur $\mathbb{A}^1(k)$ selbst und endliche Mengen. Das folgt daraus, dass $k[x_1]$ ein Hauptidealring ist, also jede abgeschlossene Menge die Nullstelle von einem Polynom ist, welches (falls nicht-konstant) über einem algebraisch abgeschlossenen Körper in Linearfaktoren zerfällt. Die abgeschlossene Menge besteht also aus den Nullstellen der endlich vielen Linearfaktoren.

Die Operation $Z(\cdot)$ kann man fast umkehren. Zu einer algebraischen Menge Y definiert man das *Verschwindungsideal* durch

$$I(Y) = \{f \in k[x_1, \dots, x_n] \mid f(P) = 0 \text{ für alle } P \in Y\}.$$

Um die Beziehung der beiden Operationen darzustellen, erinnern wir an die Definition des *Radikals* $\sqrt{\mathfrak{a}}$ eines Ideal \mathfrak{a}

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \{f \in k[x_1, \dots, x_n] \mid f^r \in \mathfrak{a} \text{ für ein } r \in \mathbb{N}\}.$$

- Proposition 2.3** *i) Die Operationen $Z(\cdot)$ und $I(\cdot)$ sind inklusionsumkehrend und $I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$*
ii) Für ein Ideal \mathfrak{a} von $k[x_1, \dots, x_n]$ gilt $I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$.
iii) Für eine beliebige Teilmenge $M \subset \mathbb{A}^n(k)$ ist $Z(I(M)) = \overline{M}$, der Abschluss von M .

Beweis: Die Behauptung i) ist aus der Definition offensichtlich. Für Behauptung ii) erinnern wir daran, dass der Hilbertsche Nullstellensatz (z.B. [KommAlg], Theorem 8.31 oder Referenzen in [Har77], Theorem 1.3A) besagt, dass bei gegebenem Ideal \mathfrak{a} von $k[x_1, \dots, x_n]$ ein Polynom f , welches auf allen Punkten von $Z(\mathfrak{a})$ verschwindet, eine Potenz f^r besitzt, welche in \mathfrak{a} liegt. Das ist genau eine Umformulierung von ii).

Zum Beweis von iii) halten wir fest, dass für jede Menge M gilt, dass $M \subseteq Z(I(M))$ ist. Ausserdem ist $Z(I(M))$ offenbar abgeschlossen. Ist nun $W \subseteq M$ eine beliebige abgeschlossene Obermenge, dann ist $W = Z(\mathfrak{a})$ für ein Ideal \mathfrak{a} . Also gilt nach i) und der offensichtlichen Inklusion, dass $\mathfrak{a} \subseteq I(Z(\mathfrak{a})) \subseteq I(M)$. Damit ist also $W \subseteq Z(I(M))$ und, da $W \subseteq Z(I(M))$ beliebig war, ist $Z(I(M))$ der Abschluss von M . \square

Damit erzeugen also die Operationen $Z(\cdot)$ und $I(\cdot)$ eine Bijektionen zwischen abgeschlossenen Mengen in $\mathbb{A}^n(k)$ und Radikalidealen in $k[x_1, \dots, x_n]$.

Korollar 2.4 *Unter dieser Korrespondenz werden irreduzible abgeschlossene Mengen bijektiv auf Primideale abgebildet.*

Damit sieht man beispielsweise sofort, dass $\mathbb{A}^n(k)$ irreduzibel ist, da das Nullideal prim ist.

Beweis: Sei Y irreduzibel und f, g Polynome mit $fg \in I(Y)$. Dann ist $Y \subseteq Z(fg) = Z(f) \cup Z(g)$. Damit können wir $Y = (Y \cap Z(f)) \cup (Y \cap Z(g))$ als Vereinigung abgeschlossener Untervarietäten schreiben. Nach Voraussetzung ist also $Y = Y \cap Z(f)$ oder $Y = Y \cap Z(g)$ und damit $f \in I(Y)$ oder $g \in I(Y)$. Also ist $I(Y)$ prim.

Sei umgekehrt \mathfrak{p} prim und wir nehmen an, dass $Z(\mathfrak{p}) = Y_1 \cup Y_2$ sich als Vereinigung abgeschlossener Untervarietäten schreiben lässt. Dann ist $\mathfrak{p} = I(Y_1) \cap I(Y_2)$, also $\mathfrak{p} = I(Y_1)$ oder $\mathfrak{p} = I(Y_2)$. Damit ist $Z(\mathfrak{p}) = Y_1$ oder $Z(\mathfrak{p}) = Y_2$, womit gezeigt ist, dass $Z(\mathfrak{p})$ irreduzibel ist. \square

Aufgabe 2.1 (4 Punkte)

Seien $X \subset Y$ topologische Räume. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- X ist irreduzibel, d.h. aus $X = X_1 \cup X_2$ mit X_1, X_2 abgeschlossen folgt $X_1 = X$ oder $X_2 = X$.
- Jede offene nichtleere Teilmenge von X liegt dicht.
- Je zwei offene nichtleere Teilmengen von X haben nicht-leeren Schnitt.
- Der Abschluss $\bar{X} \subset Y$ ist irreduzibel.

Aufgabe 2.2 (4 Punkte)

- (a) Betrachte folgende Mengen in $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned} X &= \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 : y = x^2\} & W &= (0, 0) \\ Y &= \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 : y = 0\} & Z &= (1, 1) \end{aligned}$$

Bestimme die Koordinatenringe zu den Varietäten $X \cup Y$, $X \cap Y$, $W \cap Z$ und $W \cup Z$.

- Berechne die Dimension von $Z(y - x^2)$.
Bestimme die Verschwindungsideale der Punkte, die auf $Z(y - x^2)$ liegen.
- Sei k ein Körper. Zeige, dass $k[x, y]/(xy)$ nicht zu $k[t]$ isomorph ist.

Aufgabe 2.3 (4 Punkte)

Zeige, dass die Zariski-Topologie auf \mathbb{A}^2 ungleich der Produkt-Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ ist.

Aufgabe 2.4 (4 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum. X heißt *quasi-kompakt*, falls jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

- Zeige, dass \mathbb{C} mit der analytischen topologie versehen nicht noethersch ist.
- Zeige, dass X genau dann noethersch ist, wenn jede offene Teilmenge von X quasi-kompakt ist.

3 Dimension affiner Varietäten

In diesem Abschnitt wollen wir einen Dimensionsbegriff (quasi)-affiner Varietäten topologisch und ringtheoretisch definieren und die Äquivalenz der beiden Begriffe zeigen.

Ein topologischer Raum X wird *noethersch* genannt, falls er der absteigenden Kettenbedingung für abgeschlossene Teilmengen genügt, d.h. gegeben eine

absteigende Kette $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq Y_3 \supseteq \dots$ abgeschlossener Teilmengen, so gibt es ein r , sodass $Y_{i+1} = Y_i$ für alle $i \geq r$ gilt.

Der affine Raum $\mathbb{A}^n(k)$ ist noethersch, denn $k[x_1, \dots, x_n]$ ist nach dem Hilbertschen Basissatz (z.B. [KommAlg], Theorem 8.9) noethersch. Genauer gesagt, ist $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq Y_3 \supseteq \dots$ eine absteigende Kette, so ist $I(Y_1) \subseteq I(Y_2) \subseteq I(Y_3) \subseteq \dots$ eine aufsteigende Kette von Idealen, also stationär ab einem Index r und damit ist auch $Y_{i+1} = Y_i$ für alle $i \geq r$. Aufgrund dieses Arguments sind auch algebraische Mengen in $\mathbb{A}^n(k)$ noethersch.

Proposition 3.1 *In einem noetherschen topologischen Raum X kann jede nichtleere abgeschlossene Teilmenge Y als Vereinigung $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_k$ irreduzibler Teilmengen geschrieben werden. Diese Schreibweise ist bis auf Reihenfolge eindeutig, wenn eine Redundanz $Y_i \subsetneq Y_j$ für ein $i \neq j$ ausgeschlossen ist.*

Die Y_i in der vorangehenden Proposition werden die irreduziblen Komponenten von Y genannt. Als Folge der vorangehenden Bemerkung kann jede algebraische Menge eindeutig als nicht-redundante Vereinigung irreduzibler algebraischer Mengen geschrieben werden. Diese werden die *irreduziblen Komponenten* genannt.

Beweis: Wir zeigen die Existenz einer solchen Darstellung durch einen Widerspruchsbeweis. Sei \mathfrak{S} die Menge aller Teilmengen, die keine gewünschte Darstellung besitzen. In einem Widerspruchsbeweis können wir annehmen, dass \mathfrak{S} nichtleer ist. Da X noethersch ist, gibt es in \mathfrak{S} eine minimale algebraische Menge Y , denn andernfalls finden wir eine nicht-stationäre absteigende Kette. Diese Menge Y ist nach Definition von \mathfrak{S} nicht irreduzibel, also können wir sie in der Form $Y = Y_1 \cup Y_2$ schreiben, wobei die Y_i beide nichtleer und echte Teilmengen von Y sind. Aufgrund der Minimalitätseigenschaft von Y kann man beide Y_i in der Form der Proposition als endliche Vereinigung irreduzibler Teilmengen schreiben, und damit auch Y , im Widerspruch zur Definition von \mathfrak{S} .

Angenommen $Y = Y'_1 \cup \dots \cup Y'_\ell$ ist eine weitere solche Darstellung. Dann ist $Y'_1 \subset Y_1 \cup \dots \cup Y_k$, also $Y'_1 = \bigcup_{i=1}^k (Y'_1 \cap Y_i)$. Da aber Y'_1 irreduzibel ist, muss es einen Index j geben, sodass $Y'_1 \subseteq Y_j$ ist, sagen wir $j = 1$ nach Umnummerierung. Mit dem gleichen Argument ist $Y_1 \subseteq Y'_a$ für ein a . Aufgrund der Nichtredundanzvoraussetzung gilt also $a = 1$ und wir können per Induktion nach der Anzahl der irreduziblen Komponenten den Beweis beenden. \square

Die *Dimension* eines topologischen Raums X ist die maximale Länge n einer strikt aufsteigenden Kette $X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \dots \subsetneq X_n$ nichtleerer, abgeschlossener, irreduzibler Untervarietäten. Die *Dimension einer algebraischen Menge* definieren wir als die Dimension des zugrundeliegenden topologischen Raumes (mit der Zariski-Topologie).

Damit ist beispielsweise die Dimension von $\mathbb{A}^1(k)$ gleich eins, denn wir haben bereits gesehen, dass die einzigen nicht-leeren abgeschlossenen Teilmen-

gen, die strikt in $\mathbb{A}^1(k)$ enthalten sind, endliche Mengen von Punkten sind. Um weitere Beispiele zu berechnen, benötigen wir folgende wichtigen Begriffe.

Der *affine Koordinatenring* einer algebraischen Menge Y in $\mathbb{A}^n(k)$ ist

$$A(Y) = k[x_1, \dots, x_n]/I(Y). \quad (3.1)$$

Der affine Koordinatenring einer irreduziblen affinen Varietät ist nullteilerfrei. Umgekehrt ist offenbar jede endlich erzeugte, nullteilerfreie k -Algebra der affine Koordinatenring einer irreduziblen affinen Varietät.

Wir erinnern daran, dass die *Höhe* $\text{ht}(\mathfrak{p})$ eines Primideals \mathfrak{p} als die maximale Länge n einer strikt aufsteigenden Kette $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$ definiert ist und dass die *Krulldimension* eines Rings R das Maximum der Höhen aller Primideale in R ist. Aufgrund der Korrespondenz in Korollar 2.4 stimmen diese Dimensionsbegriffe überein.

Proposition 3.2 *Die Dimension einer algebraischen Menge Y ist gleich der Krull-Dimension des affinen Koordinatenrings $A(Y)$.*

Wir benötigen folgende zwei Sätze aus der kommutativen Algebra, deren Beweis wir nachliefern, nachdem wir den Begriff des Hilbertpolynoms eingeführt haben.

Satz 3.3 *Sei B eine nullteilerfreie, endlich erzeugte k -Algebra. Dann ist die Dimension von B gleich dem Transzendenzgrad von $K = \text{Quot}(B)$ über k .*

Satz 3.4 *Sei B eine nullteilerfreie, endlich erzeugte k -Algebra. Dann gilt für jedes Primideal \mathfrak{p} die Beziehung*

$$\text{ht}(\mathfrak{p}) + \dim(B/\mathfrak{p}) = \dim(B). \quad (3.2)$$

Damit können wir das fundamentale Beispiel berechnen.

Beispiel 3.5 *Die Dimension von $\mathbb{A}^n(k)$ ist gleich n .*

Beweis: Die offensichtliche Kette $0 \subsetneq \mathbb{A}^1(k) \subsetneq \mathbb{A}^2(k) \subsetneq \dots \subsetneq \mathbb{A}^n(k)$ koordinatenweiser Inklusionen zeigt, dass die $\dim(\mathbb{A}^n(k)) \geq n$. Offenbar ist $\text{trdeg } k(x_1, \dots, x_n) \leq n$ und damit gilt nach Satz 3.3 überall Gleichheit. \square

Für offene Untervarietäten können wir uns bei der Dimensionsberechnung auf den Abschluss zurückziehen.

Proposition 3.6 *Die Dimension einer irreduziblen quasi-affinen Varietät $Y \subset \mathbb{A}^n(k)$ ist gleich der Dimension ihres Abschlusses \overline{Y} .*

Beweis: Ist $Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq Z_2 \subsetneq \dots \subsetneq Z_n$ eine Kette abgeschlossener irreduzibler Untervarietäten von Y , so ist $\overline{Z_0} \subsetneq \overline{Z_1} \subsetneq \overline{Z_2} \subsetneq \dots \subsetneq \overline{Z_n}$ eine Kette abgeschlossener irreduzibler Untervarietäten von \overline{Y} , also $\dim(Y) \leq \dim(\overline{Y})$ und somit ist diese Dimension endlich.

Sei nun also $Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq Z_2 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_n$ eine Kette abgeschlossener, irreduzibler Untervarietäten in Y von maximaler Länge. Maximalität impliziert, dass $Z_0 = P$ ein Punkt ist. Ausserdem kann man die Kette $P = \overline{Z_0} \subsetneq \overline{Z_1} \subsetneq \overline{Z_2} \subsetneq \cdots \subsetneq \overline{Z_n}$ nicht verfeinern, denn das Schneiden einer Verfeinerung mit Y gäbe eine längere Kette in Y . Der Punkt P korrespondiert zu einem maximalen Ideal \mathfrak{m} in $A(\overline{Y})$ und da die $\overline{Z_i}$ zu Primidealen in \mathfrak{m} korrespondieren, ist $\text{ht}(\mathfrak{m}) = n$. Da $\dim(A(\overline{Y})/\mathfrak{m}) = \dim(k) = 0$ ist, folgt mit Satz 3.4 die Behauptung. \square

Wir kommen nun zu ersten Beispielen der Berechnung der Dimension von Untervarietäten.

Proposition 3.7 *Eine irreduzible affine Varietät $Y \subset \mathbb{A}^n(k)$ hat die Dimension $n - 1$ genau dann, wenn sie als Nullstellenmenge $Y = Z(f)$ von einem nichtkonstanten, irreduziblen Polynom $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ geschrieben werden kann.*

Beweis: Ist f irreduzibel, so haben wir bereits gesehen, dass $Z(f)$ irreduzibel, also eine Varietät ist. Damit ist $(f) = \mathfrak{p}$ ein Primideal. Der Krullsche Hauptidealsatz ([KommAlg], Theorem 9.24 oder die Referenzen in [Har77] Theorem 1.11A) besagt nun (da f weder Null noch eine Einheit ist), dass \mathfrak{p} die Höhe 1 hat. Damit folgt $\dim(Y) = n - 1$ aus Satz 3.4.

Umgekehrt gehört zu einer Varietät Y der Dimension $n - 1$ ein Primideal $\mathfrak{p} \subset k[x_1, \dots, x_n]$ der Höhe 1. Wir verwenden nun, dass $k[x_1, \dots, x_n]$ faktoriell ist, und in einem solchen Ring ist jedes Primideal von Höhe 1 ein Hauptideal. (Beweis: Sei $0 \neq x \in \mathfrak{p}$ und $x = f_1 f_2 \cdots f_k$ die Faktorisierung in Primelemente. Da $x \in \mathfrak{p}$ gibt es ein i , sodass $f_i \in \mathfrak{p}$. Da $\text{ht}(\mathfrak{p}) = 1$ muss $\mathfrak{p} = (f)$ und damit ein Hauptideal sein.) \square

Insbesondere ist das einleitende Beispiel, die Fermat-Kurve $Z(x^n + y^n - 1)$ im zweidimensionalen affinen Raum in der Tat eine eindimensionale affine Varietät, d.h. eine *(affine) algebraische Kurve*.

Bei Varietäten höherer Kodimension ist der Zusammenhang zwischen Dimension und Anzahl der zur Definition benötigten Gleichungen schwierig, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 3.8 Das Ideal

$$I = \langle y^2 - xz, x^3 - yz, z^2 - x^2y \rangle \subseteq k[x, y, z]$$

gehört zu einer eindimensionalen algebraischen Menge in $\mathbb{A}^3(k)$, denn für alle $t \in k$ ist $(t^3, t^4, t^5) \in Z(I)$ und $Z(I)$ kann nicht zweidimensional sein. Das Ideal I ist aber noch nicht einmal von zwei Elementen erzeugt.

Um das zu beweisen, definieren wir auf $A = k[x, y, z]$ ein Graduierung, indem wir $\deg(x) = 3$, $\deg(y) = 4$ und $\deg(z) = 5$ setzen. Dann ist I ein homogenes Ideal mit Erzeugern im Grad 8, 9 und 10. Wir verwenden, dass ein

homogenes Ideal stets von homogenen Elementen erzeugt ist. Angenommen I ist von zwei Elementen f_1 und f_2 erzeugt. Dann ist $\deg(f_i) \geq 8$ und mindestens eines der beiden Elementen, sagen wir f_1 hat Grad 8. Falls f_2 auch Grad 8 hat, so kann $\langle f_1, f_2 \rangle$ kein Element vom Grad 9 enthalten, denn Multiplikation mit einem Erzeuger von A erhöht den Grad um mindestens 3. Falls f_2 den Grad 9 hat, so kann $\langle f_1, f_2 \rangle$ aus dem selben Grund kein Element vom Grad 10 enthalten. Damit haben wir den gewünschten Widerspruch.

Zum Ende noch eine nützliche Sprechweise. Wir sagen, dass eine irreduzible Untervarietät Y in einer affinen Varietät X die *Kodimension* k besitzt und schreiben $\text{codim}_X(Y)$, falls die Länge s der maximalen Kette

$$Y = Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_s$$

irreduzibler Untervarietäten mit strikten Inklusionen gleich k ist. Mit dieser Sprechweise ist der Satz 3.4 äquivalent zu

$$\dim(Y) + \text{codim}_X(Y) = \dim(X). \quad (3.3)$$

Insbesondere ist die Kodimension einer affinen Untervarietät Y im $\mathbb{A}^n(k)$ einfach $n - \dim(Y)$.

4 Projektive Varietäten

Im zweidimensionalen affinen Raum schneiden sich zwei Geraden in einem Punkt – oder sie sind parallel. Im zweidimensionalen projektiven Raum fällt diese lästige Ausnahme weg. Die Unabhängigkeit ‘Anzahl’ der Schnittpunkte (was wir später noch korrekt, mit Vielfachheit, definieren werden) unter einer Deformation (‘Verschiebung’) ist eine von vielen Gründen, warum es oft günstiger ist in einem projektiven Raum statt in einem affinen Raum zu arbeiten. Ein weiterer Grund ist die Kompaktheit des projektiven Raums.

Der *n-dimensionale projektive Raum* $\mathbb{P}^n(k)$ ist die Menge der Äquivalenzklassen von $(n + 1)$ -Tupeln (a_0, \dots, a_n) unter der Relation $(a_0, \dots, a_n) \sim (\lambda a_0, \dots, \lambda a_n)$ für alle $\lambda \in k^*$. Wir schreiben oft $(a_0 : \dots : a_n)$ für solch eine Äquivalenzklasse. Diese Tupel werden auch die *homogenen Koordinaten* für einen Punkt in $\mathbb{P}^n(k)$ genannt. Geometrisch sollte man sich $\mathbb{P}^n(k)$ also als den Raum der Strahlen in $\mathbb{A}^{n+1}(k)$, die durch den Ursprung gehen, vorstellen. Wir bezeichnen mit

$$\pi : \mathbb{A}^{n+1}(k) \rightarrow \mathbb{P}^n(k), \quad (a_0, \dots, a_n) \mapsto (a_0 : \dots : a_n) \quad (4.1)$$

die *natürliche Projektionsabbildung* auf den projektiven Raum.

Um Nullstellenmengen im $\mathbb{P}^n(k)$ zu beschreiben, wiederholen wir einige Definitionen und Eigenschaften graduerter Ringe. Ein Ring S ist *graduiert*,

falls es eine Zerlegung $S = \bigoplus_d S_d$ von S als abelsche Gruppe gibt, sodass die Multiplikation die Eigenschaft $S_d \cdot S_e \subseteq S_{d+e}$ besitzt. Die Elemente von S_d werden *homogen* vom Grad d genannt. Ein *homogenes Ideal* ist ein Ideal \mathfrak{a} mit der Eigenschaft $\mathfrak{a} = \bigoplus_d (\mathfrak{a} \cap S_d)$.

Proposition 4.1 *In einem graduierten Ring S gilt:*

- i) *Ein Ideal ist homogen, genau dann wenn es von homogenen Elementen erzeugt wird.*
- ii) *Die Summe, das Produkt, der Durchschnitt und das Radikal von homogenen Idealen ist homogen.*
- iii) *Ein homogenes Ideal \mathfrak{a} ist prim, genau dann wenn für homogene Polynome f, g aus $fg \in \mathfrak{a}$ folgt, dass $f \in \mathfrak{a}$ oder $g \in \mathfrak{a}$.*

Beweis: Zum Beweis von i) sei I homogen, erzeugt von Polynomen f_j für $j \in J$. Zerlegt man den Erzeuger $f_j = \sum_{d \in \mathbb{N}} f_{j,d}$ in seine homogenen Bestandteile, so ist $f_{j,d} \in I$ nach Definition des Begriffs *homogen*, und diese Bestandteile erzeugen I offenbar. Sei umgekehrt I von homogenen Elementen f_j für $j \in J$ erzeugt. Sei h ein beliebiges Element in I . Dann gibt es eine Darstellung $h = \sum g_j f_j$, wobei die $g_j \in R$ nicht notwendigerweise homogen sind. Aber man kann sie in ihre homogenen Bestandteile zerlegen, also $g_j = \sum_{d \in \mathbb{N}} g_{j,d}$. Definiert man dann die homogenen Elemente

$$h_e = \sum_{d + \deg(f_j) = e} g_{j,d} f_j,$$

so ist $h = \sum_{e \in \mathbb{N}} h_e$.

Der Beweis der übrigen Eigenschaften verbleibt als Übung. □

Wir machen den Polynomring $k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ zu einem graduierten Ring, indem wir jedem x_i das Gewicht 1 geben. Nun definiert man algebraische Mengen formal genauso wie im affinen Fall.

Ist $T \subseteq k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ eine Menge von homogenen Polynomen, so wird

$$Z(T) = \{P \in \mathbb{P}^n(k) \mid f(P) = 0 \text{ für alle } f \in T\}$$

der *Nullstellenlokus* von T genannt. Dabei beachte man, dass diese Definition wohldefiniert ist, denn bei einem homogenen Polynom hängt das Verschwinden oder Nichtverschwinden an einem Punkt P nicht vom Vertreter der Äquivalenzklasse ab. Offenbar ist wieder

$$Z(\mathfrak{a}) = Z(T), \quad \text{wobei } \mathfrak{a} = \langle T \rangle$$

das von T erzeugte Ideal ist. Eine *(k -) algebraische Menge in $\mathbb{P}^n(k)$* ist eine Teilmenge der Form $Z(T)$ für eine Menge T von Polynomen. Mit dem gleichen Beweis wie im affinen Fall zeigt man, dass algebraische Menge in $\mathbb{P}^n(k)$ die Axiome für die abgeschlossenen Mengen einer Topologie erfüllen. Um Verwechslungen zu vermeiden, schreiben wir gegebenenfalls $Z_a(\cdot)$ für den Verschwindungsort im affinen und $Z_p(\cdot)$ im projektiven Fall.

Definition 4.2 Eine projektive Varietät ist eine algebraische Menge in einem projektiven Raum $\mathbb{A}^n(k)$, versehen mit der Struktur eines topologischen Raums durch die Zariski-Topologie. Eine quasi-projektive Varietät ist eine offene Menge in einer projektiven Varietät, versehen mit der induzierten Topologie.

Hier gelten die gleichen Bemerkungen bezüglich der Irreduzibilitätskonvention wie im affinen Fall. Das Skript weicht diesbezüglich von [Har77] ab.

Auch das Verschwindungsideal hat ein Analogon im projektiven Fall. Ist $Y \subset \mathbb{P}^n(k)$ eine beliebige Teilmenge, definiert man das *Verschwindungsideal*

$$I(Y) = \{f \in k[x_0, x_1, \dots, x_n] \text{ homogen} : f(P) = 0 \text{ für alle } P \in Y\}.$$

Ist Y eine algebraische Menge in $\mathbb{P}^n(k)$, so definiert man den *projektiven Koordinatenring* als

$$S(Y) = k[x_0, x_1, \dots, x_n]/I(Y).$$

Mit diesem Begriff gilt das Analogon von Proposition 2.3 wörtlich mit einer Ausnahme. Im Punkt ii) muss man zudem voraussetzen, dass $Z_p(\mathfrak{a})$ nicht leer ist. Wir überlassen es als Übung eine projektive Version des Nullstellensatzes zu formulieren (siehe z.B. [Har77], Exercise 2.1) und durch Reduktion auf den affinen Fall zu beweisen. Das kleine Problem mit $Z_p(\mathfrak{a}) = \emptyset$ liegt daran, dass wir bei π den Nullpunkt aus $\mathbb{A}^{n+1}(k)$ herausgenommen haben. Es gilt:

Lemma 4.3 Ist $\mathfrak{a} \subset k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ ein homogenes Ideal, so ist $Z_p(\mathfrak{a}) = \emptyset$ genau dann wenn das Radikal von \mathfrak{a} entweder ganz $k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ oder das Ideal $I_0 = \langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$ ist.

Beweis: Offenbar ist $Z(I_0) = \emptyset$, da es keinen Punkt in $\mathbb{P}^n(k)$ gibt, bei dem alle Koordinaten Null sind. Ist umgekehrt \mathfrak{a} ein Ideal mit projektivem Verschwindungsort $Z_p(\mathfrak{a}) = \emptyset$, so betrachten wir den affinen Verschwindungsort von $Z_a(\mathfrak{a})$. Dieser muss leer oder der Nullpunkt in $\mathbb{A}^{n+1}(k)$ sein, denn sonst wäre das π -Bild davon in $Z_p(\mathfrak{a})$. Die Radikaleideale in diesen beiden Fällen sind aber gerade ganz $k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ und I_0 . \square

Wir fassen zusammen, was der projektive Nullstellensatz liefert.

Proposition 4.4 Die Abbildungen $Z(\cdot)$ und $I(\cdot)$ geben eine inklusionsumkehrende Bijektion zwischen projektiven Varietäten in $\mathbb{P}^n(k)$ und homogenen Radikaleidealen in $k[x_0, x_1, \dots, x_n]$, die von I_0 verschieden sind.

Aus diesem Grund wird I_0 auch das *irrelevante Ideal* genannt.

Eine wichtige Beziehung zwischen affinen und projektiven Varietäten erhält man durch die *Standardüberdeckung* von $\mathbb{P}^n(k)$ durch $n + 1$ affine Räume, die wir nun definieren.

Ist $(a_0 : a_1 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}^n(k)$, so gibt es per Definition mindestens eine Koordinate, sodass das entsprechende a_i ungleich Null ist. Wenn wir also

$$U_i = \{(a_0 : a_1 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}^n(k) : a_i \neq 0\}$$

definieren, so ist $\cup_{i=1}^n U_i = \mathbb{P}^n(k)$, also eine Überdeckung. Wir können U_i mit einem $\mathbb{A}^n(k)$ identifizieren, vermöge der Abbildung

$$\varphi : U_i \rightarrow \mathbb{A}^n(k), \quad (a_0 : a_1 : \dots : a_n) \mapsto \left(\frac{a_0}{a_i}, \dots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i} \right).$$

Proposition 4.5 Die Abbildung φ_i sind Homöomorphismen von U_i mit der von $\mathbb{P}^n(k)$ induzierten Topologie nach $\mathbb{A}^n(k)$ mit der Zariski-Topologie.

Als Vorbereitung zum Beweis definieren wir die *Homogenisierung* eines Polynoms $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ als

$$f^\# = x_0^d f\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) \in k[x_0, x_1, \dots, x_n],$$

wobei d der Gesamtgrad von f ist. Ist $\mathfrak{a} \subset k[x_1, \dots, x_n]$ ein Ideal, so definieren wir dessen Homogenisierung als

$$\mathfrak{a}^\# = \langle f^\#, f \in \mathfrak{a} \rangle.$$

Man beachte dabei, dass die Homogenisierung des Produkts das Produkt der Homogenisierungen ist. Aber die Homogenisierung der Summe ist nicht die Summe der Homogenisierungen (im Allgemeinen noch nicht einmal homogen), weswegen man zur Definition von $\mathfrak{a}^\#$ sich nicht auf Idealerzeuger beschränken kann, es sei denn \mathfrak{a} ist ein Hauptideal.

Umgekehrt kann man ein homogenes (!) Polynom auch bzgl. einer der Variablen dehomogenisieren. D.h. ist g homogen, so gibt es offenbar eine Darstellung $g = x_0^\ell (g^\flat)^\#$ für ein $g^\flat \in k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ und ein $\ell \in \mathbb{N}$. Dabei ist ℓ die maximale x_0 -Potenz, die g teilt.

Als weitere Vorbereitung betrachten wir allgemein eine Methode, mit der man aus einer affinen Varietät eine projektive Varietät macht. Ist $Y \subset \mathbb{A}^n(k)$, so können wir Y oder genauer gesagt $\varphi_0^{-1}(Y) \subset U_0$ auch als Teilmenge von $\mathbb{P}^n(k)$ auffassen. Wir bezeichnen

$$\overline{Y} = \overline{\varphi_0^{-1}(Y)} \subset \mathbb{P}^n(k)$$

als den *projektiven Abschluss* von Y .

Proposition 4.6 Ist $Y = Z_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{a})$, so ist $\overline{Y} = Z_p(\mathfrak{a}^\#)$.

Beweis: Ist $P = (a_1, \dots, a_n) \in Y$, also $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ für alle $f \in \mathfrak{a}$, so ist auch $f^\#(1, a_1, \dots, a_n) = 0$, also ist $(1 : a_1 : \dots : a_n) \in Z_p(\mathfrak{a}^\#)$.

Umgekehrt ist zu zeigen, dass $Z_p(\mathfrak{a}^\#)$ die kleinste abgeschlossene Menge ist, die Y enthält. Sei also $X \supset Y$ in $\mathbb{P}^n(k)$ abgeschlossen, also $X = Z_p(\mathfrak{b})$ für ein

homogenes Ideal \mathfrak{b} . Jedes homogene Element g (also insbesondere die Erzeuger) von \mathfrak{b} schreiben wir wie oben als $g = x_0^\ell (g^b)^\#$ für ein $g^b \in k[x_1, \dots, x_n]$ und ein $\ell \in \mathbb{N}$. Nun verschwindet g auf Y , also verschwindet auch g^b auf Y , da $Y \subset U_0$ und dort $x_0 \neq 0$ ist. Also ist $g^b \in \sqrt{\mathfrak{a}}$, nach dem Nullstellensatz, oder anders gesagt, es gibt per Definition des Radikals ein m , sodass $(g^b)^m \in \mathfrak{a}$. Damit ist nach Definition der Homogenisierung von Idealen $((g^b)^m)^\# = ((g^b)^\#)^m \in \mathfrak{a}^\#$ und damit ist $g \in \sqrt{\mathfrak{a}^\#}$. Also ist $\mathfrak{b} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}^\#}$ und damit $Z_p(\mathfrak{b}) \supseteq Z_p(\sqrt{\mathfrak{a}^\#}) = Z_p(\mathfrak{a}^\#)$, was zu zeigen war. \square

Wir betrachten als Beispiel die Fermatkurve aus der Einleitung, welche durch $f_n = x_1^n + x_2^n - 1 \subset \mathbb{A}^2(k)$ ausgeschnitten wird. In diesem Fall ist die Homogenisierung $f_n^\# = x_1^n + x_2^n - x_0^n$ und der projektive Abschluss ist gerade $Z_p(f_n^\#)$. Dabei sind genau die Punkte mit $x_0 = 0$ beim Übergang zum Abschluss hinzugekommen, also die n Punkte auf $\mathbb{P}^1(k)$ mit $(\frac{x_1}{x_2})^n = -1$.

Beweis von Proposition 4.5: Es genügt, den Fall $i = 0$ zu betrachten und wir lassen diesen Index zudem weg. Die Bijektivität von φ ist klar und es bleibt zu zeigen, dass φ eine Bijektion zwischen den abgeschlossenen Mengen definiert. Diese wird durch $Y \mapsto \bar{Y}$ in der einen Richtung und $W \mapsto (W \cap U)$ gegeben. Dass dies eine Bijektion ist, folgt aus der vorangehenden Proposition sowie aus den zwei Homogenisierungsidentitäten $(f^\#)^b = f$ für $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ und $(f^b)^\# = f$ für $f \in k[x_0, x_1, \dots, x_n]$, falls x_0 nicht f teilt. \square

Auch projektiven Varietäten sind als topologische Räume noethersch und wir definieren die Dimension für projektive Varietäten dementsprechend wie zu Beginn von Abschnitt 3.

Proposition 4.7 *Es ist $\dim(\mathbb{P}^n(k)) = n$.*

Beweis: Wir zeigen dies durch Vergleich mit dem affinen Raum. Durch Abschließen der Standardkette in $\mathbb{A}^n(k)$ folgt $\dim(\mathbb{P}^n(k)) \geq n$. Sei andererseits $Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq Z_2 \subsetneq \dots \subsetneq Z_k$ eine Kette maximaler Länge abgeschlossener irreduzible Untervarietäten in $\mathbb{P}^n(k)$. Dann ist Z_0 ein Punkt, welcher in einer der affinen Standardunterräume liegt, sagen wir in U_0 . Dann besteht die Kette der $Z_j \cap U_0$ aus abgeschlossenen Untervarietäten von $U_0 \cong \mathbb{A}^n$. Da die Z_j irreduzibel sind, müssen die $Z_j \cap U_0$ dies auch sein und es gilt $Z_j = (\overline{Z_j \cap U_0})$. Also sind die Ketteninklusionen echt. Wegen $\dim(\mathbb{A}^n(k)) = n$ folgt $k \leq n$. \square

Wir kommen nun noch auf die Kompaktheit zurück. Wir können $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ auch mit der *klassischen Topologie* versehen, die wir als die Quotiententopologie der klassischen Topologie auf $\mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{C})$ definieren. Danach ist also eine Menge in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ offen, falls das Urbild unter der natürlichen Projektionsabbildung π offen ist. Die Einheitskugel in $\mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{C})$ ist kompakt und die Einschränkung von π auf die Einheitskugel ist surjektiv. Da das Bild von kompakten Mengen unter stetigen Abbildungen wieder kompakt ist, können wir für spätere Anwendungen festhalten:

Proposition 4.8 Der $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ mit der klassischen Topologie ist kompakt.

Den Nutzen solcher Kompaktheitseigenschaften projektiver Varietäten sehen wir später. Das Analogon von Kompaktheit in der Zariski-Topologie ist eine Abbildungseigenschaft und deswegen betrachten wir nun Abbildungen zwischen Varietäten.

Aufgabe 4.1 (3 Punkte)

Seien X, Y noethersche topologische Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine stetige abgeschlossene (d.h. für $U \subseteq X$ abgeschlossen ist $f(U) \subseteq Y$ abgeschlossen) Abbildung.

Zeige: Dann ist $\dim f(X) \leq \dim X$.

Aufgabe 4.2 (6 Punkte)

Seien d, n positive natürliche Zahlen und M_0, \dots, M_N alle Monome vom Grad d in den $n + 1$ Variablen x_0, \dots, x_n (d.h. $N = \binom{n+d}{n} - 1$). Dann definieren wir die d -uple Veronese-Einbettung des \mathbb{P}^n als

$$\rho_d: \mathbb{P}^n \ni p \mapsto (M_0(p) : \dots : M_N(p)) \in \mathbb{P}^N.$$

- (a) Sei $\rho_3(\mathbb{P}^1) = \mathcal{C} \subset \mathbb{P}^3$ das Bild der 3-uple Veronese Einbettung. Wir nennen \mathcal{C} die *getwistete Kubik*. Gib Erzeuger des Verschwindungsideals $I(\mathcal{C}) \subset k[x_0, x_1, x_2, x_3]$ an und zeige $\dim \mathcal{C} = 1$.

Hinweis: Betrachte zunächst die Abbildung

$$\theta: k[y_0, \dots, y_3] \rightarrow k[x_0, x_1], \quad y_i \mapsto M_i$$

und zeige, dass $Z(\text{Kern } \theta) = \text{Bild } \rho_3$ ist.

- (b) Sei $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ eine r -dimensionale projektive Varietät. Wir nennen Y einen *vollständigen Durchschnitt*, falls $I(Y)$ durch $n - r$ Elemente erzeugt werden kann. Wir nennen Y einen *mengentheoretischen vollständigen Durchschnitt*, falls Y als Durchschnitt von $n - r$ Hyperflächen geschrieben werden kann.

Nun sei $X = Z(\mathfrak{a}) \subset \mathbb{P}^n$ und \mathfrak{a} sei durch q Elemente erzeugbar. Zeige, dass $\dim X \geq n - q$ ist. Zeige außerdem, dass jeder vollständige Durchschnitt ein mengentheoretischer vollständiger Durchschnitt ist.

- (c) Sei $X = \mathcal{C} \cap U_0 \subset \mathbb{A}^3$ die Dehomogenisierung in x_0 . Finde Hyperflächen $H_1, H_2 \subseteq \mathbb{A}^3$, sodass $X = H_1 \cap H_2$ ein vollständiger Durchschnitt ist.
- (d) Seien nun $H_1 = Z(y_0 y_2 - y_1^2)$ und $H_2 = Z(y_2(y_1 y_3 - y_2^2) - y_3(y_0 y_3 - y_1 y_2))$.

Zeige: \mathcal{C} ist der mengentheoretische vollständige Durchschnitt von H_1 und H_2 , aber \mathcal{C} ist kein vollständiger Durchschnitt. Zeige dafür, dass sich $I(\mathcal{C})$ nicht von zwei Elementen erzeugen lässt.

Hinweis: Welche k -Dimensionen haben die k -Vektorräume der Monome verschiedenen Grades?

Aufgabe 4.3 (2 Punkte)

Sei k ein Körper, dessen Charakteristik nicht 2 ist.

Zeige: Der Kreis $Z(x^2 + y^2 - 1) \subset \mathbb{A}_k^2$ ist irreduzibel.

Hinweis: Eisenstein-Kriterium.

Aufgabe 4.4 (5 Punkte)

Für ganze Zahlen $n \leq m$ definieren wir die *Segre-Einbettung*

$$\Psi: \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \ni (a_0 : \dots : a_n) \times (b_0 : \dots : b_m) \rightarrow (a_0 b_0 : a_0 b_1 : \dots : a_n b_m) \in \mathbb{P}^N,$$

d.h. $N = mn + m + n$, wobei die Koordinaten im \mathbb{P}^N in lexikographischer Ordnung stehen.

-
- (a) Gib ein Ideal $\mathfrak{a} \subset k[w, x, y, z]$ an, sodass $Q = Z(\mathfrak{a})$ die Segre-Einbettung von $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ in \mathbb{P}^3 ist.

Hinweis: Betrachte den Kern des Ringhomomorphismus

$$k[\{z_{ij}\}] \rightarrow k[x_0, x_1, y_0, y_1], \quad z_{ij} \mapsto x_i y_j.$$

- (b) Eine Gerade ist eine Kurve, die von Polynomen von Grad 1 ausgeschnitten wird. Zeige, dass Q zwei Familien von Geraden, $\{L_t\}$ und $\{M_t\}$ enthält, $t \in \mathbb{P}^1$, sodass für $t \neq u$ gilt $L_t \cap L_u = M_t \cap M_u = \emptyset$ und für beliebige $t, u \in \mathbb{P}^1$ die Schnittmenge $M_t \cap L_u$ aus genau einem Punkt besteht.

5 Morphismen

Affine und projektive Varietäten sind durch Nullstellen von Polynomen gegeben. Daher ist es naheliegend, auch als Morphismen nur Abbildungen zuzulassen, die in geeigneter Weise durch Polynome gegeben sind. Die Definition verwendet dabei zum Einen, dass wir Morphismen in eine ganz spezielle affine Varietät implizit schon definiert haben, da $\mathbb{A}^1(k) = k$ ist und ein Polynom auf einer affinen Varietät Y gerade Werte in k annimmt. Da der Wert eines Polynoms auf Y nicht von der Klasse modulo $I(Y)$ abhängt, haben wir den Kandidaten für Abbildungen nach $\mathbb{A}^1(k) = k$ bereits gesehen, es ist der affine Koordinatenring.

Allerdings ist das Kriterium 'ist ein Polynom' im Allgemeinen schwer zu überprüfen, da es eine globale Eigenschaft ist, also eine die auf der ganzen Varietät zu testen ist. Zum Vergleich ist in der Analysis der Begriff einer stetigen oder differenzierbaren Funktion durch Eigenschaften gegeben, die man für jeden Punkt lokal, d.h. in einer Umgebung des Punktes überprüfen kann. Daher beginnt die Definition im allgemeinen auch mit Morphismen auf offenen Mengen.

Sei V eine quasi-affine Varietät in $\mathbb{A}^n(k)$. Eine Funktion $f : V \rightarrow k$ ist *regulär im Punkt P* , falls es eine Umgebung U von P und Elemente $g, h \in k[x_1, \dots, x_n]$ gibt, wobei h auf U nicht verschwindet, sodass $f = g/h$ auf U . Eine Funktion $f : V \rightarrow k$ ist *regulär*, falls sie in jedem Punkt von V regulär ist. Die Menge der regulären Funktionen auf U bildet offenbar eine k -Algebra, die wir mit $\mathcal{O}_X(U)$ bezeichnen.

Als Beispiel, dass es nicht immer eine globale polynomiale Darstellung gibt, betrachten wir $X = Z(x_1 x_4 - x_2 x_3)$ und

$$V = \{x_2 \neq 0 \text{ oder } x_4 \neq 0\} \subset X$$

sowie die Abbildung

$$\varphi : V \rightarrow k, \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto \begin{cases} x_1/x_2, & \text{falls } x_2 \neq 0, \\ x_3/x_4, & \text{falls } x_4 \neq 0. \end{cases}$$

Diese ist wohldefiniert, da $\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_3}{x_4}$, und per Definition regulär. Keine der beiden Quotienten deckt jeden Punkt ab, was man an den Punkten $(0, 0, 0, 1)$ und $(0, 1, 0, 0)$ sieht. Dass es wirklich keine globalen Quotienten gibt, prüfen wir am Ende des Abschnitts nach.

Lemma 5.1 *Der Nullstellenort einer regulären Funktion ist abgeschlossen. Insbesondere ist eine reguläre Funktion f auf V eine stetige Abbildung $f : V \rightarrow \mathbb{A}^1(k)$, versehen mit der Zariski-Topologie.*

Beweis: Per Definition gibt es zu jedem Punkt P eine Darstellung $f = g_P/h_P$ auf einer Umgebung U_P von P . Die Menge $W_P = U_P \setminus Z(g_P)$ ist offen in V und die Vereinigung $\cup_{P \in V} W_P$ ist offen und gerade die Menge der Punkte, an denen f nicht verschwindet. Also ist der Verschwindungsort abgeschlossen. \square

Wir sehen nun das erste Beispiel, dass algebraische Geometrie mehr mit Funktionentheorie gemeinsam hat als mit Differentialgeometrie im \mathbb{R}^n .

Lemma 5.2 *Seien V eine irreduzible, quasi-affine Varietät und f_1 und f_2 zwei reguläre Funktionen. Ist $U \subset V$ eine offene Menge mit $f_1|_U = f_2|_U$, so ist $f_1 = f_2$.*

Das Pendant dazu ist offenbar der Identitätssatz für holomorphe Funktionen.

Beweis: Der Nullstellenort von $f_1 - f_2$ ist abgeschlossen nach dem vorigen Lemma und enthält U nach Voraussetzung, also auch \overline{U} . Da V irreduzibel und U offen ist, folgt aus der Darstellung $V = \overline{U} \cup (V \setminus U)$, dass $\overline{U} = V$ ist. \square

Den allgemeinen Abbildungsbegriff führen wir auf den Funktionsbegriff zurück. Seien nun also X und Y zwei quasi-projektive Varietäten (was den Fall affiner, quasi-affiner und projektiver Varietäten per Definition beinhaltet). Dann ist $\varphi : X \rightarrow Y$ ein algebraischer Morphismus, falls f stetig bzgl. der Zariski-Topologien auf X und Y ist und falls für jede offene Teilmenge $V \subset Y$ und jede reguläre Funktion $f : V \rightarrow k$ die Verkettung $f \circ \varphi$ eine reguläre Funktion von $\varphi^{-1}(V)$ nach k ist.

Diese Definition ist hervorragend geeignet um allgemeine Eigenschaften nachzurechnen, weniger gut um tatsächlich nachzuprüfen, ob eine Abbildung ein algebraischer Morphismus ist. Dies erledigt man am besten mit dem Kriterium in Proposition 5.3 unten. Andererseits sieht man an der Definition direkt, dass die Verkettung zweier Morphismen wieder ein Morphismus ist. Wir sagen, dass X und Y *isomorph* sind, falls es Morphismen $\varphi : X \rightarrow Y$ und $\psi : Y \rightarrow X$ mit $\varphi \circ \psi = \text{id}_Y$ und $\psi \circ \varphi = \text{id}_X$ gibt.

Wir untersuchen nun die Konsequenzen der Morphismendefinition für affine Varietäten.

Proposition 5.3 Sei U eine quasi-projektive Varietät und $Y \subset \mathbb{A}^n(k)$ eine affine Varietät. Dann sind die Morphismen $\varphi : U \rightarrow Y$ genau die Abbildungen, die eine Darstellung der Form $\varphi = (f_1, \dots, f_n)$ mit $f_i \in \mathcal{O}_X(U)$ zulassen.

Beweis: Für jeden Index i ist die i -te Koordinatenfunktion auf $\mathbb{A}^n(k)$ und damit auf Y eine reguläre Funktion und damit ist f_i , die Verkettung von φ mit solch einer Koordinatenfunktion in $\mathcal{O}_X(U)$.

Umgekehrt sei $\varphi = (f_1, \dots, f_n)$ wie oben. Dann ist zunächst zu zeigen, dass φ stetig ist. Dazu betrachten wir eine abgeschlossene Teilmenge der Form $Z = Z(g_1, \dots, g_s)$ für gewisse $g_j \in A(Y)$. Dann ist

$$\varphi^{-1}(Z) = \{P \in X : g_j(f_1(P), \dots, f_n(P)) = 0 \text{ für } j = 1, \dots, s\}.$$

Die wesentliche Beobachtung ist, dass das Einsetzen von Quotienten von Polynomen in einen Quotient von Polynomen nach Ausmultiplizieren wieder ein Quotient von Polynomen ist. Ein solcher Quotient verschwindet genau dann wenn der Zähler verschwindet. Daher ist $\varphi^{-1}(Z)$ wieder abgeschlossen und φ stetig.

Die gleiche Beobachtung über das Einsetzen in Quotienten von Polynomen liefert auch die zweite definierende Eigenschaft eines Morphismus. \square

Das Problem der Nichtexistenz einer globalen Darstellung als Quotient zweier Polynome tritt für eine große Klasse von quasi-affinen Varietäten nicht auf. Dazu sei X eine irreduzible affine Varietät und $f \in A(X)$. Eine Menge der Form

$$D(f) = X \setminus Z(f)$$

wir den *Nichtverschwindungsort* von f . Diese Nichtverschwindungsorte bilden eine sehr nützliche Überdeckung von X . Zudem ist der Durchschnitt von endlich vielen solchen Nichtverschwindungsorten wieder ein Nichtverschwindungsort (vom Produkt der Polynome) und jede offene Menge U ist Vereinigung von endlich vielen Nichtverschwindungsorten (denn ist $U = X \setminus Z(f_1, \dots, f_n)$, so ist $U = D(f_1) \cup \dots \cup D(f_n)$). Man sagt aufgrund dieser Eigenschaften auch, dass die Nichtverschwindungsorte eine *Basis* der Zariski-Topologie bilden. Wir bestimmen nun reguläre Funktionen auf Nichtverschwindungsorten in affinen Varietäten.

Proposition 5.4 Ist X eine affine Varietät und $f \in A(X)$, dann ist

$$\mathcal{O}_X(D(f)) = \left\{ \frac{g}{f^n} : g \in A(X), n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Insbesondere ist $\mathcal{O}_X(X) = A(X)$, also sind reguläre Funktionen auf affinen Varietäten genau die Polynomfunktionen.

Beweis: Dass die rechte Seite in der linken enthalten ist, folgt unmittelbar aus der Definition. Interessanter ist die umgekehrte Inklusion. Sei $\varphi : D(f) \rightarrow k$ regulär. Per Definition hat man für jeden Punkt $P \in D(f)$ eine Darstellung der Form $\varphi = \frac{g_P}{f_P}$ auf einer Umgebung U_P von P . Wir verwenden die vorangehende Bemerkung und schreiben die U_P als Vereinigung von Nichtverschwindungsorten. In einer dieser Teilmengen liegt der Punkt P und daher können wir von vorne herein annehmen, dass $U_P = D(h_P)$ ist. Da f_P auf U_P nicht verschwindet, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $U_P = D(f_P)$ ist (indem wir f_P mit $f_P h_P$ und g_P mit $g_P h_P$ ersetzen).

Nun verwenden wir, dass die Funktionen auf den Überlappungsbereichen übereinstimmen. Also ist $g_P f_Q = g_Q f_P$ für jedes Punktpaar $P, Q \in D(f)$. Da $Z(f) = \bigcap_{P \in D(f)} D(f_P) = Z(\{f_P, P \in D(f)\})$ ist

$$f \in I(Z(f)) = I(Z(\{f_P, P \in D(f)\})) = \sqrt{\langle \{f_P, P \in D(f)\} \rangle}$$

nach dem Nullstellensatz. Also gibt es ein n , sodass

$$f^n = \sum_{P \in D(f)} a_P f_P$$

wobei in dieser Summe nur endlich viele Koeffizienten a_P von Null verschieden sind. Wir setzen nun $g = \sum_{P \in D(f)} a_P g_P$ und behaupten, dass $\varphi = \frac{g}{f^n}$. Dazu prüfen wir, dass für $Q \in D(f)$, wo die Abbildung ursprünglich durch $\varphi = \frac{g_Q}{f_Q}$ gegeben war, die Definitionen übereinstimmen. Dies folgt aus

$$g f_Q = \sum_{P \in D(f)} a_P g_P f_Q = \sum_{P \in D(f)} a_P f_P g_Q = g_Q f^n$$

aufgrund der Übereinstimmung in den Überlappungsbereichen. \square

Korollar 5.5 Die Homomorphismen von einer quasi-projektiven Varietät X in eine affine Varietät Y entsprechen bijektiv den k -Algebra-Homomorphismen von $A(Y)$ nach $\mathcal{O}_X(X)$.

Beweis: Ist φ ein Morphismus, so ist nach Definition die Verkettung von $f \in \mathcal{O}_Y(Y)$ mit φ ein Element von $\mathcal{O}_X(X)$. Da $A(Y) = \mathcal{O}_Y(Y)$ nach Proposition 5.4 definiert dies eine Richtung der Bijektion.

Sei umgekehrt $h : A(Y) \rightarrow \mathcal{O}_X(X)$ ein k -Algebra-Homomorphismus. Wir schreiben $A(Y) = k[x_1, \dots, x_n]/I(Y)$ und definieren $\xi_i = h(x_i) \in \mathcal{O}_X(X)$. Das Tupel (ξ_1, \dots, ξ_n) definiert also einen Morphismus $\varphi_0 : X \rightarrow \mathbb{A}^n(k)$. Wir wollen zeigen, dass das Bild von φ_0 in $Y = Z(I(Y))$ liegt. Dazu rechnen wir nach, dass $f(\varphi_0(P)) = 0$ für jedes $f \in I(Y)$ und jeden Punkt $P \in X$. Es ist

$$f(\varphi_0(P)) = f(h(x_1), \dots, h(x_n))(P) = h(f(x_1, \dots, x_n))(P) = 0$$

aufgrund der Homomorphie.

Der Nachweis, dass diese Zuordnungen zueinander invers sind, überlassen wir dem Leser. \square

Aufgabe 5.1 (4 Punkte)

Sei $X = \mathbb{A}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Zeige: X ist keine affine Varietät.

Hinweis: Was ist $A(X)$?

Bisher haben wir reguläre Funktionen und Morphismen auf affinen Varietäten und ihren offenen Teilmengen untersucht. Wir vergleichen dies nun mit dem projektiven Fall. Wir benötigen die Notationen $S_{(\mathfrak{p})}$ und $S_{(f)}$ für einen homogenen Ring S und ein homogenes Primideal \mathfrak{p} bzw. ein homogenes Element $0 \neq f \in S$, die jeweils den Unterring von Elementen vom Grad Null in der Lokalisierung $S_{\mathfrak{p}}$ bzw. in der Lokalisierung S_f bezeichnet.

Proposition 5.6 *Ist Y eine projektive Varietät, so ist $\mathcal{O}_Y(Y) = k$.*

Beweis: Sei $Y \subset \mathbb{P}^n(k)$ und seien $Y_i = Y \cap U_i$ die Schnitte mit der Standardüberdeckung. Wir betrachten als Vorbemerkung den Isomorphismus

$$\varphi_i^* : k[y_1, \dots, y_n] \rightarrow k[x_0, \dots, x_n]_{(x_i)}, \quad f(y_1, \dots, y_n) \mapsto f\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right),$$

wobei im letzten Argument die i -te Koordinate weggelassen wurde. Diese Abbildung schickt (siehe Aufgabe 5.2) $I(Y_i)$ auf $I(Y)k[x_0, \dots, x_n]_{(x_i)}$, das Bild des Verschwindungsideals im bei x_i lokalisierten Ring. Daher erhält man einen Isomorphismus

$$\varphi_i^* : A(Y_i) \rightarrow S(Y)_{(x_i)} \tag{5.1}$$

zwischen den Quotienten.

Sei nun $f \in \mathcal{O}_Y(Y)$ regulär, also insbesondere regulär auf den Untervarietäten Y_i . Wir können dort die reguläre Funktion als $f = g_i/x_i^{N_i}$ schreiben, wobei g_i homogen vom Grad N_i ist. Also ist $x_i^{N_i}f \in S(Y)_{N_i}$. Wir wählen nun $N \geq \sum_{i=1}^n N_i$ und beobachten, dass $S(Y)_N$ von Monomen vom Gesamtgrad N aufgespannt wird. Jedes solche Monom ist durch $x_i^{N_i}$ für ein i teilbar. Daher ist also $S(Y)_N f \subseteq S(Y)_N$ und durch Wiederholen des Arguments $S(Y)_N f^q \subseteq S(Y)_N$ für alle $q \in \mathbb{N}$. Dies aber bedeutet, $x_0^N f^q \in S(Y)_N$ für alle $q \in \mathbb{N}$ und daher, dass der Unterring $S(Y)[f]$ von $\text{Quot}(S(Y))$ in $x_0^{-N}S(Y)$ liegt. Nun ist $x_0^{-N}S(Y)$ ein endlich erzeugter $S(Y)$ -Modul und damit ist auch $S(Y)[f]$ ein endlich erzeugter $S(Y)$ -Modul, da $S(Y)$ noethersch ist. Dies bedeutet, dass f ganz über $S(Y)$ ist, d.h. dass es $a_1, \dots, a_m \in S(Y)$ gibt, sodass

$$f^m + a_1 f^{m-1} + \dots + a_m = 0.$$

Da f Grad Null hat, können wir die a_i durch ihren Grad-Null-Anteil ersetzen und die Gleichung stimmt immer noch. Da aber $S(Y)_0 = k$ ist, folgt, dass f eine algebraische Gleichung über k erfüllt. Da k algebraisch abgeschlossen ist, folgt die Behauptung. \square

Aufgabe 5.2 (4 Punkte)

Sei Y eine projektive Varietät und $S(Y)$ der projektive Koordinatenring.

Zeige: Es gilt $\dim S(Y) = \dim Y + 1$.

Hinweis: Verwende die Überdeckung des \mathbb{P}^n durch affine Standardräume.

Beweis der Nichtexistenz einer globalen Darstellung von φ auf einer offenen Teilmenge von $X = Z(x_1x_4 - x_2x_3)$: Nach Definition ist die offene Teilmenge $V = D(x_2) \cup D(x_4) \subset X$. Angenommen $\varphi = F/G$ ist eine Darstellung als globaler Quotient zweier Elemente $F, G \in A(X)$. Nach Proposition 5.4 ist diese Darstellung auf $D(x_2)$ von der Form f_2/x_2^m und auf $D(x_4)$ von der Form f_4/x_4^n . Der Ring $A(X)$ ist nullteilerfrei, da $x_1x_4 - x_2x_3$ nach dem Eisenstein-Kriterium irreduzibel ist. Daher folgt, dass entweder $G = 1$ ist oder, dass $x_2|G$ und $x_4|G$. Der zweite Fall ist absurd, da G dann nicht auf ganz V von Null verschieden ist. Und der erste Fall impliziert $x_1/x_2 = F$, also $x_1 - x_2F = 0$ in $A(X)$. Mit anderen Worten, es gibt $h \in R = k[x_1, x_2, x_3, x_4]$ mit der Eigenschaft, dass

$$x_1 - x_2F = h(x_1x_4 - x_2x_3).$$

Setzt man in dieser Gleichung $x_2 = 0$, so sieht man, dass das unmöglich ist. \square

Aufgabe 5.3 (4 Punkte)

Seien R ein kommutativer Ring mit 1 und S eine R -Algebra. Ein Element $s \in S$ heißt *ganz über R* , falls es ein normiertes Polynom

$$f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in R[x]$$

gibt, so dass $f(s) = 0$.

(a) Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) $s \in S$ ist ganz über R .
- (ii) $R[s]$ ist ein endlich erzeugter R -Modul (hierbei ist $R[s]$ die kleinste R -Unteralgebra von S , die s enthält).
- (iii) Es gibt einen Teilring $T \subset S$, so dass $R[s] \subset T$ und T als R -Modul endlich erzeugt ist.

Hinweis: Satz von Cayley-Hamilton.

(b) Sei $T \subset S$ die Menge der Elemente, die über R ganz sind.

Zeige: T ist ein Teilring von S .

Aufgabe 5.4 (4 Punkte)

Sei $H \cong \mathbb{P}^n$ eine Hyperebene in \mathbb{P}^{n+1} und sei $p \in \mathbb{P}^{n+1} \setminus H$. Wir definieren eine Abbildung

$$\varphi: \mathbb{P}^{n+1} \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{P}^n, \quad q \mapsto \overline{pq} \cap H.$$

Dabei bezeichnet \overline{pq} die Gerade durch die Punkte p und q im \mathbb{P}^{n+1} .

(a) Zeige, dass φ ein Morphismus von Varietäten ist.

(b) Sei X nun die getwistete Kubik, also

$$X = \{(x : y : z : w) = (t^3 : t^2u : tu^2 : u^3), (t : u) \in \mathbb{P}^1\} \subset \mathbb{P}^3.$$

Sei außerdem $p = (0 : 0 : 1 : 0)$ und $H = V(z)$.

Zeige, dass $\varphi(X)$ durch ein kubisches Polynom im \mathbb{P}^2 ausgeschnitten wird und gib dessen Gleichung an.

6 Rationale Abbildungen

Im vorigen Abschnitt haben wir Morphismen definiert. Hier definieren wir eine weitere Art von Morphismen, die rationalen Abbildungen, indem wir nur einen Morphismus auf einer offenen Teilmenge verlangen. Da bei irreduziblen Varietäten offene Mengen dicht liegen, enthält eine rationale Abbildung viele Informationen über die Varietät, wie wir es in der nächsten Proposition festhalten. Damit gibt es in der algebraischen Geometrie zwei Äquivalenzbegriffe, nach denen man mit Varietäten klassifizieren kann, die Isomorphie aus dem letzten Abschnitt und birationale Äquivalenz, wie wir weiter unten definieren. Wir werden anhand von Aufblasungen sehen, dass die beiden Begriffe in der Tat verschieden sind.

Proposition 6.1 *Seien X und Y zwei quasi-projektive Varietäten und X irreduzibel. Sind φ und $\psi : X \rightarrow Y$ zwei Morphismen, sodass es eine offene Menge $U \subset X$ gibt mit $\varphi|_U = \psi|_U$. Dann ist $\varphi = \psi$.*

Das Argument ist ähnlich zu dem in Lemma 5.2.

Beweis: Wir betrachten $\iota : Y \times Y \rightarrow \mathbb{P}^n(k) \times \mathbb{P}^n(k)$, welchen wir vermöge der Segre-Einbettung aus Aufgabe 4.4 in einen projektiven Raum einbetten. Damit ist $Y \times Y$ eine quasi-projektive Untervarietät und die Komposition $\iota \circ (\varphi \times \psi)$ ein Morphismus. Die Diagonale $\Delta \subset \mathbb{P}^n(k) \times \mathbb{P}^n(k)$ wird durch die Gleichungen $x_i y_j - y_i x_j = 0$ für $i, j = 0, \dots, n$ ausgeschnitten und ist somit eine abgeschlossene Untervarietät von $\mathbb{P}^n(k) \times \mathbb{P}^n(k)$. Nach Voraussetzung ist $\iota \circ (\varphi \times \psi)(U \times U) \subset \Delta$ und $U \times U$ ist dicht in $X \times X$, da X irreduzibel ist. Damit $\iota \circ (\varphi \times \psi)(X \times X)$ im Abschluss von Δ , also in Δ selbst enthalten. \square

Seien X und Y quasi-projektive Varietäten. Dann ist eine *rationale Abbildung* eine Äquivalenzklasse von Paaren (U, φ_U) bestehend aus einer offenen und dichten Teilmenge $U \subseteq X$ und einem Morphismus $\varphi_U : U \rightarrow Y$ bezüglich folgender Relation. Zwei Paare (U, φ_U) und (V, φ_V) sind äquivalent, falls die beiden Morphismen auf $U \cap V$ übereinstimmen. Eine rationale Abbildung wird *dominant* genannt, falls das Bild $\varphi_U(U)$ von einem Vertreter (U, φ_U) dicht in Y ist.

Dabei beachte man, dass diese Relation in der Tat eine Äquivalenzrelation ist und dass der Begriff der Dominanz nicht vom gewählten Vertreter abhängt. Die Verkettung von dominanten rationalen Abbildungen ist wieder eine dominante rationale Abbildung. Damit bilden auch die quasi-projektiven Varietäten eine Kategorie. Isomorphismen in dieser Kategorie werden *birationale Abbildungen* genannt.

Im letzten Abschnitt haben wir in Korollar 5.5 die Äquivalenz der Kategorien von affinen Varietäten mit Morphismen zur (oppositen) Kategorie der k -Algebren mit k -Algebrenhomomorphismen bewiesen. In diesem Abschnitt wollen wir eine Kategorienäquivalenz von quasi-projektiven Varietäten mit

rationalen Abbildungen zur (oppositen) Kategorie der endlich erzeugten Körpererweiterungen von k zeigen. Der Grund für das Auftreten von Körpererweiterungen sind die rationalen Abbildungen nach k .

Proposition 6.2 *Sei Y eine irreduzible quasi-projektive Varietät. Die rationalen Abbildungen $Y \rightarrow k$ bilden einen Körper, den Funktionenkörper $K(Y)$ von Y .*

Ist Y affin, so ist $K(Y) = \text{Quot}(A(Y))$, eine endlich erzeugte Erweiterung von k vom Transzendenzgrad $\dim(Y)$.

Ist Y projektiv, so ist $K(Y) = S(Y)_{((0))}$.

Beweis: Zunächst bilden die rationalen Abbildungen $Y \rightarrow k$ einen Ring, indem man die Summe und das Produkt auf dem Durchschnitt der Definitionsbereiche der einzelnen Summanden (Faktoren) definiert. Ist $0 \neq f : Y \rightarrow k$ rational, also definiert auf einer offenen Menge U , dann ist $1/f$ regulär auf $V = U \cap D(f)$.

Für die zweite Aussage ist nur zu bemerken, dass jede Abbildung auf U sich auf kleineren offenen Mengen $U \cap D(f)$ in der Form g/f^n , also als ein Element von $K(Y)$ schreiben lässt und das umgekehrt jedes Element $g/h \in K(Y)$ eine rationale Abbildung $(D(h), g/h)$ definiert. Da $A(Y)$ eine endlich erzeugte k -Algebra ist, ist der zugehörige Quotientenkörper auch endlich erzeugt über k . Die Dimensionsaussage folgt dann unmittelbar aus Satz 3.3.

Für die letzte Aussage verwenden wir, dass eine rationale Abbildung (V, φ_V) stets auch eine Abbildung $(V \cap U_i, \varphi_V|_{V \cap U_i})$ auf einer affinen Standardkarte von \mathbb{P}^n für ein geeignetes i definiert. Damit ist diese eine rationale Abbildung auf $Y \cap U_i$, also ein Element von $K(Y \cap U_i)$. Man rechnet nach, dass dieser Funktionenkörper via φ_i^* zu $S(Y)_{((0))}$ isomorph ist. \square

Bevor wir zur Kategorienäquivalenz kommen, beweisen wir zwei Hilfsaussagen, die zeigen, dass es 'viele affine Varietäten' gibt.

Lemma 6.3 *Sei $V = D(f) \subset \mathbb{A}^n$ für ein $f \in k[x_1, \dots, x_n]$. Dann ist V affin, gegeben als $Z(H) \subset \mathbb{A}^n$, wobei $H = x_{n+1}f - 1$ ist. Insbesondere ist $A(V) = k[x_1, \dots, x_n]_{(f)}$.*

Beweis: Die Abbildung ordnet in der einen Richtung $P = (a_1, \dots, a_{n+1})$ den Punkt $\varphi(P) = (a_1, \dots, a_n)$ zu. Umgekehrt sei $\psi(a_1, \dots, a_n, 1/f(a_1, \dots, a_n))$. Diese Abbildungen sind offenbar zueinander invers und aufgrund von Proposition 5.3 auch Morphismen. Die letzte Aussage folgt dann aus Proposition 5.4. \square

Lemma 6.4 *In jeder quasi-projektiven Varietät Y bilden die affinen Untervarietäten eine Basis der Topologie, d.h. zu jedem Punkt $P \in Y$ und jeder Umgebung U von P gibt es eine affine offene Menge V mit $P \in V \subseteq U$.*

Beweis: Es genügt ohne Einschränkung den Fall $P \in U = Y$ zu betrachten. Mit Hilfe der Standardüberdeckung von \mathbb{P}^n sieht man sofort, dass Y von quasi-affinen Varietäten überdeckt ist, also ohne Einschränkung sei Y quasi-affin. Daher ist $Z = \overline{Y} \setminus Y$ eine affine Varietät, also $Z = Z(\mathfrak{a}) \subset \mathbb{A}^n(k)$. Da $P \notin Z$ gibt es ein $f \in \mathfrak{a}$ mit $f(P) \neq 0$. Sei also $H = Z(f) \supseteq Z$. Dann ist $P \in Y \setminus Y \cap H$. Dies ist eine abgeschlossene Untervarietät von $\mathbb{A}^n(k) \setminus H$ und somit affin, nach dem vorangehenden Lemma. Damit haben wir die gesuchte affine Umgebung von P gefunden. \square

Damit können wir das angekündigte Ziel beweisen.

Satz 6.5 *Die Kategorien bestehend aus*

- i) birationalen Äquivalenzklassen irreduzibler quasi-projektiven Varietäten zusammen mit dominanten rationalen Abbildungen, und*
- ii) endlich erzeugte Körpererweiterungen von k zusammen mit k -Algebrenhomomorphismen,*

sind pfeilumkehrend zueinander äquivalent.

Beweis: Sei $\varphi : X \rightarrow Y$ eine dominante rationale Abbildung, repräsentiert durch (U, φ_U) . Dann definieren wir $\varphi^* : K(Y) \rightarrow K(X)$ wie folgt. Sei $f \in K(Y)$ repräsentiert durch (V, f_V) , so setzen wir $\varphi^*(f) = (W, f_V \circ \varphi_U|_W)$, wobei $W = U \cap \varphi^{-1}(V)$ in der Tat eine offene Teilmenge von X und aufgrund der Dominanz von φ auch nichtleer ist.

Sei umgekehrt ein k -Algebrenhomomorphismus $\theta : K(Y) \rightarrow K(X)$ gegeben. Wir wollen eine dominante rationale Abbildung $\varphi : X \rightarrow Y$ konstruieren, sodass $\varphi^* = \theta$ ist. Da nach dem vorigen Lemma Y von affinen Varietäten überdeckt ist, eine davon dicht und zur Konstruktion von φ können wir annehmen, dass Y selbst affin ist. Sei also $A(Y)$ der affine Koordinatenring, erzeugt von y_1, \dots, y_n . Dann sind $\theta(y_1), \dots, \theta(y_n)$ rationale Funktionen auf X . Da X irreduzibel ist, gibt es eine offene dichte Menge, auf der diese gemeinsam definiert sind. Damit liefert θ einen k -Algebrenhomomorphismus $\theta_U : A(Y) \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$. Wir verwenden nun Korollar 5.5 und folgern, dass dies eine Abbildung $\varphi_U : U \rightarrow Y$ definiert. Dass diese Zuordnungen zueinander invers sind, führt man auf den affinen Fall zurück.

Der Satz enthält auch noch die Behauptung, dass endlich erzeugte Körper K stets die Funktionenkörper von affinen Varietäten sind. Um dies zu zeigen, nehmen wir Erzeuger y_1, \dots, y_n von K her. Es sei B die von diesen Erzeugern aufgespannte k -Algebra. Diese ist Quotient eines Polynomrings in n Erzeugern, also der Koordinatenring einer affinen Varietät $Y \subset \mathbb{A}^n(k)$. Der Funktionenkörper von Y ist der Quotientenkörper von B , damit offenbar in K enthalten und in der Tat gleich K , da die y_1, \dots, y_n als Erzeuger gewählt waren. \square

Als unmittelbares Korollar davon stellt man fest, dass die zwei irreduziblen quasi-projektiven Varietäten birational äquivalent zueinander sind, ge-

nau dann wenn sie offene Teilmengen haben, die zueinander isomorph sind oder genau dann, wenn ihre Funktionenkörper zueinander isomorph sind.

Aufgabe 6.1 (2 Punkte)

Wir definieren die *Cremona-Transformation* $\varphi: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ durch

$$(a_0 : a_1 : a_2) \mapsto (a_1 a_2 : a_0 a_2 : a_0 a_1),$$

falls je zwei Koordinaten nicht null sind.

- (a) Zeige, dass φ birational und selbstinvers ist.
- (b) Finde offene Teilmengen $U, V \subset \mathbb{P}^2$, so dass $\varphi|_U$ ein Isomorphismus auf V ist.

Aufgabe 6.2 (4 Punkte)

Zeige, dass das Bild der Segre-Einbettung von $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ in \mathbb{P}^3 birational äquivalent aber nicht isomorph zu \mathbb{P}^2 ist.

Hinweis: Zeige zunächst, dass $\mathbb{P}^2 \setminus Z(f)$ immer affin ist und sich daher je zwei Kurven in \mathbb{P}^2 schneiden.

Aufgabe 6.3 (6 Punkte)

- (a) Zeige: $Z(y^2 - x^3) \subseteq \mathbb{A}^2$ ist birational aber nicht isomorph zu \mathbb{A}^1 .
Hinweis: Zeige: Einer der Koordinatenringe ist nicht in seinem Quotientenkörper ganz abgeschlossen.
- (b) Zeige: $Z(y^2 z - x^2(x+z)) \subseteq \mathbb{P}^2$ ist birational zu \mathbb{P}^1 .
Hinweis: Verwende die Projektion von $(0 : 0 : 1)$ auf $Z(z)$.
- (c) Sei $n > 2$. Zeige: Die Fermat-Kurve $Z(z^n - y^n - x^n)$ ist *nicht* birational zu \mathbb{P}^1 .
Hinweis: Zeige zunächst: Es gibt keine nichtkonstante Lösung $f(t)^n + g(t)^n = h(t)^n$ mit $f, g, h \in \mathbb{C}[t]$ teilerfremd. Nimm an, es gäbe eine solche Lösung und diese sei von minimalem Grad. Verwende, dass $\mathbb{C}[t]$ ein Hauptidealring ist und es eine Zerlegung

$$h(t)^n - g(t)^n = \prod_{i=1}^n (h(t) - \zeta^i g(t)), \quad \zeta \text{ primitive } n\text{-te Einheitswurzel,}$$

gibt, um zu zeigen, dass jedes $h(t) - \zeta^i g(t)$ bereits eine n -te Potenz ist und konstruiere so eine Lösung der ursprünglichen Gleichung von kleinerem Grad.

Wir kommen nun zum ersten wichtigen Beispiel eines Morphismus, der eine birationale Abbildung, aber keinen Isomorphismus definiert, die *Aufblasungen*. Zur Motivation betrachten wir drei Kurven in $\mathbb{A}^2(k)$, nämlich

$$X_1 = Z(x_1^2 + x_2), \quad X_2 = Z(x_2^2 - x_1^2 - x_1^3), \quad X_3 = Z(x_2^2 - x_1^3). \quad (6.1)$$

Dabei ist die Kurve X_1 via $t \mapsto (t, t^2)$ offensichtlich isomorph zu $\mathbb{A}^1(k)$ isomorph, die anderen beiden Kurven sind dies nicht (Übung!). Das Problem bei den Kurven X_2 und X_3 wird an einer Zeichnung offensichtlich: X_2 hat zwei Tangenten durch 0, die Kurve X_3 eine Spitze, eine Singularität im Sinne des nächsten Abschnitts. Um zu zeigen, dass die Kurven birational zu $\mathbb{P}_t^1(k)$ kann man hier direkt die Abbildungen angeben (Übung!). Konzeptioneller gesagt, sollte man eine umgebende quasi-projektive Varietät finden, die die Tangenten der Kurven im Punkte Null trennt. Diese leistet ein Aufblasung.

Für diese Konstruktion sei $X \subset \mathbb{A}^n(k)$ eine affine Varietät und $f_1, \dots, f_s \in A(X)$ reguläre Funktionen auf X . Sei $U = X \setminus Z(f_1, \dots, f_s)$. Auf dieser Menge ist der Morphismus

$$\varphi: U \rightarrow \mathbb{P}^{s-1}(k), \quad P \mapsto (f_1(P) : f_2(P) : \dots : f_s(P))$$

wohldefiniert. Wir nennen den Abschluss des Graphen $\Gamma_\varphi \subset X \times \mathbb{P}^{s-1}(k)$ die *Aufblasung von X bei f_1, \dots, f_s* und schreiben dafür \tilde{X} . Mithilfe der Projektion auf den ersten Faktor kommt die Aufblasung immer zusammen mit einem kanonischen Morphismus $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ und manchmal bezeichnen wir auch diesen Morphismus als Aufblasung.

Die Definition als Abschluss ist nicht besonders einfach zum Rechnen. Das klärt das folgende Lemma.

Lemma 6.6 *Die Aufblasung \tilde{X} von X bei f_1, \dots, f_s erfüllt die Mengeneinklusion*

$$\tilde{X} \subseteq \{(P, y) \in X \times \mathbb{P}^{s-1}(k) : y_i f_j(P) = y_j f_i(P) \text{ für alle } (i, j)\}.$$

Beweis: Ein Punkt (P, y) auf dem Graphen von Γ_φ genügt $(y_1 : y_2 : \dots : y_s) = (f_1(P) : f_2(P) : \dots : f_s(P))$ und damit den angegebenen Gleichungen. Also gilt dies auch für einen Punkt im Abschluss von Γ_φ . \square

Wir behandeln das wichtigste Beispiel nun explizit, die Aufblasung $\tilde{\mathbb{A}}^n(k)$ von $\mathbb{A}^n(k)$ im Nullpunkt, d.h. bzgl. der regulären Funktionen x_1, \dots, x_n , welche als Nullstellenort nur den Nullpunkt gemeinsam haben. Nach dem vorigen Lemma ist

$$\tilde{\mathbb{A}}^n(k) \subseteq Y := \{(x, y) \in X \times \mathbb{P}^{n-1}(k) : y_i x_j = y_j x_i \text{ für alle } (i, j)\}$$

und wir wollen zeigen, dass dies hier eine Gleichheit ist. Dazu genügt es dies auf der offenen Menge

$$U_1 = \{(x, y) \in Y : y_1 \neq 0\} \subset \mathbb{A}^n(k) \times \mathbb{P}^{n-1}(k)$$

nachzuprüfen, denn auf den anderen Mengen der Standardüberdeckung gilt das gleiche Argument nach Umnummerieren der Koordinaten. Diese Menge U_1 ist zu $\mathbb{A}^n(k)$ isomorph, wie der Isomorphismus $\mathbb{A}^n(k) \rightarrow U_1 \subset \mathbb{A}^n(k) \times \mathbb{P}^{n-1}(k)$ gegeben durch

$$(x_1, y_2, \dots, y_n) \mapsto ((x_1, x_1 y_2, \dots, x_1 y_n), (1 : y_2 : \dots : y_n))$$

zeigt. Genau die Teilmenge mit $x_1 \neq 0$ liegt im Bild von Γ_φ und da diese in U_1 dicht liegt, gilt die behauptete Gleichheit. Aufgrund dieses Isomorphismus sind auf U_k die Funktionen x_k und x_i/x_k für $i \geq k$ affine Koordinaten.

Wir betrachten die Struktur von Aufblasungen noch genauer. Auf der offenen Menge U eingeschränkt ist π ein Isomorphismus, die Projektion des Graphen eines Morphismus auf den Definitionsbereich. Wir identifizieren somit U als Teilmenge von \tilde{X} . Das Komplement $\tilde{X} \setminus U$ wird die *exzeptionelle Menge* der Aufblasung genannt.

Wir bestimmen die exzeptionelle Menge im Fall der Aufblasung eines Punktes im $\mathbb{A}^n(k)$. Wie wir oben gesehen haben, ist genau die Menge

$$E_i = \{x_i = 0\} \subset U_i$$

nicht im Bild von φ . Da diese hier von Kodimension 1 in $\mathbb{A}^n(k)$ ist (d.h. von Dimension $n - 1$) und wir später Untervarietäten von Kodimension 1 Divisoren nennen werden, halten wir hier fest, dass im Fall der Aufblasung eines Punktes die exzeptionelle Menge ein Divisor ist, der *exzeptionelle Divisor*. Nach der obigen Definition scheint der exzeptionelle Divisor mehrere Komponenten zu haben. Dies ist aber nicht der Fall, denn $\pi^{-1}(0) = \{(0, y)\}$, wobei an $y \in \mathbb{P}^{n-1}(k)$ keine weiteren Bedingungen geknüpft sind. Der exzeptionelle Divisor ist also isomorph zu $\mathbb{P}^{n-1}(k)$ und die E_i oben sind lediglich die n Karten der Standardüberdeckung.

Die Punkte im exzeptionellen Divisor korrespondieren in der Tat zu Geraden durch den Ursprung von $\mathbb{A}^n(k)$ und damit kommen wir auf die Motivation zur Tangententrennung zurück. In der Tat ist eine Ursprungsgerade durch $x_i = a_i t$ für $t \in \mathbb{A}^1(k)$ und a_i ungleich dem Nulltupel gegeben. Das Bild davon in Γ_φ ist gegeben durch $x_i = a_i t$ und $y_i = a_i t$ für $y \neq 0$ oder äquivalent durch $x_i = a_i t$ und $y_i = a_i$ aufgrund der Homogenität. Damit sieht man sofort, dass der Abschluss der Geraden in $\widetilde{\mathbb{A}^n}(k)$ genau der Punkt $(a_1 : a_2 : \dots : a_n)$ ist.

Daran sieht man auch, dass die Aufblasung $\widetilde{\mathbb{A}^n}(k)$ mengentheoretisch die Vereinigung von $\mathbb{A}^n(0)$ und $\mathbb{P}^{n-1}(k)$, aber nicht disjunkt oder mit einem Schnitt in einer niedrigerdimensionalen Varietät, sondern $\widetilde{\mathbb{A}^n}(k)$ ist irreduzibel, da $\mathbb{A}^n(k) \setminus \{0\}$ dies ist und in $\widetilde{\mathbb{A}^n}(k)$ dicht liegt.

Wir haben eine Aufblasung allgemein für eine Kollektion f_1, \dots, f_s regulärer Funktionen eingeführt, sprechen aber im Zusammenhang mit dem obigen Beispiel von der Aufblasung des Nullpunkts. Dass dies ein legitimer Sprachgebrauch ist, d.h. das die Aufblasung bis auf Isomorphie nur vom Ideal abhängt, das von f_1, \dots, f_s erzeugt wird, zeigt folgendes Lemma.

Lemma 6.7 *Sei X affin und f_1, \dots, f_s sowie f'_1, \dots, f'_t zwei Erzeugendensysteme eines Ideals \mathfrak{a} von $A(X)$. Dann sind die Aufblasungen $\pi : \widetilde{X} \rightarrow X$ und $\pi' : \widetilde{X}' \rightarrow X$ isomorph, d.h. es gibt zueinander inverse Morphismen $\varphi : \widetilde{X} \rightarrow \widetilde{X}'$ und $\psi : \widetilde{X}' \rightarrow \widetilde{X}$ mit $\pi' \circ \varphi = \pi$ und $\pi \circ \psi = \pi'$.*

Beweis: Da beide Mengen Erzeugendensysteme von \mathfrak{a} sind, gibt es Darstellungen

$$f_i = \sum_{j=1}^t g_{ij} f'_j \quad \text{und} \quad f'_j = \sum_{k=1}^s h_{jk} f_k$$

mit geeigneten $g_{ij}, h_{jk} \in A(X)$. Wir behaupten, dass die durch

$$(P, y) \mapsto (P, y') = \left(P, \left(\sum_{k=1}^s h_{1k}(P) y_k : \dots : \sum_{k=1}^s h_{sk}(P) y_k \right) \right)$$

definierte Abbildung φ und die analog durch mit Hilfe der g_{ij} definierte Abbildung ψ die gewünschten Eigenschaften hat. \square

Wir können nun die Aufblasung \widetilde{X}_i der Kurven $X_i \subset \mathbb{A}^2$ im Nullpunkt, d.h. beim Ideal $\langle x_1, x_2 \rangle$ betrachten. Wir bezeichnen die Karten der Standardüberdeckung von $\mathbb{A}^2(k)$ hier mit $U = U_1$ und $V = V_2$, sowie mit $\widetilde{X}_i^U = \widetilde{X}_i \cap U$ und $\widetilde{X}_i^V = \widetilde{X}_i \cap V$ die Schnitte der Aufblasungen mit diesen Karten.

Wir starten in der Karte $U = U_1$. Dort sind x_1 und $y_2 = x_2/x_1$ affine Koordinaten. Das Urbild von X_i in U_1 ist also durch

$$x_1(x_1 + y_2) = 0, \quad \text{bzw.} \quad x_1^2(y_2^2 - 1 - x_1), \quad \text{bzw.} \quad x_1^2(y_2^2 - x_1)$$

gegeben. Dabei ist $\{x_1 = 0\}$ der exzeptionelle Divisor, welcher nicht vollständig im Abschluss von X_i liegt. Also ist \widetilde{X}_i^U jeweils durch den zweiten Faktor gegeben.

Auf der Karte $V = U_2$ sind x_2 und $y_1 = x_1/x_2$ lokale Koordinaten. Dort sind die Urbilder durch

$$x_2(y_1^2 x_2 + 1) = 0 \quad \text{bzw.} \quad x_2^2(1 - y_1^2 - x_2 y_1^3) \quad \text{bzw.} \quad x_2^2(1 - x_2 y_1^3)$$

gegeben und wiederum ist \widetilde{X}_i^U durch den zweiten Faktor ausgeschnitten.

Im Fall von X_1 sind alle Punkte von \widetilde{X}_1 bereits auf U_1 zu finden und die Kurve $x_1 + y_2 = 0$ ist offenbar auch zu $\mathbb{P}^1(k)$ isomorph. Es gibt genau einen Punkt von \widetilde{X}_1 , der auf dem exzeptionellen Divisor liegt, nämlich $(y_1 : y_2) = (1 : 0)$. In diesem Fall ist $\pi : \widetilde{X}_1 \rightarrow X_1$ ein Isomorphismus.

Im Fall von X_2 gibt es zwei Punkte von \widetilde{X}_2 , die auf dem exzeptionellen Divisor liegen, $(1 : 1)$ und $(1 : -1)$, und folglich ist $\pi : \widetilde{X}_2 \rightarrow X_2$ kein Isomorphismus. Durch betrachten der ersten Karte folgt direkt, dass $\widetilde{X}_2 \cong \mathbb{P}^1(k)$ ist.

Im Fall von X_3 gibt es auch nur einen Punkt von \widetilde{X}_3 , der auf dem exzeptionellen Divisor liegt, nämlich $(1 : 0)$. Dennoch ist $\pi : \widetilde{X}_3 \rightarrow X_3$ kein Isomorphismus, wie Aufgabe 6.3 zeigt. Durch betrachten der ersten Karte folgt wiederum, dass $\widetilde{X}_3 \cong \mathbb{P}^1(k)$ ist.

Aufgabe 6.4 (4 Punkte)

- (a) Sei $\widetilde{\mathbb{A}^3}$ die Aufblasung des \mathbb{A}^3 entlang der Gerade $V(x_1, x_2) \cong \mathbb{A}^1$. Zeige, dass der exzeptionelle Divisor isomorph zu $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1$ ist. Wann schneiden sich die strikten Transformierten zweier Geraden in \mathbb{A}^3 durch $V(x_1, x_2)$ in der Aufblasung?
- (b) Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n$ eine affine Varietät und seien $Y_1, Y_2 \subset X$ irreduzible abgeschlossene Teilmengen, von denen keine die andere enthält. Sei \widetilde{X} die Aufblasung von X entlang des Ideals $I(Y_1) + I(Y_2)$.
Zeige: Die strikten Transformierten von Y_1 und Y_2 sind in \widetilde{X} disjunkt.

Wir beweisen nun noch eine Aussage, die wir im Abschnitt über Singularitäten benötigen.

Proposition 6.8 *Jede quasi-projektive Varietät X der Dimension r ist birational äquivalent zu einer Hyperfläche im $\mathbb{P}^{r+1}(k)$.*

Beweis: Der Funktionenkörper $K(X)$ ist über k endlich erzeugt. Also gibt es eine Transzendenzbasis x_1, \dots, x_r , sodass $K(X)$ über $L = k(x_1, \dots, x_r)$ algebraisch ist. Im Fall $\text{char}(k) > 0$ kann man diesen Satz verfeinern und eine Transzendenzbasis finden, sodass $K(X)/L$ zudem separabel ist (siehe die Referenzen zu Theorem 4.8A in [Har77]). Dann gibt es nach dem Satz vom primitiven Element ein Element $y \in K(X)$, sodass $K(X) = L(y)$ ist. Das Minimalpolynom von y über L gibt nach Durchmultiplizieren mit dem Hauptnenner ein Polynom $f(x_1, \dots, x_r, y)$. Dieses definiert in \mathbb{A}^{r+1} eine Hyperfläche H mit dem Funktionenkörper $K(X)$. Der projektive Abschluss \overline{H} von H in $\mathbb{P}^{r+1}(k)$ wird von der Homogenisierung $f^\#$ ausgeschnitten. Dies ist die gesuchte Hyperfläche, da Y und \overline{H} birational äquivalent sind. \square

7 Lokale Eigenschaften, Singularitäten

Eine nichtsinguläre Varietät der Dimension r ist anschaulich eine Varietät, die lokal wie der \mathbb{A}^r aussieht. Die erste Definition, mit der wir das präzise machen, ist an den entsprechenden Begriff von stetig differenzierbaren Mannigfaltigkeiten angelehnt. Der Graph einer Sammlung von $n-r$ stetig differenzierbaren Funktionen reellwertigen Funktionen 'sieht lokal aus wie $\mathbb{R}^{r'}$. Und die Nullstellenmenge in \mathbb{R}^n von $n-r$ differenzierbaren Funktionen f_i ist nach dem Satz über implizite Funktionen in der Nähe eines Punktes P genau dann der Graph von g_1, \dots, g_{n-r} , wenn der Rang der Jacobi-Matrix im Punkt P gleich $n-r$ ist. Diese Charakterisierung gibt auch in der algebraischen Geometrie einen nützlichen Begriff von Nichtsingularität.

Sei $Y \subset \mathbb{A}^n(k)$ eine irreduzible affine Varietät der Dimension r und $f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n]$ Erzeuger von $I(Y)$. Die Varietät ist *nichtsingulär* im Punkt P , falls der Rang der *Jacobi-Matrix*

$$J(f_1, \dots, f_s) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P) \right)_{i,j} \in \mathbb{C}^{s \times n}$$

gleich $n-r$ ist und *singulär* im Punkt P , falls $\text{Rang}(J) < n-r$. Die Varietät Y heißt *glatt* oder *nichtsingulär*, falls sie nichtsingulär in jedem Punkt ist.

Aufgabe 7.1 (3 Punkte)

Die Kurve $\mathcal{C} = Z(x^4 - y^2 + y^2 x^6) \subset \mathbb{A}^2$ ist im Punkt $P = (0, 0)$ singulär.

Zeige: Der Blowup $\tilde{\mathcal{C}}$ von \mathcal{C} im Punkt P hat eine Singularität im Punkt \tilde{P} aber der Blowup von $\tilde{\mathcal{C}}$ in \tilde{P} ist nichtsingulär.

Wir werden gleich sehen, dass der Rang der Jacobimatrix nicht echt größer als $n-r$ sein kann. Aufgrund der Eigenschaften des Ranges einer Matrix zeigt man leicht, dass diese Definition nicht von den gewählten Erzeugern von $I(Y)$ abhängt. Mehr Mühe macht der Nachweis, dass die Eigenschaft Nichtsingularität nur von $P \in Y$ abhängt und nicht von der gewählten Einbettung von Y in

einen $\mathbb{A}^n(k)$. Dies erledigen wir, indem wir die Äquivalenz mit einer anderen Definition zeigen, die offenbar nicht von der Einbettung abhängt.

Als Vorbereitung definieren wir den *lokalen Ring* $\mathcal{O}_{P,Y}$ im Punkt P einer Varietät Y als den Ring der Keime regulärer Funktionen auf Umgebungen dieses Punktes. Genauer gesagt ist die Elemente von $\mathcal{O}_{P,Y}$ Äquivalenzklassen von Paaren (U, f) bestehend aus einer offenen Umgebung U von P in Y und einer regulären Funktion f auf U . Dabei werden zwei Paare (U, f) und (V, g) äquivalent genannt, wenn $f = g$ auf einer offenen Teilmenge von $U \cap V$ gilt.

Proposition 7.1 *Ist Y affin, so ist $\mathcal{O}_{P,Y} \cong A(Y)_{\mathfrak{m}_P}$, wobei \mathfrak{m}_P das zu P gehörige maximale Ideal in $A(Y)$ ist. Ist Y irreduzibel, so gilt $\dim(Y) = \dim \mathcal{O}_{P,Y}$ für jeden Punkt $P \in Y$.*

Nach Definition ist $\dim \mathcal{O}_{P,Y} = \text{ht} \mathfrak{m}_P$. Da $\dim(A(Y)/\mathfrak{m}_P) = \dim(k) = 0$ nach Satz 3.3, folgt die Dimensionsbehauptung aus Satz 3.4.

Beweis: Das maximale Ideal \mathfrak{m}_P besteht genau aus den Funktionen, die bei P verschwinden. Daher definiert $\frac{g}{h} \mapsto (D(h), \frac{g}{h})$ eine Abbildung $A(Y)_{\mathfrak{m}_P} \rightarrow \mathcal{O}_{P,Y}$, offenbar ein Ringhomomorphismus. Als Lokalisierung der injektiven Abbildung $A(Y) \rightarrow \mathcal{O}_Y(Y)$ ist diese offenbar injektiv. Ist $(U, f) \in \mathcal{O}_{P,Y}$ gegeben, so können wir U zu einer Umgebung $D(h)$ verkleinern. Dort ist die reguläre Funktion $f = \frac{g}{h}$ und $h \notin \mathfrak{m}_P$, da $D(h)$ eine Umgebung von P ist. Dies zeigt die Surjektivität der Abbildung. \square

Sei A ein lokaler Ring mit maximalem Ideal \mathfrak{m} und dem Restklassenkörper $k = A/\mathfrak{m}$. Dann wird R ein *regulärer lokaler Ring* genannt, falls $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim(A)$.

Satz 7.2 *Sei P in Punkt in einer irreduziblen affinen Varietät $Y \subset \mathbb{A}^n(k)$. Dann ist P regulär, genau dann wenn der lokale Ring $\mathcal{O}_{P,Y}$ regulär ist.*

Beweis: Sei $P = (a_1, \dots, a_n)$ und $\mathfrak{a}_P = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ das zugehörige Verschwindungsideal in $R = k[x_1, \dots, x_n]$. Zur Vorbereitung definieren wir die lineare Abbildung

$$\theta : R \rightarrow k^n, \quad f \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \right)$$

hat die Eigenschaft, dass die θ -Bilder der Idealerzeuger $x_i - a_i$ eine Basis von k^n bilden und dass $\theta(\mathfrak{a}_P^2) = 0$ ist. Also steigt θ zu einer Abbildung $\bar{\theta} : \mathfrak{a}_P/\mathfrak{a}_P^2 \rightarrow k^n$ ab, welche aus Dimensionsgründen ein Isomorphismus ist.

Seien nun $f_1, \dots, f_s \in R$ Erzeuger von $I(Y)$. Dann ist der Rang der Jacobimatrix $J(f_1, \dots, f_s)$ genau die Dimension des Bildes von $\theta(I(Y))$. Da $\bar{\theta}$ ein Isomorphismus ist, ist der Rang der Jacobimatrix auch gleich der Dimension von $(I(Y) + \mathfrak{a}_P)/\mathfrak{a}_P$. Da andererseits $\mathcal{O}_{P,Y} = (A/I(Y))_{\mathfrak{a}_P}$ und damit

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \cong \mathfrak{a}_P/(I(Y) + \mathfrak{a}_P^2).$$

Da

$$\dim_k((I(Y) + \mathfrak{a}_P)/\mathfrak{a}_P) + \dim_k(\mathfrak{a}_P/(I(Y) + \mathfrak{a}_P^2)) = \dim_k(\mathfrak{a}_P/\mathfrak{a}_P^2) = n$$

folgt

$$\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) + \text{Rang}(J) = n.$$

Da $\dim(\mathcal{O}_{P,Y}) = \dim(\mathcal{O}_Y(Y))$ aufgrund von Proposition 7.1, folgt die Behauptung. \square

Damit haben wir nun eine intrinsische Charakterisierung eines singulären Punkts und können den Begriff auf einer beliebigen quasi-projektiven Varietät verwenden, indem wir Nichtsingularität auf einer affinen Umgebung testen.

Als nächstes wollen wir zeigen, dass eine Varietät generisch glatt ist. Dafür benötigen wir folgende Aussage aus der Kommutativen Algebra, deren Beweis wir im Abschnitt 8 nachholen. Sie impliziert zusammen mit dem vorigen Satz auch die eingangs gemachte Bemerkung, dass stets $\text{Rang}(J) \leq n - r$ gilt.

Proposition 7.3 *Sei A ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal \mathfrak{m} . Dann ist $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \geq \dim(A)$.*

Satz 7.4 *Die Menge der singulären Punkte $\text{Sing}(Y)$ einer quasi-projektiven Varietät Y ist abgeschlossen und in jeder irreduziblen Komponente von Y eine echte Teilmenge.*

Beweis: Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass Y affin und irreduzibel ist, indem wir eine affin Überdeckung von Y verwenden. Die definierende Eigenschaft von Singularitäten im Jacobikriterium ist äquivalent zum Verschwinden aller $(n - r) \times (n - r)$ -Minoren der Jacobi-Matrix. Dies definiert offenbar eine Zariski-abgeschlossene Teilmenge von Y .

Zum Nachweis, dass $\text{Sing}(Y)$ eine echte Teilmenge ist, verwenden wir, dass nach Proposition 6.8 jede affine Varietät birational zu einer Hyperfläche in einem $\mathbb{A}^n(k)$ ist. Da die gewünschte Aussage unter birationalen Abbildungen erhalten bleibt, können wir annehmen, dass $Y = D(f)$ für ein irreduzibles Polynom $f \in k[x_1, \dots, x_n]$.

Angenommen, die Behauptung ist falsch und daher $\partial f/\partial x_i \in I(Y) = \langle f \rangle$. Da aber beim Ableiten der Grad in x_i echt fällt, muss $\partial f/\partial x_i = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$ sein. In Charakteristik Null ist dies unmöglich. Es bleibt nur der Fall $\text{char}(k) = p > 0$ und dass f ein Polynom in den x_i^p ist. Dann aber ist $f = g^p$, denn auch aus den Koeffizienten von f kann man p -te Wurzeln ziehen, und wir haben den gewünschten Widerspruch, indem wir nun mit g statt f das Argument so lange wiederholen, bis der Grad genügend klein ist. \square

Das Auftauchen des Quotienten $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ in der Charakterisierung von Nichtsingularität ist etwas unmotiviert. Wir identifizieren diesen Raum nun mit dem Tangentialraum einer Varietät und geben ihm somit eine geometrische Interpretation.

Sei P ein Punkt in der affinen Varietät $X \subset \mathbb{A}^n(k)$. Durch Verschieben der Koordinaten können wir annehmen, dass P der Nullpunkt ist. Dann ist der *Tangentialraum* von X im Punkt P gegeben durch

$$T_P X = Z(f_1 : f \in I(X)),$$

wobei f_1 den linearen Teil eines Polynoms (bzgl. der Standardgraduierung, in der alle Variablen Gewicht Eins haben) bezeichnet. Diese affine Varietät ist offenbar ein Vektorraum.

Zur Bestimmung des Tangentialraums genügt es, die linearen Teile der Erzeuger von $I(X)$ zu betrachten, wie man leicht nachrechnet. Wir betrachten die drei Beispiele (6.1) von ebenen Kurven aus dem Abschnitt über Auflösungen. Im ersten Beispiel ist der Tangentialraum $T_P X_1 = Z(x_2)$, während $T_P X_2 = T_P X_3 = Z(0) = \mathbb{A}^2(k)$ ist.

Die gesuchte Interpretation von $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ ist folgende Proposition.

Proposition 7.5 *Sei $P \in X \subset \mathbb{A}^n(k)$ und \mathfrak{m} das maximale Ideal in $A(X)_{I(P)}$. Dann ist der Tangentialraum $T_P X$ isomorph als k -Vektorraum zum Dualraum von $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.*

Beweis: Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass P der Nullpunkt ist. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathfrak{m} \rightarrow \text{Hom}(T_0 X, k), \quad f \mapsto f_1|_{T_0 X},$$

die ein Polynom auf die Einschränkung seines linearen Anteils schickt. Nach Definition von $T_0 X$ hängt diese Abbildung nicht von der Wahl des Polynoms ab, mit dem wir $f \in A(X)$ repräsentieren. Die Abbildung φ ist offenbar surjektiv, denn jede lineare Abbildung auf $T_0 X$ kann man zu einer linearen Abbildung auf $\mathbb{A}^n(k)$ ausdehnen und dort durch ein lineares Polynom repräsentieren.

Es bleibt also zu zeigen, dass $\text{Ker}(\varphi) = \mathfrak{m}^2$ ist. Seien dazu $f, g \in \mathfrak{m}$ gegeben. Dann ist

$$(fg)_1 = f(0)g_1 + g(0)f_1 = 0$$

und daher insbesondere $\varphi(fg) = 0$. Sei umgekehrt $f \in \text{Ker}(\varphi)$. Wir behaupten, dass es ein $g \in I(X)$ gibt mit $g_1 = f_1$. Aus der Behauptung folgt die zu zeigende Inklusion, da $f = f - g \in A(X)$ und da $f - g$ weder einen linearen noch einen konstanten Term hat, also in \mathfrak{m}^2 liegt. Zum Beweis der Zwischenbehauptung machen wir eine einfache Dimensionsbetrachtung. Sei $W = \{g_1 : g \in I(X)\}$ und $\ell = \dim_k(W)$. Dann ist $\dim Z(W) = \dim_k T_0 X = n - \ell$ und damit hat der Raum der Linearformen, die auf $T_0 X$ verschwinden, auch Dimension ℓ . Da dieser Raum von Linearformen offenbar W enthält, müssen beide gleich sein, was zu zeigen war. \square

Aufgabe 7.2 (6 Punkte)

Sei $V \subset \mathbb{A}^n$ eine affine Varietät und $P = (p_1, \dots, p_n) \in V$.

(a) Sei $V = Z(I)$ und zu $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ definieren wir

$$f_P := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(P)(x_i - p_i) \in k[x_1, \dots, x_n]$$

und für ein Ideal J sei $J_P := \langle f_P \mid f \in \sqrt{J} \rangle$.

Zeige, dass $T_P(V) \cong Z(I_P)$ (als affine Varietäten).

(b) Zeige, dass $I_P = I \pmod{\mathfrak{m}_P^2}$.

(c) Sei $P = (0, 0, 0)$. Was ist das Bild von $x + y + z^2 + xyz$ in $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$?

(d) Seien nun $P \in W \subset V \subset \mathbb{A}^n$ affine Varietäten.

Zeige: $T_P(W)$ ist ein k -Untervektorraum von $T_P(V)$.

(e) Sei $V = k[x_1, \dots, x_n]/I$ und $W = k[x_1, \dots, x_n]/(I + (f))$.

Zeige: $\dim T_P(V) - 1 \leq \dim T_P(W) \leq \dim T_P(V)$.

(f) Zeige, dass (x, z) in $k[x, y, z]/(xy - z^2)$ kein Hauptideal ist.

Hinweis: Was sind die Dimensionen der Tangentialräume im Ursprung?

Aufgabe 7.3 (4 Punkte)

Seien V, W affine Varietäten und $\varphi: V \rightarrow W$ ein Morphismus.

(a) Zeige, dass φ für jeden Punkt $P \in V$ einen Morphismus

$$\varphi_P^\sharp: \mathcal{O}_{\varphi(P)} \rightarrow \mathcal{O}_P$$

von lokalen Ringen induziert.

(b) Zeige, dass, in der Situation von Aufgabe 7.2(d), φ_P^\sharp die Einbettung $T_P \rightarrow T_{\varphi(P)}$ induziert.

(c) Sei $\varphi: Z(y - x^2) \rightarrow Z(y)$ die Projektion. Gib $\varphi_{(0,0)}^\sharp$ an.

(d) Sei $\varphi: Z(y - x^2) \rightarrow Z(x)$ die Projektion. Gib $\varphi_{(0,0)}^\sharp$ an.

Es gibt Eigenschaften, die sind noch 'lokaler' als dass sie im lokalen Ring zu erkennen sind. Wenn man das Achsenkreuz, gedreht zu $Y = Z(x_1^2 - x_2^2) = Z((x_1 - x_2)(x_1 + x_2))$ und die Kurve $X_2 = Z(x_1^2 - x_2^2 - x_2^3)$ vergleicht, so 'sehen' die Singularitäten bei Null 'gleich aus'. Aber die lokalen Ringe reflektieren dies nicht, denn $\mathcal{O}_{0,Y} = (k[x_1, x_2]/(x_1^2 - x_2^2))_{\mathfrak{m}}$ hat offenbar Nullteiler, während $\mathcal{O}_{0,X_2} = (k[x_1, x_2]/(x_1^2 - x_2^2 - x_2^3))_{\mathfrak{m}}$ als Lokalisierung eines nullteilerfreien Rings wieder nullteilerfrei ist. Hierbei ist $\mathfrak{m} = (x_1, x_2)$ das maximale Ideal, das zum Nullpunkt gehört. Der folgende Begriff macht die Anschauung präzise.

Zwei Punkte $P \in X$ und $Q \in Y$ werden *analytisch isomorph* genannt, falls die Kompletterungen $\widehat{\mathcal{O}}_{P,X}$ und $\widehat{\mathcal{O}}_{Q,Y}$ der lokalen Ringe beim maximalen Ideal isomorph sind.

Beispiel 7.6 Die Nullpunkte in $X_2 = Z(x_1^2 - x_2^2 - x_2^3)$ und im Achsenkreuz $Y = Z(x_1^2 - x_2^2)$ sind analytisch isomorph.

Um dies zu zeigen, genügt es zwei Potenzreihen $g, h \in k[[x_1, x_2]]$ zu finden, sodass $x_1^2 - x_2^2 - x_2^3 = gh$ ist. Dies lässt sich rekursiv einrichten, da die Termine niedrigsten Grades gleich sind und die Faktoren das maximale Ideal erzeugen. Genauer gesagt, machen wir also den Ansatz

$$\begin{aligned} g &= x_1 + x_2 + g_2 + g_3 + \dots \\ h &= x_1 - x_2 + h_2 + h_3 + \dots, \end{aligned} \tag{7.1}$$

wobei g_i und h_i homogen vom Grad i sind. Wir müssen also zunächst

$$(x_1 + x_2)h_2 + (x_1 - x_2)g_3 = -x_2^3$$

lösen. Das ist möglich, da $x_1 + x_2$ und $x_1 - x_2$ das maximale Ideal erzeugen. Im nächsten Schritt müssen wir

$$(x_1 + x_2)h_3 + (x_1 - x_2)g_3 = -g_2h_2$$

lösen, was aus dem gleichen Grund möglich ist, und so weiter.

Das Beispiel erinnert auch noch einmal daran, dass die Kompletterung nullteilerfreier Ringe nicht notwendig nullteilerfrei ist.

Aufgabe 7.4 (3 Punkte)

Zeige, dass $X = Z(x^2y + xy^2 - x^4 - y^4)$ und $Y = Z(xy(x + y))$ im Nullpunkt analytisch isomorph sind.

8 Das Hilbertpolynom

Das Hilbertpolynom beschreibt die Dimension (oder Länge) der graduierten Anteile eines graduierten Moduls für großen Index in der Graduierung. Wir werden es in zwei Anwendungen benötigen, zum einen in der Dimensionstheorie, zum anderen bei der Definition von Schnittvielfachheiten.

Sei $S = \bigoplus_n S_n$ ein noetherscher graduierter Ring, erzeugt als S_0 -Algebra von homogenen Elementen x_1, \dots, x_s in den Graden k_1, \dots, k_s . Sei M ein endlich erzeugter S -Modul, erzeugt von homogenen Elementen m_1, \dots, m_t und sei $r_j = \deg(m_j)$.

Sei λ eine \mathbb{Z} -wertige additive Funktion auf der Menge aller endlich erzeugten S_0 -Moduln. Wir werden uns ausschliesslich für den Fall $\lambda(M) = \ell(M)$ die Länge von M interessieren. Oft ist zudem $S_0 = k$, sodass wir $\lambda(M) = \dim_k(M)$ verwenden können. Die *Poincaré-Reihe* vom M bzgl. λ ist definiert als

$$P(M, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(M_n) t^n \in \mathbb{Z}[[t]]. \quad (8.1)$$

Der Satz von Hilbert-Serre besagt, dass diese Reihe in Wirklichkeit eine rationale Funktion ist.

Satz 8.1 *Es gibt ein Polynom $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ sodass sich die Poincaré-Reihe als $P(M, t) = f(t) / \prod_{i=1}^s (1 - t^{k_i})$ darstellen lässt.*

Beweis: Wir beweisen den Satz durch Induktion nach der Anzahl der Erzeuger von S . Für $s = 0$ ist wegen der endlichen Erzeugung $S_n = 0$ für großes n und damit auch $M_n = 0$ für großes n . Also ist $P(M, t)$ ein Polynom, wie behauptet.

Für den Induktionsschritt betrachten wir den S -Modul-Homomorphismus Multiplikation mit x_s . Seien K_n bzw. L_{n+k_s} der Kern und das Bild dieses Homomorphismus, sowie $K = \bigoplus K_n$ und $L = \bigoplus L_n$. Als Kern bzw. Bild sind dies beides S -Moduln, und endlich erzeugte $S_0[x_1, \dots, x_{s_1}]$ -Moduln. Aus der Additivität von λ folgt

$$\lambda(K_n) - \lambda(M_n) + \lambda(M_{n+k_s}) - \lambda(L_{n+k_s}) = 0.$$

Durchmultiplizieren mit t^{n+k_s} und Aufsummieren über $n \geq 0$ ergibt

$$(1 - t^{k_s})P(M, t) = P(L, t) - t^{k_s}P(K, t) + g(t)$$

wobei $g(t)$ ein Polynom ist, bestehend aus den in der Summation nicht verwendeten Anfangsgliedern der Poincaré-Reihen. Durch Einsetzen der Induktionsvoraussetzung folgt die Behauptung. \square

Die Polordnung der Poincaré-Reihe an der Stelle $t = 1$ ist eine wichtige Invariante, die die Größe von M misst, und die wir mit $d(M) = d_\lambda(M)$ bezeichnen.

Korollar 8.2 *Haben alle Erzeuger von S den Grad $k_i = 1$, so gibt es ein Polynom $H(t) = H(M, t)$ vom Grad $d - 1$ und ein N_0 , sodass $\lambda(M_n) = H(n)$ für alle $n \geq N_0$.*

Beweis: Nach dem vorigen Satz und Kürzen von Faktoren $(1 - t)$ können wir annehmen, dass $P(M, t) = f(t)/(1 - t)^d$ mit $f(1) \neq 0$ ist. Sei $f = \sum_{k=0}^N a_k t^k$. Nach der binomischen Formel ist

$$(1 - t)^{-d} = \sum_{j \geq 0} \binom{d + j - 1}{d - 1} t^j$$

und daher gilt

$$\lambda(M_n) = [t^n]f(t)/(1 - t)^d = \sum_{j=0}^N a_j \binom{d + n - j - 1}{d - 1}$$

für alle $n \geq N + 1$. \square

Das Polynom $H(t) = H_\lambda(M, t)$ wird *Hilbertpolynom* von M bzgl. λ genannt. Man beachte, dass $H(t)$ zwar ganzzahlige Werte für große ganzzahlige Argumente annimmt, aber nicht notwendig ganzzahlige Koeffizienten haben muss. Beispielsweise ist für $S = k[x_1, \dots, x_n]$ die Poincaré'-Reihe von S selbst durch

$$P(S, t) = (1 - t)^{-n} = \sum_{j \geq 0} \binom{j + n - 1}{n - 1} t^j$$

gegeben und das Hilbertpolynom ist $H(S, t) = \binom{t+n-1}{n-1}$.

Aufgabe 8.1 (3 Punkte)

Berechne das Hilbertpolynom $H(M, t)$ für die Längenfunktion und

-
- (a) $M = S/(xy)$ über $S = k[x, y]$;
 (b) $M = S/(xy, xz, yz)$ über $S = k[x, y, z]$;
 (c) $M = S/(x)$ über $S = k[x, y, z]$.

Dabei ist M immer bezüglich der von S induzierten Graduierung versehen.

Aufgabe 8.2 (3 Punkte)

Sei $S = k[x, y]$, M ein S -Modul und betrachte

$$0 \rightarrow xM \rightarrow M \rightarrow M/xM \rightarrow 0.$$

Berechne die Hilbertpolynome von M , xM und M/xM bezüglich der von M induzierten Graduierung und der Längenfunktion für

- (a) $M = S$ und
 (b) $M = S/(xy)$.

Mit Hilfe des Hilbertpolynoms wollen wir nun verschiedene Dimensionbegriffe eines noetherschen *lokalen* Rings (S, \mathfrak{m}) vergleichen. Ein solcher Ring ist nicht per Definition graduiert (und daher Eigenschaften des Hilbertpolynoms nicht sofort verfügbar), er hat aber mindestens eine natürliche Graduierung. Zur Definition dieser Graduierung erinnern wir daran, dass ein Ideal \mathfrak{q} in einem lokalen Ring \mathfrak{m} -primär genannt wird, wenn es ein r gibt, sodass $\mathfrak{m}^r \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{m}$ gilt, oder äquivalent, wenn S/\mathfrak{q} ein Artinscher Ring ist. Ist M ein endlich erzeugter S -Modul, so wird eine absteigende Filtrierung M_n dieses Moduls \mathfrak{q} -stabil genannt, falls $\mathfrak{q}M_n \subseteq M_{n+1}$ und ab einem gewissen Index zur Gleichheit gilt. Das wesentliche Beispiel einer solchen Filtrierung ist $M_n = \mathfrak{q}^n M$. Für ein \mathfrak{m} -primäres Ideal \mathfrak{q} definieren wir die assoziierten graduierten Ringe und graduierten Moduln

$$G_{\mathfrak{q}}(S) = \bigoplus_n \mathfrak{q}^n / \mathfrak{q}^{n+1}, \quad G_{\mathfrak{q}}(M) = \bigoplus_n M_n / M_{n+1}.$$

Nun ist $G(S)$ noethersch nach dem Hilbertschen Basissatz, die graduierten Anteile $G(M)_n$ sind endlich erzeugte Moduln über dem Artinschen Ring S/\mathfrak{q} , also sind alle $G(M)_n$ von endlicher Länge. Sind x_1, \dots, x_s Erzeuger von \mathfrak{q} , so erzeugen diese auch $G_{\mathfrak{q}}(S)$ als S/\mathfrak{q} -Algebra. Damit sind aber auch die Moduln M/M_n von endlicher Länge, nämlich

$$\ell(n) = \ell(M/M_n) = \sum_{r=1}^n \ell(M_r/M_{r+1}).$$

Wir können also einerseits das Hilbertpolynom $H_{\mathfrak{q}}(M, t)$ bezüglich dieser Längenfunktion betrachten. Die Polynomialität von $n \mapsto \ell(M_n/M_{n+1})$ besagt aber auch, dass es ein Polynom $\chi_{\mathfrak{q}}^M$ gibt mit

$$\chi_{\mathfrak{q}}^M(n) = \ell(n) \quad \text{für } n \gg 0.$$

Wir lassen den oberen Index weg, falls $M = S$, d.h. $\chi_{\mathfrak{q}} = \chi_{\mathfrak{q}}^M$. In all diesen Definitionen haben wir die Abhängigkeit von der \mathfrak{q} -stabilen Filtrierung in der Notation unterdrückt. Was davon unabhängig ist, besagt die nächste Proposition. Diese zeigt auch, dass man aus den Polynomen $\chi_{\mathfrak{q}}$ einen wohldefinierten Dimensionsbegriff erhält.

Proposition 8.3 Der Grad und der führende Koeffizient des von χ_q^M hängen nicht von der Wahl der q -stabilen Filtrierung M_n ab. Außerdem ist $\deg \chi_q^M = \deg \chi_m^M$ für jedes m -primäre Ideal q .

Beweis: Der Beweis der ersten Aussage verbleibt als Übung. Für die zweite Aussage notieren wir, dass aus der Definition von m -primär die Inklusionen $m^n \supseteq q^n \supseteq m^{rn}$ folgt, und damit

$$\chi_m(n) \leq \chi_q(S, n) \leq \chi_m^{rn}.$$

Daraus folgt die Behauptung durch die Betrachtung des Limes $n \rightarrow \infty$. \square

Aufgabe 8.3 (6 Punkte)

Sei S ein noetherscher lokaler Ring, m das maximale Ideal, q ein m -primäres Ideal, M ein endlich erzeugter S -Modul und (M_n) eine stabile q -Filtrierung, d.h.

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \dots \supseteq M_n \supseteq \dots \quad \text{mit} \quad qM_n \subseteq M_{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und $qM_n = M_{n+1}$ für hinreichend große n .

- (a) Seien nun $(M_n), (M'_n)$ zwei stabile q -Filtrierungen von M .
Zeige: Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $M_{n+n_0} \subseteq M'_n$ und $M'_{n+n_0} \subseteq M_n$ für alle $n \geq 0$.
- (b) Zeige: Der Grad und der Leitkoeffizient des Hilbertpolynoms χ_q^M sind unabhängig von der q -stabilen Filtrierung.
- (c) Sei nun $S = k[x, y]_{(x, y)}$ und $M = xS$. Seien $q = (x, y)$ und

$$M_n = q^n M \quad \text{und} \quad M'_n = M \cap q^n S$$

zwei q -stabile Filtrierungen von M .

Berechne die Hilbertpolynome $H(M, q)$ bezüglich beider Filtrierungen.

- (d) Sei wieder $S = k[x, y]_{(x, y)}$ aber $M = S$. Seien $q = (x, y)$ und $q' = q^2$.
Berechne die Hilbertpolynome $H(M, q)$ und $H(M, q')$ für die Filtrierungen $M_n = q^n M$ beziehungsweise $M'_n = (q')^n M$.
Hinweis: Achtung! S/q^2 ist kein Körper, sondern nur ein artinscher Ring. $H(M, q')$ misst also die Längen als S/q^2 -Modul.

Nun können wir die drei lokalen Definitionsbegriffe formulieren. Wir haben bereits die Krulldimension $\dim(S)$ kennengelernt und definieren $d(S)$ als den Grad von χ_q . Die *Chevalley-Dimension* $\delta(S)$ ist die kleinste Anzahl von Erzeugern eines m -primären Ideals. Das Ziel dieses Abschnitts ist es den lokalen Dimensionssatz zu zeigen.

Satz 8.4 In einem noetherschen lokalen Ring S gilt

$$\delta(S) = d(S) = \dim(S).$$

Damit können wir eine Behauptung aus dem vorigen Kapitel beweisen.

Beweis von Proposition 7.3: Sind $x_1, \dots, x_s \in m$ eine k -Basis von m/m^2 , dann sind in einem lokalen Ring die x_1, \dots, x_s auch Erzeuger von m nach dem Nakayama-Lemma. Also ist $s \geq \dim(S)$ nach dem obigen Satz. \square

Die erste Ungleichung ist einfach.

Proposition 8.5 *Es ist $\delta(S) \geq d(S)$.*

Beweis: Sind x_1, \dots, x_s Erzeuger des \mathfrak{m} -primären Ideals \mathfrak{q} , dann hat das Hilbertpolynom höchstes Grad $s - 1$ und damit $\chi_{\mathfrak{q}}$ höchstens Grad s . \square

Für die zweite Aussage beweisen wir zunächst einen Hilfssatz.

Proposition 8.6 *Sei (S, \mathfrak{m}) ein lokaler Ring und sei \mathfrak{q} ein \mathfrak{m} -primäres Ideal. Sei M ein endlich erzeugter S -Modul und $x \in S$ ein Nicht-Nullteiler von M , sowie $M' = M/xM$. Dann ist*

$$\deg \chi_{\mathfrak{q}}^{M'} \leq \deg \chi_{\mathfrak{q}}^M - 1.$$

Insbesondere gilt für einen Nichtnullteiler $x \in S$

$$d(S/(x)) \leq d(S) - 1$$

Beweis: Der Modul $N = xM$ ist zu M isomorph, denn die Injektivität der Multiplikationsabbildung ist gerade die Definition eines Nicht-Nullteilers. Sei $N_n = \mathfrak{q}^n M$. Dies ist eine stabile Filtrierung nach dem Artin-Rees-Lemma (und dies ist die Stelle, weswegen wir $G_{\mathfrak{q}}(M)$ usw. allgemein für stabile Filtrierungen eingeführt haben). Ausserdem folgt aus der exakten Sequenz

$$0 \rightarrow N/N_n \rightarrow M/\mathfrak{q}^n M \rightarrow M'/\mathfrak{q}^n M' \rightarrow 0,$$

dass für $n \gg 0$

$$\ell(N/N_n) - \chi_{\mathfrak{q}}^M(n) + \chi_{\mathfrak{q}}^{M'}(n) = 0$$

gilt. Da $N \cong M$ sind nach Proposition 8.3 die Grade und führenden Terme der ersten zwei Polynome in dieser Nulldarstellung gleich, und folglich der Dritte von niedrigerem Grad. \square

Man beachte, dass wir in Proposition 8.3 nur die Unabhängigkeit des führenden Koeffizienten von $\chi_{\mathfrak{q}}^M$ von der Wahl der \mathfrak{q} -stabilen Filtrierung behauptet haben. Die Koeffizienten von niedrigerem Grad sind im Allgemeinen nicht unabhängig und die Multiplikation mit x respektiert auch die Filtrierung nicht vollständig, weswegen in der Behauptung der Proposition durchaus Gleichheit auftreten kann.

Proposition 8.7 *Es ist $d(S) \geq \dim(S)$.*

Beweis: Wir argumentieren per Induktion nach $d(S)$. Ist $d = 0$, so ist die Länge von S/\mathfrak{m}^n konstant für $n \gg 0$, also $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n+1}$, also ergibt das Nakayama-Lemma angewandt auf den Nulluntermodul in \mathfrak{m}^n , dass $\mathfrak{m}^n = 0$ ist. Also ist S artinsch und damit nulldimensional.

Sei nun $d > 0$ und $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_r$ eine Primidealkette maximaler Länge. Sei $x \in \mathfrak{p}_1 \setminus \mathfrak{p}_0$, sei $S' = S/\mathfrak{p}_0$. Dann ist das Bild x' von x in S' nicht Null, also auch kein Nullteiler und damit ist nach der vorherigen Proposition

$$d(S'/(x')) \leq d(S') - 1.$$

Nach der Induktionsvoraussetzung hat jede Primidealkette in $S'/(x')$ die Länge höchstens $d - 1$. Aber die Bilder der Primideale \mathfrak{p}_i in diesem Ring bilden eine Kette der Länge $r - 1$. Also ist $r - 1 \leq d - 1$ und daraus folgt die Behauptung. \square

Um den Beweis von Satz 8.4 zu vervollständigen, fehlt noch folgende Aussage.

Proposition 8.8 *Es ist $\dim(S) \geq \delta(S)$. Das heißt, es gibt ein \mathfrak{m} -primäres Ideal \mathfrak{q} in S , welches von Elementen $x_1, \dots, x_{\dim(S)}$ erzeugt ist.*

Beweis: Es sei $d = \dim(S)$. Ziel des Beweises ist es induktiv Elemente x_1, \dots, x_d zu konstruieren, sodass jedes Primideal, welches die ersten i dieser Elemente enthält, die Höhe mindestens i hat. Wenn uns das gelungen ist, dann hat jedes Primideal, welches x_1, \dots, x_d enthält die Höhe d und ist also gleich dem maximalen Ideal \mathfrak{m} , wegen $d = \dim(S)$. Nach dem Satz über die Primärzerlegung ist also das Ideal $\langle x_1, \dots, x_d \rangle$ selbst \mathfrak{m} -primär, was zu zeigen war.

Zur Konstruktion dieser Elemente nehmen wir an, dass x_1, \dots, x_{n-1} bereits konstruiert sind. Seien \mathfrak{p}_j für $j = 1, \dots, s$ die zu $I_{n-1} = \langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle$ assoziierten Primideale der Höhe genau $n - 1$. Wir wählen $x_n \in \mathfrak{m} \setminus \cup_{i=1}^s \mathfrak{p}_i$. Sei \mathfrak{q} ein Primideal, welches $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ enthält. Dies muss ein minimales Primoberideal \mathfrak{p} von $\langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle$ enthalten. Falls $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_j$ für ein j ist, dann ist die Höhe von \mathfrak{q} offenbar mindestens eins größer, als die von \mathfrak{p} und damit größer als n . Und andernfalls gilt diese Schlussfolgerung auch, da die \mathfrak{p}_j die zu I_{n-1} assoziierten Primideale minimaler Höhe waren. \square

Aufgabe 8.4 (4 Punkte)

Sei $S' = k[x, y]/(y^2 - x^3)$.

- (a) Sei $\mathfrak{m} = (x, y)$ und $S = S'_{\mathfrak{m}}$ der lokale Ring. Zeige, dass \mathfrak{m} in S kein Hauptideal ist, aber es ein \mathfrak{m} -primäres Hauptideal \mathfrak{q} gibt.
- (b) Sei nun $\mathfrak{m} = (x - 1, y - 1)$ und $S = S'_{\mathfrak{m}}$ der lokale Ring. Zeige, dass \mathfrak{m} in S ein Hauptideal ist.
- (c) Sei nun $S' = k[x, y, z]/(xy - z^2)$, $\mathfrak{m} = (x, y, z)$ und $S = S'_{\mathfrak{m}}$.

Zeige, dass \mathfrak{m} in S nicht von zwei Elementen erzeugt werden kann, aber dass es $f, g \in S$ und ein \mathfrak{m} -primäres Ideal $\mathfrak{q} = (f, g)$ gibt.

Hinweis: Proposition 8.8.

Wir können hiermit die Sätze aus der globalen Dimensionstheorie beweisen. Offenbar (jede Primidealkette maximaler Länge endet an einem maximalen Ideal) sind Satz 3.3 und Satz 3.4 eine Folge der beiden Sätze, wobei der erste eine Konsequenz aus der lokalen Dimensionstheorie ist und der zweite die lokalen Dimensionen an verschiedenen Lokalisierungen vergleicht.

Korollar 8.9 Sei (S, \mathfrak{m}) ein nullteilerfreier, noetherscher lokaler Ring. Dann gilt für jedes Primideal \mathfrak{p}

$$\text{ht}(\mathfrak{p}) + \dim(S/\mathfrak{p}) = \dim(S). \quad (8.2)$$

Satz 8.10 Sei Y eine irreduzible Varietät. Dann ist $\text{trdeg}_k(K(Y)) = \dim(A(Y)_{\mathfrak{m}})$ für jedes maximale Ideal \mathfrak{m} von $A(Y)$.

Beweis von Korollar 8.9: Wir argumentieren mit Induktion nach $\text{ht}(\mathfrak{p})$. Ist diese Höhe Null, so ist die Aussage offenbar trivial. Andernfalls sei $0 = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_h = \mathfrak{p}$ eine Kette maximaler Länge und $0 \neq x \in \mathfrak{p}_1$ ein Nichtnullteiler. Dann hat nach dem Krull'schen Hauptidealsatz das Bild $\bar{\mathfrak{p}}$ von \mathfrak{p} in $S' = S/\langle x \rangle$ die Höhe $h - 1$. Ausserdem ist $\dim(S') = \dim(S) - 1$ nach Proposition 8.6 und dem Chevalley- Dimensionsbegriff für die umgekehrte Abschätzung. Nach der Induktionsvoraussetzung ist also $\dim(S/\mathfrak{p}) = \dim(S'/\bar{\mathfrak{p}}) = \dim(S) - h$. \square

Als Vorbereitung für Satz 8.10 benötigen wir zwei Aussagen. Die folgende Aussage ist unter dem Namen *Noether-Normalisierung* bekannt.

Satz 8.11 Sei A eine nullteilerfreie, endlich erzeugte k -Algebra mit $\text{trdeg}_k(\text{Quot}(A)) = n$. Dann gibt es algebraisch unabhängige Elemente $x_1, \dots, x_n \in A$, sodass A eine endliche Erweiterung von $k[x_1, \dots, x_n]$ ist.

Beweis: Sei $A = k[y_1, \dots, y_m]/\mathfrak{p}$. Wir argumentieren mit Induktion nach m und für $m = n$ ist die Aussage offenbar klar. Wir suchen nun $m - 1$ Elemente z_1, \dots, z_{m-1} , sodass A eine endliche Erweiterung von $k[z_1, \dots, z_{m-1}]$ ist. Zusammen mit der Induktionsvoraussetzung und Aufgabe ?? folgt dann die Behauptung. Um diese $m - 1$ Elemente zu finden, setzen wir

$$z_1 = y_1 - y_m^{r_1}, \quad z_2 = y_2 - y_m^{r_2}, \quad \dots, \quad z_{m-1} = y_{m-1} - y_m^{r_{m-1}},$$

wobei die ganzzahligen Exponenten r_i unten gewählt werden. Da die y_i algebraisch nicht unabhängig sind, gibt es ein Polynom f mit

$$f(z_1 + y_m^{r_1}, \dots, z_{m-1} + y_m^{r_{m-1}}, y_m) = 0. \quad (8.3)$$

Wenn man die Monome dieses Polynoms ausmultipliziert, so liefert jedes Monom nur einen einzigen Term der Form y_m^k , ohne z_i im Vorkoeffizienten (und viele Terme mit z_i im Vorkoeffizienten). Falls f ein Monom enthält, in dem die erste Variable tatsächlich auftritt, so kann man durch die Wahl von einem r_1 , welches wesentlich größer ist als alle anderen r_i und als die Potenzen der letzten Variable, erreichen, dass der Term y_m^N mit der höchsten y_m -Potenz kein z_i im Vorkoeffizienten hat. Damit ist y_m ganz über $k[z_1, \dots, z_{m-1}]$, was zu zeigen war. Analog kann man offenbar vorgehen, falls die erste Variable nicht, dafür aber andere Variablen in f auftreten. \square

Die endlichen Erweiterungen spielen bei Dimensionsfragen keine Rolle. Der Grund dafür ist folgendes Lemma.

Lemma 8.12 Sei $S \supseteq R$ eine ganze Ringerweiterung und $\mathfrak{m} \subset S$ ein maximales Ideal. Dann ist $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \cap R$ ein maximales Ideal in R und $\dim S_{\mathfrak{m}} = \dim R_{\mathfrak{n}}$.

Beweis: Durch Reduktion des Minimalpolynoms ganzer Elemente sieht man sofort, dass S/\mathfrak{q} ganz über $R/(\mathfrak{q} \cap R)$ für jedes Ideal \mathfrak{q} ist. Angewandt auf ein maximales Ideal ist also zum Beweis der ersten Aussage nur zu zeigen, dass eine ganze Ringerweiterung nur dann ein Körper ist, wenn der Ausgangsring bereits ein Körper war. Dies folgt sofort, indem man das Minimalpolynom des multiplikativen Inversen betrachtet.

Es ist also zu zeigen, dass zu einer gegebenen Kette

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{m} \quad (8.4)$$

mit strikten Inklusionen auch die heruntergeschnittene Kette

$$\mathfrak{q}_0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_n = \mathfrak{n} \quad (8.5)$$

mit $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i \cap R$ eine Primidealkette mit strikten Inklusionen ist und dass es umgekehrt zu jeder Kette (8.4) von Primidealen \mathfrak{q}_i eine Kette (8.5) von Primidealen \mathfrak{p}_i gibt, mit $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i \cap R$. (Die Inklusion ist dann offenbar strikt). Diese beiden Aussagen sind als 'Going-down' und 'Going-Up' für ganze Ringerweiterungen bekannt und verbleiben als Übung. \square

Aufgabe 8.5 (6 Punkte)

Sei $A \subseteq B$ eine ganze Ringerweiterung.

(a) Seien ferner $A \subseteq B$ nullteilerfrei.

Zeige: A ist genau dann ein Körper, wenn B ein Körper ist.

(b) Seien $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q}' \subset B$ Primideale, so dass $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{q}' \cap A$ gilt.

Zeige: Dann ist $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$.

Hinweis: Zeige zunächst, dass $A_{\mathfrak{p}} \rightarrow B_{\mathfrak{p}}$ eine ganze Ringerweiterung ist.

(c) Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal.

Zeige: Dann gibt es ein Primideal $\mathfrak{q} \subset B$, so dass $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{q}$ ist.

Hinweis: Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{\mathfrak{p}} & \longrightarrow & B_{\mathfrak{p}} \end{array}$$

(d) Folgere, dass es zu jeder Primidealkette

$$\mathfrak{p}_0 \subseteq \mathfrak{p}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{p}_n \subset A$$

und jeder Primidealkette

$$\mathfrak{q}_0 \subseteq \mathfrak{q}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{q}_m \subset B \quad \text{mit } m < n \text{ und } \mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i,$$

Primideale $\mathfrak{q}_{m+1} \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{q}_n \subset B$ gibt, sodass $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i$ für $i = 1, \dots, n$.

Beweis von Satz 8.10: Der Transzendenzgrad hängt nicht von einer endlichen Erweiterung ab und die Dimension der Lokalisierung bei maximalen Ideal auch nicht, wie wir in Lemma 8.12 gesehen haben. Also genügt es aufgrund der Noether-Normalisierung Satz 8.11 den Satz 8.10 für den Fall eines Polynomrings $R = k[x_1, \dots, x_n]$ zu beweisen. Dieser hat aber an jedem Punkt $P = (a_1, \dots, a_n)$ nach Satz 8.10, denn $\{x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n\}$ sind Erzeuger des maximalen Ideals. \square

9 Der Satz von Bézout

Seien Y und Z zwei projektive Untervarietäten in $\mathbb{P}^n(k)$ der Dimension $n - r$ und $n - s$, also der Kodimension r und Kodimension s . Motiviert von der Intuition linearer oder affiner Unterräume im $\mathbb{A}^n(k)$ kann man hoffen, dass der Schnitt $Y \cap Z$ höchstens Kodimension $r + s$ hat, falls der Schnitt nichtleer ist. Wir werden sehen, dass das in der Tat der Fall ist. Falls Y und Z von komplementärer Dimension sind, d.h. falls $r + s = n$, so kann man erwarten, dass der Schnitt Nulldimensional ist, also aus einzelnen Punkten besteht.

Das Ziel des Satzes von Bézout ist es, die Anzahl solcher Punkte vorherzusagen. Modellfall sind dabei zwei Geraden im $\mathbb{P}^2(k)$, die sich immer in einem Punkt schneiden. Wir wollen also einer Untervarietät des $\mathbb{P}^n(k)$ einen Grad zuordnen, sodass Geraden eben gerade Grad Eins haben. Zur Definition des Grades verwenden wir wiederum das Hilbertpolynom. Schon der Fall des Schnitts einer Parabel mit einer Geraden im $\mathbb{P}^2(k)$ macht klar, dass wir eine vom Verschieben der Geraden unabhängige Schnitzzahl nur dann erhalten werden, wenn wir die Schnittpunkte korrekt mit Vielfachheit zählen.

Aufgabe 9.1 (4 Punkte)

- (a) Sei $\mathrm{PGL}_n(k) = \mathrm{GL}_n(k)/k^*$. Zeige: $\mathrm{PGL}_{n+1}(k) \subseteq \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n)$.
 (b) Sei $A \in \mathrm{PGL}_3(k)$. Zeige: $\mathrm{PGL}_3(k)$ operiert zweifach transitiv auf \mathbb{P}^2 , d.h. für gegebene Punkte x, y und p, q existiert ein $A \in \mathrm{PGL}_3(k)$, sodass $A(x) = p$ und $A(y) = q$.
 (c) Sei nun $C = Z(f) \subset \mathbb{P}^2$ eine Kurve und $P \in C$ ein regulärer Punkt.
 Zeige: Die Tangente an C durch P ist

$$\overline{T_P C} = l_P = Z\left(\frac{\partial f}{\partial x}(P)x + \frac{\partial f}{\partial y}(P)y + \frac{\partial f}{\partial z}(P)z\right).$$

Hinweis: Zeige zunächst: für homogenes f ist $\deg f \cdot f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i$.

- (d) Zeige, dass es eine Gerade in \mathbb{P}^2 gibt, die C transversal (d.h. nicht tangential und in keiner Singularität) schneidet.

Wir starten mit dem Beweis der Dimensionsaussagen.

Proposition 9.1 *Seien Y und Z irreduzible affine Varietäten in $\mathbb{A}^n(k)$ der Kodimension r bzw. s . Dann hat jede irreduzible Komponente W von $Y \cap Z$ die Kodimension höchstens $r + s$.*

Beweis: Falls Z von Kodimension Eins, also eine Hyperfläche ist, so wird sie nach Proposition 3.7 von einem Element $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ geschnitten. Die irreduziblen Komponenten W korrespondieren bijektiv zu den minimalen Primidealen des Hauptideals $\langle f \rangle \subseteq A(Y)$. Ist diese das Nullideal, ist nichts zu zeigen, $Y \subseteq Z$. Nach dem Krullschen Hauptidealsatz haben diese andernfalls alle Höhe eins und nach dem Dimensionssatz in der Form (3.3) hat W die Kodimension Eins in Y und damit Kodimension $r + 1$ in $\mathbb{A}^n(k)$.

Den allgemeinen Fall führen wir hierauf wie folgt zurück. Der $\mathbb{A}^n(k)$ ist vermöge $z \mapsto (z, z)$ isomorph zur Diagonale Δ in $\mathbb{A}^n(k) \times \mathbb{A}^n(k)$ und unter diesem Isomorphismus korrespondiert $Y \cap Z$ zu $(Y \times Z) \cap \Delta$. Nun hat $Y \times Z$ die Dimension $2n - (r + s)$ und wir wollen zeigen, dass $(Y \times Z) \cap \Delta$ die Dimension mindestens $n - (r + s)$ hat. Der Vorteil in dieser Situation ist, dass die Diagonale ein vollständiger Durchschnitt ist, d.h. eine Untervarietät der Kodimension n , ausgeschnitten durch die n Gleichungen $x_i - y_i = 0$ für $i = 1, \dots, n$ in den Koordinaten $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ von $\mathbb{A}^n(k) \times \mathbb{A}^n(k)$. Wir wenden also den ersten Schritt n mal an und dabei fällt die Dimension in jedem Schritt um maximal Eins, was zu zeigen war. \square

Den projektiven Fall führen wir auf den affinen Fall zurück. Wir definieren den Kegel $C(Y)$ über der projektiven Varietät $Y \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ als $C(Y) = \overline{\pi^{-1}(Y)} \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(k)$. Dies ist die affine Varietät mit Koordinatenring $S(Y)$ und deswegen ist $\dim(C(Y)) = \dim(Y) + 1$ nach Aufgabe 5.2.

Proposition 9.2 *Seien Y und Z irreduzible projektive Varietäten in $\mathbb{P}^n(k)$ der Kodimension r bzw. s . Dann hat jede irreduzible Komponente W von $Y \cap Z$ die Kodimension höchstens $r + s$ und falls $r + s \leq n$, dann ist $Y \cap Z \neq \emptyset$.*

Beweis: Es ist $r = \text{codim}_{\mathbb{A}^{n+1}(k)}(C(Y))$ und $s = \text{codim}_{\mathbb{A}^{n+1}(k)}(C(Z))$. Jede irreduzible Komponente von $C(Y) \cap C(Z)$ hat Kodimension höchstens $r + s$ in $\mathbb{A}^{n+1}(k)$ nach der vorigen Proposition. Damit hat $\pi(C(Y) \cap C(Z) \setminus \{0\}) = Y \cap Z$ ebenfalls höchstens Kodimension $r + s$. Falls $r + s \leq n$, so hat jede Komponente von $C(Y) \cap C(Z)$ positive Dimension, enthält also nicht nur den Nullpunkt und damit ist $Y \cap Z \neq \emptyset$. \square

Bei projektiven Varietäten ist der homogene Koordinatenring per Definition ein graduerter Ring. Wir definieren also (ohne Übergang zu einem graduierten Modul, wie in der lokalen affinen Situation) das *Hilbertpolynom* $H(Y, t)$ einer projektiven Varietät $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ als das Hilbertpolynom $H(S(Y), t)$ des homogenen Koordinatenrings (bezüglich der k -Vektorraumdimension als additiver Funktion).

Proposition 9.3 *Die Dimension von Y ist gleich dem Grad des Hilbertpolynoms $H(Y, t)$.*

Beweis: Durch Verschieben können wir ohne Einschränkung annehmen, dass der Nullpunkt $P = (0, \dots, 0) \in U_0 \subset \mathbb{P}^n$ der ersten Karte der Standardüberdeckung in Y liegt. Dann ist $H(S(Y), \ell) = \dim_k(S(Y)_\ell)$ für $\ell \gg 0$. Sei andererseits $Y_0 = Y \cap U_0$ mit affinem Koordinatenring $A(Y_0)$. Sei $\mathfrak{m} \subseteq A(Y_0)$ das maximale Ideal zum Nullpunkt. Dann hat $\chi_{\mathfrak{m}}$ den Grad $d = \dim(Y_0) = \dim(Y)$ nach Satz 8.4 und es ist $\chi_{\mathfrak{m}}(\ell) = \dim_k(A(Y_0)/\mathfrak{m}^\ell A(Y_0))$ für $\ell \geq 0$. Dehomogenisieren bezüglich der Variable x_0 liefert einen k -Vektorraum-Isomorphismus $S(Y)_\ell \rightarrow A(Y_0)/\mathfrak{m}^\ell A(Y_0)$ und damit hat auch $H(S(Y), \ell)$ den Grad d . \square

Wir haben bereits in der lokalen Situation gesehen, dass der Topkoeffizient unabhängig von verschiedenen Wahlen ist. Auch hier ist er wichtig genug, dafür folgenden Begriff einzuführen. Der *Grad einer projektiven Varietät* $Y \subset \mathbb{P}^n(k)$ der Dimension r ist das $r!$ -fache des führenden Koeffizienten des Hilbertpolynoms $H(S(Y), t)$.

Lemma 9.4 *Der Grad einer nichtleeren projektiven Varietät ist eine ganze Zahl. Allgemeiner gilt, dass jedes Polynom $P \in \mathbb{Q}(t)$ mit $P(n) \in \mathbb{Z}$ für alle $n \gg 0$ eine Darstellung der Form*

$$P(t) = \sum_{i=0}^r c_i \binom{t}{r-i} \quad (9.1)$$

mit Koeffizienten $c_i \in \mathbb{Z}$ hat.

Beweis: Jedes Polynom in $\mathbb{Q}[t]$ hat offenbar eine Darstellung wie in (9.1) mit $c_i \in \mathbb{Q}$. Wir beweisen induktiv, dass $c_i \in \mathbb{Z}$. Für den Induktionsschritt definieren wir auf Polynomen den Differenzenoperator $\Delta(P) = P(t+1) - P(t)$. Dieser hat die Eigenschaft, dass $\Delta\left(\binom{t}{r}\right) = \binom{t}{r-1}$. Damit sind nach Induktionsvoraussetzung die c_i für $i \leq r-1$ ganzzahlig. Also ist $P(n) - c_r \sum_{i=0}^{r-1} c_i \binom{n}{r-i}$ ganzzahlig für $n \gg 0$. Wegen $P(n) \in \mathbb{Z}$ für $n \gg 0$ ist dann auch c_r ganzzahlig. \square

Wir fassen nun die wesentlichen Eigenschaften des Gradbegriffs zusammen. Dazu noch eine wichtige Notation. Ist M ein graduerter S -Modul, so definieren wir den *Twist* $M(\ell)$ von M um ℓ als den graduierten S -Modul, dessen Graduierung um ℓ verschoben ist, d.h. $M(\ell)_d = M_{d+\ell}$.

Proposition 9.5 *Sind Y_1 und Y_2 zwei projektive Varietäten der Dimension r , die keine irreduzible Komponente gemeinsam haben und $Y = Y_1 \cup Y_2$. Dann ist*

$$\deg(Y) = \deg(Y_1) + \deg(Y_2).$$

Weiterhin ist der Grad von $\mathbb{P}^r(k)$ selbst gleich Eins und der Grad einer Hyperfläche gegeben durch ein homogenes Polynom vom Grad d gleich d .

Beweis: Sei $I_j = I(Y_j)$. Das Verschwindungsideal von Y ist $I = I_1 \cap I_2$. Wir benutzen die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow S/I \rightarrow S/I_1 \oplus S/I_2 \rightarrow S/(I_1 + I_2) \rightarrow 0$$

graduierter S -Moduln. Diese besagt, dass

$$H(Y, t) = H(Y_1, t) + H(Y_2, t) - H(Y_1 \cap Y_2, t),$$

und da der letzte Term nach Voraussetzung den Grad kleiner gleich $r - 1$ hat, folgt die erste Behauptung.

Wie bereits im vorigen Abschnitt erwähnt, ist das Hilbertpolynom von $S = k[x_0, \dots, x_n]$ gleich $H(S, t) = \binom{t+n}{n}$.

Für die letzte Aussage sei die Hyperfläche gegeben als der Verschwindungsort des homogenen Elements f vom Grad d . Dann liefert Multiplikation mit f die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow S(-d) \rightarrow S \rightarrow S/\langle f \rangle \rightarrow 0.$$

Damit ist das Hilbertpolynom

$$H(Z(f), t) = \binom{t+n}{n} - \binom{t-d+n}{n} = \frac{d}{(n-1)!} t^{n-1} + \dots$$

und der Grad von $Z(f)$ ist also gleich d . □

Aufgabe 9.2 (4 Punkte)

Für $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ mit $r = \dim Y$ und Hilbertpolynom P_Y definieren wir das *arithmetische Geschlecht* $g_a(Y) = (-1)^r (P_Y(0) - 1)$.

- (a) Zeige: $g_a(\mathbb{P}^n) = 0$.
- (b) Zeige: Ist $Y \subset \mathbb{P}^2$ eine Kurve mit $\deg Y = d$, dann ist $g_a(Y) = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$.
- (c) Sei Y der vollständige Durchschnitt zweier Flächen von Grad a und b in \mathbb{P}^3 . Zeige:

$$g_a(Y) = \frac{1}{2}ab(a+b-4) + 1.$$

Aufgabe 9.3 (2 Punkte)

- (a) Berechne den Grad der Segre-Einbettung von $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ in \mathbb{P}^3 .
- (b) Berechne den Grad der gewisteten Kubik in \mathbb{P}^3 .

Der ursprüngliche Satz von Bezout ist die Version für $\mathbb{P}^2(k)$ des folgenden Satzes. Er besagt, dass sich zwei Kurven vom Grad d_1 und d_2 immer in $d_1 d_2$ Punkten schneiden, wenn man nur die Schnittpunkte korrekt (und das ist das Hauptproblem!) mit Vielfachheit zählt. Sei nun also H eine Hyperebene in $\mathbb{P}^n(k)$ und sei Y eine irreduzible projektive Untervarietät der Dimension $r \geq 1$, die nicht in H enthalten ist. Dann ist der Schnitt also nichtleer und von Dimension $r - 1$, es seien $Y \cap H = Z_1 \cup \dots \cup Z_s$ dessen irreduziblen Komponenten. Dann definieren wir die *Schnittmultiplizität* $i(Y, H; Z_j)$ von Y und H bei Z_j als

$$i(Y, H; Z_j) = \ell_{\mathfrak{p}_j}(S/(I(Z) + I(H))) \quad (9.2)$$

wobei $S = k[x_0, \dots, x_n]$, wobei $\mathfrak{p}_j = I(Z_j)$ und wobei wir allgemein für einen S -Modul M die lokale Länge $\ell_{\mathfrak{p}} = \ell_{S_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$ als $S_{\mathfrak{p}}$ -Modul definieren.

Ist beispielsweise $Y = Z(x_0 x_2 - x_1^2)$ und $H = Z(x_2)$, so ist $Y \cap H = Z = \{(0, 0)\} = Z(x_1, x_2)$ der Nullpunkt. Dann ist $S/(I(Y) + I(H)) \cong k[x_0, x_1]/(x_1^2)$ und die Lokalisierung bei $\mathfrak{p} = \langle x_1, x_2 \rangle$ hat die Länge zwei als $S_{\mathfrak{p}}$ -Modul.

Satz 9.6 Sei Y eine irreduzible projektive Varietät in $\mathbb{P}^n(k)$ und H eine Hyperfläche, die Y nicht enthält. Dann ist

$$\sum_{j=1}^s i(Y, H; \mathfrak{p}_j) \deg(Z_j) = \deg(Y) \deg(H),$$

wobei $Z_j = Z(\mathfrak{p}_j)$.

Aufgabe 9.4 (4 Punkte)

- (a) Sei $C \subset \mathbb{P}^n$ eine Kurve mit $\deg C = d$.
 Zeige: C ist in einem d -dimensionalen linearen Raum enthalten.
- (b) Sei $C \subset \mathbb{P}^2$ eine Konik, d.h. von Grad 2.
 Zeige: C ist rational, d.h. birational zu \mathbb{P}^1 .

Aufgabe 9.5 (4 Punkte)

- (a) Seien $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}^2$ Kurven, die keine irreduzible Komponente gemeinsam haben und $P \in C_1 \cap C_2$.
 Zeige: Ist C_1 in P singular, so ist $i(C_1, C_2; P) \geq 2$ und ist auch C_2 in P singular, so ist $i(C_1, C_2; P) \geq 3$.
- (b) Sei $C \subset \mathbb{P}^2$ eine irreduzible Kurve von Grad d .
 Zeige, dass C höchstens $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$ Singularitäten hat.

Aufgabe 9.6 (4 Punkte)

Sei $\mathbb{A}^4 \supset Y = Z(x, y) \cup Z(z, w)$ und $Z = Z(x - z, y - w)$. In wie vielen Punkten schneiden sich Y und Z ? Was ist die k -Dimension von

$$k[x, y, z, w]/(I(Y) + I(Z))?$$

Aufgabe 9.7 (4 Punkte)

Sei $C \subset \mathbb{P}^2$ eine glatte Kurve. Ein Punkt $P \in C$ heißt *Wendepunkt*, falls C die Tangente mit P in P mit Vielfachheit mindestens 3 schneidet.

Sei nun $C = Z(f) \subset \mathbb{P}^2$ glatt von Grad d . Dann ist

$$h = \det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{0 \leq i, j \leq 2}$$

homogen von Grad $3(d-2)$.

Zeige: $P \in C$ ist genau dann ein Wendepunkt, wenn $P \in Z(h)$.

Zum Beweis benötigen wir eine Hilfsaussage über die Struktur von endlich erzeugten Moduln über noetherschen Ringen, und zwar in der graduierten Version. Existenzsätze von Filtrierungen mit einfachen Bestandteilen werden auch als *Dévissage* bezeichnet.

Proposition 9.7 Sei S ein noetherscher graduirter Ring und M ein endlich erzeugter graduirter S -Modul. Dann gibt es eine Filtrierung

$$0 = M^0 \subsetneq M^1 \subsetneq \dots \subsetneq M^q = M$$

durch graduierte S -Untermodule, sodass $M^i/M^{i-1} \cong S/\mathfrak{p}_i(\ell_i)$ für homogene Primideale \mathfrak{p}_i und geeignete $\ell_i \in \mathbb{Z}$ ist.

Darüber hinaus kann man die auftretenden \mathfrak{p}_i dadurch charakterisieren, dass es, falls ein homogenes Primideal \mathfrak{p} den Annihilator von M enthält, ein i gibt, sodass $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{p}_i$.

Sei \mathfrak{p} minimal unter den Primidealen, die den Annihilator von M enthalten. Dann ist die Anzahl der Indizes i mit $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$ gleich der Länge von $M_{\mathfrak{p}}$ als $S_{\mathfrak{p}}$ -Modul.

Die Filtrierung von M aus der Proposition wird auch eine *Kompositionsreihe* genannt. Sie ist nicht eindeutig, wie man bereits am Beispiel $M = S/\mathfrak{p}_1 \oplus S/\mathfrak{p}_2$ sieht. Die zwei Zusatzaussagen sollte man als Eindeutigkeit der auftretenden Quotienten sehen, aber nur für die minimalen Primideale und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge in der Indizierung.

Beweis: Zum Existenzbeweis betrachten wir die Menge aller Untermoduln von M , die solch eine Filtrierung besitzen. Der Nullmodul gehört offenbar zu dieser Menge, die demzufolge nichtleer ist und daher ein maximales Element M' besitzt. Sei $M'' = M/M'$. Wenn dies der Nullmodul ist, sind wir fertig. Andernfalls betrachten wir die Menge \mathfrak{J} aller Annihilatorideale $I_m = \{s \in S : sm = 0\}$ zu homogenen Elementen $0 \neq m \in M''$. Da S noethersch ist, und somit aufsteigende Ketten in \mathfrak{J} stationär werden, finden wir ein $m \in M''$, sodass I_m ein maximales Element in \mathfrak{J} ist. Wir verwenden die Maximalität, um zu zeigen, dass dieses I_m ein Primideal \mathfrak{p} ist. Angenommen $ab \in I_m$ für zwei homogene Elemente $a, b \in S$ mit $b \notin I_m$. Dann ist $bm \neq 0$ und $I_m \subseteq I_{bm}$. Maximalität impliziert $I_m = I_{bm}$ und aus $a \in I_{bm}$ folgt nun $a \in I_m$, wie behauptet. Sei $\ell = \deg(m)$. Damit ist $(S/\mathfrak{p})(\ell) \cong N'' = \langle m \rangle \subset M''$ ein Untermodul. Wir definieren nun $N' \subset M$ als das Urbild von N'' unter der Quotientenabbildung $M \rightarrow M''$. Offenbar ist $M'' \subsetneq N''$ und auch N'' besitzt die gewünschte Filtrierung, im Widerspruch zur Maximalität von M'' .

Zum Beweis der zweiten Aussage bemerken wir zunächst, dass der Annihilator von $M^i/M^{i-1} = (S/\mathfrak{p}_i)(\ell_i)$ offenbar gleich \mathfrak{p}_i ist. Also ist der Annihilator von M gleich dem Durchschnitt der \mathfrak{p}_i und daraus folgt die Behauptung.

Da \mathfrak{p} minimal ist, folgt $M_{\mathfrak{p}}^i = M_{\mathfrak{p}}^{i-1}$, falls $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_i$. Andererseits, falls $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$, dann ist $M_{\mathfrak{p}}^i/M_{\mathfrak{p}}^{i-1}/\mathfrak{p} \cong (S/\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}}$ ein $S_{\mathfrak{p}}$ -modul der Länge Eins. Daraus folgt die dritte Behauptung. \square

Beweis von Satz 9.6: Sei $I(H) = \langle f \rangle$, sei $d = \deg(f) = \deg(H)$ und $M = S/(I(Y) + I(H))$. Wir verwenden die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow S/I(Y)(-d) \rightarrow S/I(Y) \rightarrow M \rightarrow 0$$

gegeben durch die Multiplikation mit d . Also ist

$$H(M, t) = H(Y, t) - H(Y, t - d).$$

Sei $\deg(Y) = e$. Also ist der führende Term von $H(M, t)$ gegeben durch

$$\frac{e}{r!}z^r - \frac{e}{r!}(z-d)^r = \frac{ed}{(r-1)!}z^{r-1}, \quad (9.3)$$

da sich die Beiträge der z^{r-1} -Terme der rechten Seite wegheben. Zum Beweis des Satzes berechnen wir den führenden Term von $H(M, t)$ nochmal, mit Hilfe der Filtrierung $0 = M^0 \subsetneq M^1 \subsetneq \dots \subsetneq M^q = M$ von M aus Proposition 9.7. Dann ist $M^i/M^{i-1} \cong S/\mathfrak{q}_i(\ell_i)$ für gewisse Primideale \mathfrak{q}_i und ganze Zahlen ℓ_i . Folglich ist

$$H(M, t) = \sum_{i=1}^q H(S/\mathfrak{q}_i, t - \ell_i).$$

Da wir nur am führenden Koeffizienten von $H(M, t)$ interessiert sind, können wir Primideale mit $\dim(Z(\mathfrak{q}_i)) < r - 1$ vernachlässigen, wir benötigen also nur den Beitrag der \mathfrak{q}_i , die einem der minimalen Primideale von M gehören, also gleich einem der \mathfrak{p}_j sind. Auch der Twist ℓ_i spielt für diesen Koeffizienten keine Rolle. Also ist

$$[x^{r-1}]H(M, t) = \frac{1}{(r-1)!} \sum_{j=1}^s \deg(Z(\mathfrak{p}_j)) \cdot \#\{i \in \{1, \dots, q\} : \mathfrak{p}_j = \mathfrak{q}_i\} \quad (9.4)$$

und da die Häufigkeiten von \mathfrak{p}_j als assoziiertes Primideal zu einem Filtrierungsschritt gerade die Länge von $M_{\mathfrak{p}_j}$ als $S_{\mathfrak{p}_j}$ -Ideal ist, folgt die Behauptung durch Vergleich von (9.3) und (9.4). \square

Wir haben in Aufgabe 9.1 diskutiert, dass jedes Element in der Gruppe $\mathrm{GL}_{n+1}(k)$ und damit auch jedes Element in $\mathrm{PGL}_{n+1}(k)$ einen Automorphismus von $\mathbb{P}^n(k)$ definiert. Als Anwendung des Satzes von Bézout zeigen wir, dass alle Automorphismen von $\mathbb{P}^n(k)$ von dieser Gestalt sind.

Proposition 9.8 *Jeder Isomorphismus $\varphi : \mathbb{P}^n(k) \rightarrow \mathbb{P}^n(k)$ ist linear, d.h. es gibt ein Element $A \in \mathrm{GL}_{n+1}(k)$, sodass $\varphi(P) = A \cdot P$.*

Beweis: Sei $H \subset \mathbb{P}^n(k)$ eine Hyperebene, also der Nullstellenort eines linearen homogenen Polynoms und $L \subset \mathbb{P}^n(k)$ eine Gerade, die nicht in H enthalten ist. Dann schneiden sich L und H in einem Punkt P nach dem Satz von Bézout und außerdem ist die Schnittmultiplizität $i(L, H; P) = 1$. Da φ ein Isomorphismus ist, schneiden sich $\varphi(L)$ und $\varphi(H)$ auch in einem Punkt mit Schnittmultiplizität Eins. Da nach Lemma 9.4 Grade von Varietäten ganzzahlig sind, muss $\deg(\varphi(H)) = 1$ sein, also wieder eine Hyperebene nach Proposition 9.5.

Durch Prä- und Postkomposition mit Elementen in $\mathrm{GL}_{n+1}(k)$ können wir ohne Einschränkung nun annehmen, dass φ die Standardkarte U_0 isomorph auf sich abbildet. Auf dieser affinen Varietät U_0 ist φ nun also durch Polynome gegeben und bildet außerdem nach dem obigen Argument affine Hyperebenen wieder auf affine Hyperebenen ab. Angewandt auf die Koordinatenhyperebenen bedeutet dies, dass die zugehörige Abbildung φ^* auf Koordinatenringen jedes x_i auf eine Potenz eines (affin) linearen Polynoms abbildet. Da andererseits φ^* als Isomorphismus von $k[x_1, \dots, x_n]$ irreduzible Polynome auf irreduzible Polynome abbildet, muss $\varphi^*(x_i)$ in der Tat (affin) linear sein. Die

Koeffizienten dieser linearen Polynome bilden die Spalten des gesuchten Elements in $GL_{n+1}(k)$. \square

10 Divisoren auf Kurven

In diesem Abschnitt führen wir mit dem Begriff von Divisoren und Divisorenklassen ein erstes wichtiges Hilfsobjekt ein, mit Hilfe dessen wir (Isomorphieklassen) algebraische Varietäten auseinanderhalten können. Wir führen den Begriff hier nur auf Kurven ein, da wir dort mit Hilfe des Satzes von Bézout einige wichtige Eigenschaften direkt beweisen können. In Abschnitt 15 werden wir sehen, dass mit dem Begriff des Geradenbündels noch einen weiteren äquivalenten Standpunkt zu Divisorenklassengruppen gibt. Der Begriff von Divisoren ist auch für höherdimensionale Varietäten wichtig. In diesem Fall muss man (bei singulären Varietäten zwischen Weil-Divisoren und Cartier-Divisoren unterscheiden (siehe [Har77], Abschnitt II.6).

Sei $C \subset \mathbb{P}^n(k)$ eine irreduzible projektive Kurve. Ein *Divisor* auf C ist eine formale Linearkombination $D = \sum_{i=1}^m a_i P_i$ von Punkten $P_i \in C$ mit ganzzahligen Koeffizienten. Die Gruppe von Divisoren wird mit $\text{Div}(C)$ bezeichnet. Auf Divisoren gibt es die natürliche Gradabbildung

$$\text{deg} : \text{div}(X) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad D \mapsto \sum_{i=1}^m a_i.$$

Ist $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ ein homogenes Polynom und C nicht in $H = Z(f)$ enthalten, so ist $Z(f) \cap C$ eine Menge von Punkten P_i auf C . Wir ordnen f den Divisor $(f) = \sum i(C, H; P_i)P_i$ zu. Nach dem Satz von Bézout ist dies ein Divisor vom Grad $\text{deg}((f)) = \text{deg}(C) \cdot \text{deg}(f)$. Dieser Divisor wird auch mit $C \cdot C'$ bezeichnet und *Schnittprodukt* der Kurven C und C' genannt.

Lemma 10.1 *Sind $f, g \in S(C)$ homogen, so ist $(fg) = (f) + (g)$.*

Beweis: Mengentheoretisch sind die Nullstellen von (fg) offenbar die Vereinigung der Nullstellen von f und g . Sei also $(fg) = \sum a_i P_i$, $(f) = \sum b_i P_i$ und $(g) = \sum c_i P_i$. Für $R_i = S(C)_{P_i}$ ist also $a_i = \ell_{R_i}(R/(fg))$, $b_i = \ell_{R_i}(R/(f))$ und $c_i = \ell_{R_i}(R/(g))$. Die Behauptung folgt also aus der exakten Sequenz

$$0 \rightarrow R/(f) \rightarrow R/(fg) \rightarrow R/(g) \rightarrow 0$$

bei der die Inklusion links durch Multiplikation mit g gegeben ist. \square

Diese Aussage liefert die Wohldefiniertheit des folgenden Begriffs. Ist $\varphi \in K(C)^*$ eine rationale Funktion, repräsentiert durch $\varphi = \frac{f}{g}$ als Quotient zweier homogener Funktionen in $S(C)$ (sagen wir vom Grad d), so sei $\text{div}(\varphi) = (f) - (g)$. Wir können diesen Divisor als Nullstellenort von φ - Polstellenort von

φ , jeweils mit Vielfachheit gezählt, interpretieren. Offenbar ist die Abbildung $K(C)^* \rightarrow \text{Div}(C)$, $\varphi \mapsto \text{div}(\varphi)$ ein Gruppenhomomorphismus. Die Bilder dieses Homomorphismus werden *Hauptdivisoren* genannt und die Bildgruppe mit $\text{Princ}(C)$ bezeichnet.

Die *Picardgruppe einer Kurve* $\text{Pic}(C)$ ist die Faktorgruppe $\text{Div}(C)/\text{Princ}(C)$. Zwei Divisoren mit gleichem Bild in $\text{Pic}(C)$ werden *linear äquivalent* genannt. Wir bezeichnen mit $\text{Div}^0(C)$ den Kern des Gradhomomorphismus. Offenbar liegen Hauptdivisoren in diesem Kern und so definieren wir

$$\text{Pic}^0(C) = \text{Div}^0(C)/\text{Princ}(C).$$

Diese Gruppe ist eine Invariante, mit der wir die feinere Struktur von projektiven algebraischen Kurven auseinanderhalten. Einen ersten Eindruck davon vermitteln die folgenden beiden Propositionen.

Proposition 10.2 Für den Fall $C \cong \mathbb{P}^1(k)$ ist die Picardgruppe isomorph zu \mathbb{Z} , d.h. es ist $\text{Pic}^0(\mathbb{P}^1(k)) = \{0\}$.

Beweis: Ist $D = \sum_{i=1}^s a_i P_i$ ein Divisor vom Grad Null mit $P_i = (x_i : y_i)$ in homogenen Koordinaten, so ist die Abbildung

$$\varphi(x : y) = \prod_{i=1}^s (xy_i - yx_i)^{a_i}$$

homogen vom Grad Null und leistet das Verlangte. \square

Proposition 10.3 Ist $C \subset \mathbb{P}^2(k)$ eine glatte kubische Kurve und $P, Q \in C$, so ist $P \sim Q$ genau dann wenn $P = Q$. Insbesondere definiert für jeden Punkt $P_0 \in C$ die Abbildung $P \mapsto P - P_0$ eine Bijektion von C nach $\text{Pic}^0(C)$.

Als Hilfsaussage benötigen wir Folgendes.

Lemma 10.4 Sei $C = Z(f) \subset \mathbb{P}^2(k)$ eine glatte kubische Kurve und $C' = Z(g)$ mit g homogen vom Grad d eine weitere Hyperfläche. Angenommen der Schnitt $C \cap C'$ enthält 3 kollineare Punkte auf der Geraden $L = Z(\ell)$. Dann gibt es ein Polynom $g' \in k[x_0, x_1, x_2]$ vom Grad $d - 1$ mit $g = \ell g' \in S(C)$.

Beweis: Nach dem Satz von Bézout ist $C' \cdot L = \sum_{i=1}^d P_i$ für nicht notwendig disjunkte Punkte P_i , darunter sagen wir P_1, P_2 und P_3 auf der Geraden L . Dann gibt es ein homogenes Polynom h vom Grad $d - 3$ in $k[x_0, x_1, x_2]$ mit $Z(h) \cdot L = \sum_{i=4}^d P_i$. (Indem man die Gerade auf $Z(x_0)$ verschiebt, sieht man sofort eine Darstellung von a als Produkt von Linearfaktoren.)

Sei nun $Q \in L$ von den P_i verschieden. Da dort weder f noch g verschwinden, gibt es eine Linearkombination $g + \lambda h f$ die bei Q verschwindet. Diese Linearkombination verschwindet also an $d + 1$ Punkten auf der Geraden $L = Z(\ell)$ und muss diese nach dem Satz von Bézout also enthalten. Also ist $g + \lambda h f = \ell g'$ für ein Polynom g' vom Grad $d - 1$ und dies ist die gesuchte Gleichheit in $S(C)$. \square

Beweis von Proposition 10.3: Angenommen die Aussage ist falsch, d.h. für ein d gibt es $f, g \in S(C)_d$ mit

i) Es gibt Punkte P_1, \dots, P_{3d-1} und $P \neq Q$, sodass

$$(f) = P_1 + \dots + P_{3d-1} + P \quad \text{und} \quad (g) = P_1 + \dots + P_{3d-1} + Q.$$

ii) Unter den Punkten P_1, \dots, P_{3d-1} sind mindestens $2d - 1$ paarweise verschieden.

Um einzusehen, dass man auch ii) ohne Einschränkung annehmen kann, verwenden wir folgenden Trick, der zwar d erhöht, aber insbesondere den Anteil an paarweise verschiedenen Punkten erhöht. Multiplizieren nämlich f und g mit dem gleichen Linearfaktor, so erhöht sich d um 1, aber die Anzahl der paarweise verschiedenen Punkte um 3.

Wir nehmen nun d minimal mit den Eigenschaften i) und ii). Falls $d = 1$, so ist sowohl $Z(f)$ als auch $Z(g)$ die Gerade durch P_1 und P_2 (bzw. die Tangente bei P_1 , falls $P_1 = P_2$) und damit $P = Q$. Also können wir $d > 1$ annehmen und die Punkte so umsortieren, dass $P_2 \neq P_3$ ist (was nach ii) möglich ist) und dass $P_1 = P_2$ gilt, falls es Gleiche unter den P_i gibt. Für eine geeignete Wahl von λ, μ können wir erreichen, dass $\lambda f + \mu g$ bei einem beliebigen vorgegebenen Punkte $R \in C$ verschwindet. Also können wir ohne Einschränkung annehmen, dass P der dritte Schnittpunkt von $\overline{P_1 P_2}$ mit C und Q der dritte Schnittpunkt von $\overline{P_1 P_3}$ mit C ist.

Damit können wir nun das Lemma anwenden und $f = f' \cdot \ell_1$ und $g = g' \cdot \ell_2$ schreiben, wobei $\ell_1 \cdot C = P_1 + P_2 + P$ und $\ell_2 \cdot C = P_1 + P_2 + Q$. Also ist

$$(f') = P_4 + \dots + P_{3d-1} + P \quad \text{und} \quad (g') = P_4 + \dots + P_{3d-1} + Q.$$

Die Elemente $f, g \in S(C)_{d-1}$ erfüllen also i), und aufgrund der Wahl von P_1 und P_2 sind unter den Punkten P_4, \dots, P_{3d-1} noch genügend viele disjunkte, sodass ii) auch erfüllt ist. \square

Die zweite Formulierung gibt eine Möglichkeit, eine Addition auf den Punkten einer elliptischen Kurve zu definieren. Die Summe zweier verschiedener Punkte P und Q ist per Definition der Punkt $P \oplus Q$, sodass $(P - P_0) + (Q - P_0) = (P \oplus Q - P_0)$. Geometrisch kann man diesen Punkt R wie folgt finden. Sei L die Gerade durch P und Q und R der dritte Schnittpunkt von L mit C . Sei L' die Gerade durch R und P_0 . Dann ist $P \oplus Q$ der dritte Schnittpunkt von L' mit C , denn aus $P + Q + R - 3P_0 = 0$ und $R + P_0 + (P \oplus Q) - 3P_0 = 0$ folgt $(P - P_0) + (Q - P_0) = (P \oplus Q - P_0)$ wie gewünscht. Es bleibt dem Leser überlassen, diese Konstruktion mit Hilfe von Tangenten auszudehnen, um geometrisch die Punkte $2P$ und $-P$ zu finden.

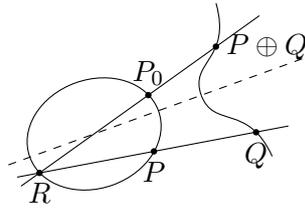


Abbildung 10.1: Addition auf Kubiken

11 Garben

Die regulären Funktionen auf einer affinen oder quasi-projektiven Varietät sind durch lokale Eigenschaften definiert, wie wir bereits in Abschnitt 5 betont haben. Damit kann man mit Hilfe von Verklebkonstruktion aus affinen Varietäten neue Varietäten bauen, wie wir im Abschnitt 12 zeigen. Nicht nur die regulären Funktionen, sondern auch zum Beispiel Differentialformen in Abschnitt 17 haben diese Eigenschaft durch lokal definierende Eigenschaften zusammengesetzt zu sein. Deswegen lohnt es sich, dafür in diesem Abschnitt eine formale Definition zu geben. Die 'Verklebefähigkeit' einer Garbe zu globalen Objekten wird später zum Begriff der Garbenkohomologie führen und damit zu feinen Invarianten von Varietäten.

Sei X ein topologischer Raum. Dabei sollte man sowohl an das Beispiel von quasi-projektiven Varietäten als auch an Beispiele von reellen oder komplexen Mannigfaltigkeiten oder auch Riemannsche Flächen denken.

Definition 11.1 Eine Prägarbe \mathcal{F} von abelschen Gruppen auf X besteht aus folgenden Objekten.

- $\mathcal{F}(\emptyset)$ ist die triviale Gruppe.
- Für jede offene Menge $U \subset X$ ist $\mathcal{F}(U)$ eine abelsche Gruppe.
- Zu jedem Paar offener Mengen $U \subset V$ gibt es Restriktionsmorphisme $\rho_U^V : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ mit folgenden Kompatibilitätsbedingungen: Es ist ρ_U^U die Identität auf $\mathcal{F}(U)$ und für je drei offene Mengen $U \subset V \subset W$ gilt $\rho_U^W = \rho_U^V \circ \rho_V^W$.

Ist $f \in \mathcal{F}(V)$, so schreiben wir oft $f|_U$ für $\rho_U^V(f)$. Die Elemente in $\mathcal{F}(V)$ werden *Schnitte* der Garbe (über V) genannt.

Man kann dies in Kategoriensprechweise formulieren, indem man die Kategorie $\text{Top}(X)$ der offenen Teilmengen von X mit Inklusionen als Morphismen definiert. Dann ist eine Prägarbe nichts anderes als ein kontravarianter Funktor $\text{Top}(X) \rightarrow \text{Ab}$ in die Kategorie der abelschen Gruppen. Ebenso definiert man Garben von Ringen (oder auch von Mengen, etc.), indem man in der obigen Definition abelsche Gruppen überall durch den entsprechenden Begriff ersetzt und die triviale Gruppe durch das terminale Objekt der Kategorie, also den trivialen Ring (bzw. die leere Menge).

Definition 11.2 Eine Prägarbe auf X wird Garbe genannt, falls für jede Überdeckung einer offenen Menge U durch $\cup_{i \in J} U_i$ folgende Eigenschaften erfüllt sind.

- Sind $f, g \in \mathcal{F}(U)$ und gilt $f|_{U_i} = g|_{U_i}$ für alle $i \in J$, so ist $f = g$.
- Gibt es Elemente $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit der Kompatibilitätsbedingung $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ für alle $i, j \in J$, so gibt es ein Element $f \in \mathcal{F}(U)$ mit $f_i = f|_{U_i}$ für alle $i \in J$.

Beispiel 11.3 Wie bereits motiviert, ist die Definition so gemacht, dass für eine affine oder quasi-projektive Varietät X die regulären Funktionen eine Garbe \mathcal{O}_X bilden, indem $\mathcal{O}_X(U)$ die regulären Funktionen auf der offenen Teilmenge U sind.

Beispiel 11.4 Ist G eine abelsche Gruppe, so führt die Definition

$$\mathcal{F}(U) = \{\text{konstante } G\text{-wertige Abbildungen}\}$$

zu einer Prägarbe, aber nicht zu einer Garbe, denn konstante Funktionen auf disjunkten Mengen U und V mit verschiedenem Funktionswert kann man nicht zu einer global konstanten Funktion verkleben. Aber

$$G(U) = \{\varphi : U \rightarrow G \text{ stetig}\},$$

wobei G mit der diskreten Topologie versehen ist, ist eine Garbe, die *konstante Garbe* mit Werte in G . Sie besteht aus den G -wertigen Funktionen, die lokal konstant sind.

Beispiel 11.5 Die regulären Funktionen, die auf einer offenen Menge U den Wert Null nicht annehmen, bilden bezüglich der Multiplikation eine abelsche Gruppe. Zusammen mit den Restriktionsabbildungen erhält man so die Garbe \mathcal{O}_X^* der *invertierbaren Funktionen*.

Der Begriff des lokalen Ring ist eine Instanz des folgenden allgemeinen Begriffs für Garben.

Ist \mathcal{F} eine Garbe auf X und P ein Punkt in X , so definieren wir auf den Paaren (U, f) von offenen Umgebungen U von P und $f \in \mathcal{F}(U)$ die Äquivalenzrelation $(U_1, f_1) \sim (U_2, f_2)$, falls es eine offene Umgebung $U \subset U_1 \cap U_2$ von P gibt mit $f_1|_U = f_2|_U$. Die Äquivalenzklassen solcher Paare werden *Keime* der Garbe \mathcal{F} im Punkt P genannt. Die Gruppe bestehend aus allen Keimen wird der *Halm* von \mathcal{F} im Punkt P genannt und mit \mathcal{F}_P bezeichnet.

Naheliegenderweise definiert man einen *Morphismus von Prägarben* $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ als eine Kollektion von Homomorphismen abelscher Gruppen $f(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$, die mit den Restriktionsabbildungen der Garben kommutieren. Zwei Garben werden *isomorph* genannt, wenn es zwischen ihnen zueinander inverse Morphismen von Garben gibt.

Proposition 11.6 Sei $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Morphismus von Garben. Dann ist f ein Isomorphismus genau dann wenn die induzierten Abbildungen $f_P : \mathcal{F}_P \rightarrow \mathcal{G}_P$ auf den Halmen für alle P Isomorphismen sind.

Diese Proposition illustriert, dass der Garbenbegriff wirklich auf lokalen Eigenschaften beruht. Für Prägarben ist die entsprechende Aussage falsch.

Beweis: Die Implikation ausgehend von einem Isomorphismus f ist offenbar richtig.

Sei also nun f_P für alle P ein Isomorphismus. Wir müssen also für jede offene Menge zeigen, dass $f|_U$ ein Isomorphismus ist. Dann ist die Kollektion dieser Umkehrabbildungen offenbar ein Morphismus von Garben. Um zu zeigen, dass $f|_U$ injektiv ist, sei $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $f(s) = 0$ gegeben. Da die Halmabbildungen injektiv sind, sind die Halme $s_P = 0$ für alle $P \in U$. Also gibt es eine Umgebung W_P von P mit $s|_{W_P}$ gleich Null. Die Menge aller solcher W_P überdeckt offenbar U . Nun verwenden wir entscheidend die Garbeneigenschaft um daraus $s = 0$ zu schliessen.

Um zu zeigen, dass $f|_U$ surjektiv ist, geben wir uns $t \in \mathcal{G}(U)$ vor. Aufgrund der Surjektivität der Halmabbildungen gibt es für jeden Punkt P in U einen Keim s_P mit $f_P(s_P) = t_P$. Das bedeutet, nach Definition von Keimen und Gleichheit von Keimen, dass es eine Umgebung V_P von P und einen Schnitt $s(P) \in \mathcal{F}(V_P)$ gibt, sodass $f(s(P)) = t|_{V_P}$ ist. Offenbar ist U von diesen Mengen V_P überdeckt. Wir betrachten nun die Durchschnitte $V_{PQ} = V_P \cap V_Q$. Dort sind $s(P)|_{V_{PQ}}$ und $s(Q)|_{V_{PQ}}$ zwei Schnitte, die unter f beide das Bild $t|_{V_{PQ}}$ haben. Da wir bereits gezeigt haben, dass f injektiv ist, muss also $s(P)|_{V_{PQ}} = s(Q)|_{V_{PQ}}$ sein. Aufgrund der Garbeneigenschaft verkleben die Schnitte $s(P) \in \mathcal{F}(V_P)$ also zu dem gesuchten Schnitt $s \in \mathcal{F}(U)$. \square

Wenn wir von Morphismen von Garben abelscher Gruppen sprechen, so wollen wir auch die Begriffe Kern, Bild und Kokern auf solche Morphismen übertragen. Ist $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Morphismus von Prägarben, so definieren $U \mapsto \text{Ker}(f(U))$, $U \mapsto \text{Coker}(f(U))$ und $U \mapsto \text{Bild}(f(U))$ die Kernprägarbe, die Kokernprägarbe und die Bildprägarbe. Ist f ein Morphismus von Garben, so ist die Kernprägarbe auch wieder eine Garbe. Allerdings ist die Kokernprägarbe und die Bildprägarbe im allgemeinen *keine* Garbe.

Um ein Beispiel dafür zu geben, führen wir noch einen Begriff ein, den des *direkten Bildes* $\varphi_*\mathcal{F}$ einer Garbe \mathcal{F} unter einer stetigen Abbildung topologischer Räume $\varphi : X \rightarrow Y$. Dann definieren wir $\varphi_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$. Ist φ zudem ein Morphismus affiner Varietäten, so definiert er durch Postkomposition eine Abbildung zwischen regulären Funktionen auf Y und regulären Abbildungen auf Y , die wir in Abschnitt 5 untersucht haben. In der hier eingeführten Sprechweise ist dies ein Garbenmorphismus

$$i^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow i_*\mathcal{O}_X, \quad f \mapsto f \circ \varphi. \quad (11.1)$$

Beispiel 11.7 Sei

$$\varphi : X = \mathbb{A}^1(k) \setminus \{0\} \rightarrow Y = \mathbb{A}^2(k) \setminus \{(0,0)\}, \quad x_1 \mapsto (x_1, 0)$$

die Inklusion. Wir überdecken Y durch die zwei affinen Varietäten $U_1 = \{x_1 \neq 0\} \subset Y$ und $U_2 = \{x_2 \neq 0\}$. Dann sind die Abbildungen

$$i^\#(U_1) : \mathcal{O}_Y(U_1) = k[x_1, \frac{1}{x_1}, x_2] \rightarrow \mathcal{O}_X(U_1 \cap X) = k[x_1, \frac{1}{x_1}]$$

und

$$i^\#(U_2) : \mathcal{O}_Y(U_2) = k[x_2, \frac{1}{x_2}, x_1] \rightarrow \mathcal{O}_X(U_2 \cap X) = 0$$

surjektiv, aber die Abbildung auf globalen Schnitten

$$i^\#(Y) : \mathcal{O}_Y(Y) = k[x_1, x_2] \rightarrow \mathcal{O}_X(X) = k[x_1, \frac{1}{x_1}]$$

ist nicht surjektiv.

Aufgabe 11.1 (4 Punkte)

(a) Seien X, Y topologische Räume, $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung und \mathcal{F} eine Garbe auf X .

Zeige: $f_*\mathcal{F}$ ist eine Garbe auf Y .

(b) Sei nun G eine abelsche Gruppe, $\{p\} \subset X$ mit konstanter Garbe \underline{G} versehen und ι die Inklusion $\{p\} \hookrightarrow X$.

Beschreibe die Schnitte der "Wolkenkratzer"-Garbe $\iota_*\underline{G}$ auf offenen Mengen, sowie ihre Halme.

Aufgabe 11.2 (4 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum, sei $j : U \hookrightarrow X$ eine Teilmenge. Zu einer Garbe \mathcal{F} auf U definieren wir die Fortsetzung durch 0, $j_!(\mathcal{F})$, als die zu der Prägarbe

$$V \mapsto \begin{cases} \mathcal{F}(V), & \text{für } V \subseteq U, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

assoziierte Garbe.

(a) Sei U abgeschlossen. Beschreibe die Halme $(j_!\mathcal{F})_p$ und $(j_*\mathcal{F})_p$ für $p \in X$.

(b) Sei nun U offen. Beschreibe die Halme $(j_!\mathcal{F})_p$ und $(j_*\mathcal{F})_p$ für $p \in X$.

(c) Sei nun \mathcal{F} eine Garbe auf X , $\iota : Z \hookrightarrow X$ eine abgeschlossene Teilmenge und $j : U = X \setminus Z \hookrightarrow X$ ihr Komplement. Zeige, dass die Sequenz

$$0 \rightarrow j_!(\mathcal{F}|_U) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \iota_*(\mathcal{F}|_Z) \rightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von Garben (auf X) ist.

Abhilfe bei diesen Prägarben schafft die folgende Konstruktion.

Sei \mathcal{F}' eine Prägarbe auf X . Die Garbifizierung von \mathcal{F}' (oder auch die zu \mathcal{F}' gehörige Garbe) ist die Garbe \mathcal{F} mit

$$\mathcal{F}(U) = \{s = (s_p)_{P \in U}, \quad s_P \in \mathcal{F}'_P, \text{ jeder Punkt } P \in U \text{ hat eine Umgebung } V, \text{ auf der es ein } s'_V \in \mathcal{F}'(V) \text{ gibt mit } s_Q = (s'_V)_Q \text{ für alle } Q \in V.\} \quad (11.2)$$

Es ist aus der Definition offensichtlich, dass \mathcal{F} in der Tat eine Garbe ist. Als Übung zeigt man, dass \mathcal{F} in geeignetem Sinne die kleinste Garbe ist die \mathcal{F}'

enthält und als solche bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Insbesondere ist $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$, falls \mathcal{F} bereits eine Garbe war. Weiterhin zeigt man, dass die Halme von \mathcal{F} und \mathcal{F}' übereinstimmen.

Aufgabe 11.3 (4 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum und \mathcal{F} eine Prägarbe auf X . Dann definieren wir

$$\pi: \mathcal{F}^{\text{ét}} = \bigsqcup_{p \in X} \mathcal{F}_p \rightarrow X$$

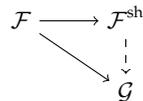
und versehen $\mathcal{F}^{\text{ét}}$ mit folgender Topologie: Für $U \subseteq X$ offen definiert jedes $s \in \mathcal{F}(U)$ eine Teilmenge $\{s_x : x \in U\} \subset \mathcal{F}^{\text{ét}}$ und wir versehen $\mathcal{F}^{\text{ét}}$ mit der kleinsten Topologie, sodass diese Teilmengen offen sind (d.h. diese Mengen bilden eine Basis der Topologie). Für jedes offene $U \subseteq X$ definieren wir

$$\widehat{\mathcal{F}}(U) = \{s: U \rightarrow \mathcal{F}^{\text{ét}} : s \text{ ist ein stetiger Schnitt, d.h. } \pi \circ s = \text{id}\}$$

und mit den offensichtlichen Restriktionen ist dies eine Prägarbe.

Sei weiterhin \mathcal{F}^{sh} die Garbifizierung von \mathcal{F} .

- (a) Zeige: $\mathcal{F}^{\text{sh}} \cong \widehat{\mathcal{F}}$, insbesondere ist $\widehat{\mathcal{F}}$ also eine Garbe.
- (b) Zeige, dass \mathcal{F}^{sh} universell in dem Sinne ist, dass es für jede Garbe \mathcal{G} und jeden Morphismus von Prägarben $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ genau einen Garbenmorphismus $\mathcal{F}^{\text{sh}} \rightarrow \mathcal{G}$ gibt, so dass das folgende Diagramm kommutiert:



- (c) Sei $\varphi: \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$ wie in der Vorlesung. Was sind die globalen Schnitte der Bildgarbe von $\varphi^\#$?

Ein weiteres Beispiel, bei dem Garbifizieren nützlich und einleuchtend ist, bildet die Prägarbe auf X , deren Schnitte über U Abbildungen $U \rightarrow k$ sind, die sich global als Quotient zweier Polynome schreiben lassen. Das Beispiel zu Beginn von Abschnitt 5 zeigt, dass dies keine Garbe ist. Die zugehörige Garbe ist per Definition die Garbe \mathcal{O}_X der regulären Funktionen.

Mit Hilfe von Garbifizierungen können wir nun die Liste der natürlichen Operationen auf Garben vervollständigen.

Das *Bild eines Garbenmorphismus* ist die Garbifizierung der Bildprägarbe, der *Kokern eines Garbenmorphismus* ist die Garbifizierung der Kokernprägarbe. Ein Garbenmorphismus ist *injektiv* falls der Kern Null ist und *surjektiv*, falls der Kokern Null ist. Eine Sequenz $(f_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ von Garbenmorphismen ist *exakt*, falls $\text{Ker}(f_i) = \text{Bild}(f_{i-1})$ ist.

Aufgabe 11.4 (4 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum und seien $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ Garben auf X .

- (a) Sei $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Morphismus von Garben.
Zeige: Für alle p ist $\text{Kern}(\varphi)_p = \text{Kern}(\varphi_p)$ und $\text{Bild}(\varphi)_p = \text{Bild}(\varphi)_p$.
- (b) Seien $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ Garbenmorphismen. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
 - (i) $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ist exakt.
 - (ii) $0 \rightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ ist exakt für jedes $U \subseteq X$ offen.

-
- (iii) $0 \rightarrow \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$ ist exakt für alle $p \in X$.
(c) Seien $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ Garben. Zeige: Die Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$$

ist genau dann exakt, wenn die entsprechenden Sequenzen

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p \rightarrow \mathcal{H}_p \rightarrow 0$$

für jedes $p \in X$ exakt sind.

- (d) Finde Prägarben \mathcal{F}, \mathcal{G} auf X , sodass $\mathcal{F}_p \cong \mathcal{G}_p$ für alle p aber \mathcal{F} *nicht* isomorph zu \mathcal{G} ist.
Finde eine exakte Sequenz von Garben $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$, die *nicht* auf allen offenen Teilmengen exakt ist.

12 Varietäten

Bisher haben wir (quasi-) affine und (quasi-)projektive Varietäten betrachtet. In beiden Fällen haben wir uns auf einen umgebenden Raum festgelegt und darin Unterobjekte definiert. Dabei kann man sich die Frage stellen, warum man gerade den affinen Raum oder den projektiven Raum als umgebendes Objekt bevorzugen soll. Den projektiven Raum haben wir durch affine Standardkarten überdeckt und als topologischen Raum können wir ihn auch wiedergewinnen, in dem man die Standardkarten an den überlappenden offenen Teilmengen verklebt. Wir werden dieses Verkleben unten genauer definieren. Der richtige Standpunkt zum Konstruieren allgemeiner Varietäten ist, dass man diese aus affinen Teilen zusammengesetzt sehen soll. Aber wir wollen nicht nur einen topologischen Raum, der auf gewissen Teilen wie eine affine Varietät aussieht, wir wollen überall einen Begriff von regulären Funktionen, damit wir die Definition von Morphismen auf allgemeine Varietäten anwenden können.

Ein *geringster Raum* (X, \mathcal{O}_X) ist ein Paar, bestehend aus einem topologischen Raum X und einer Garbe von Ringen \mathcal{O}_X auf X , deren Schnitte wir auch die regulären Funktionen auf X nennen. Eine *Prävarietät* ist ein geringster Raum, bei dem \mathcal{O}_X eine Garbe von k -wertigen Funktionen auf X ist, und der eine endliche Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ durch offene Menge besitzt, sodass $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ eine affine Varietät ist.

Der projektive Raum und damit auch alle quasi-projektiven Varietäten sind offenbar Prävarietäten.

Morphismen zwischen geringsten Räumen und Prävarietäten definieren wir wie in Abschnitt 5 dadurch, dass die Verkettung mit regulären Funktionen wieder eine reguläre Funktion ist.

Man kann sich die Prävarietät als Verklebung der affinen Teile U_i entlang der Durchschnitte $U_i \cap U_j$ vorstellen. Wir führen das für zwei Mengen aus, die Verallgemeinerung auf endlich viele ist dann offensichtlich. Seien X_1 und X_2 Prävarietäten (oder z.B. auch einfach affine Varietäten) und $U_i \subset X_i$ nichtleere

offene Mengen. Wir nehmen zudem an, dass $f : (U_1, \mathcal{O}_{X_1|U_1}) \rightarrow (U_2, \mathcal{O}_{X_2|U_2})$ ein Isomorphismus geringerer Räume ist. Dann definieren wir die *Verklebung* X von X_1 und X_2 via f wie folgt. Als Menge ist $X = X_1 \cup X_2$ mit der Relation $P \sim f(P)$ für alle P in U_1 . Als topologischen Raum versehen wir X mit der Quotiententopologie bezüglich der Quotientenabbildung $X_1 \cup X_2 \rightarrow X$. Schließlich definieren wir die Strukturgarbe durch

$$\mathcal{O}_X(U) = \{(s_1, s_2) : s_i \in \mathcal{O}_{X_i}(U \cap X_i), f^*(s_2|_{U \cap U_2}) = s_1|_{U \cap U_1}\}$$

wobei die letzte Bedingung einfach das Übereinstimmen auf den verklebten Mengen nach Identifikation via f bedeutet.

Das Verkleben erlaubt die Konstruktion von Prävarietäten mit ziemlich unerwünschten Eigenschaften, wie das folgende Beispiel zeigt. Sei $X_1 = X_2 = \mathbb{A}^1(k)$ und $U_1 = U_2 = \mathbb{A}^1(k) \setminus 0$. Wenn wir U_1 mit U_2 mit Hilfe der Identität verkleben, so kommt eine affine Gerade heraus, bei der der Nullpunkt verdoppelt ist. In der komplexen Topologie ist so ein Raum nicht Hausdorffsch. (Nebenbei bemerkt: Wenn wir bezüglich $z \mapsto 1/z$ verkleben, so erhalten wir den $\mathbb{P}^1(k)$.)

Der Varietätenbegriff ist so gemacht, dass diese Pathologie verhindert ist. Für eine beliebige Prävarietät X definieren wir die Diagonalabbildung $\Delta : X \rightarrow X \times X$ durch $P \mapsto (P, P)$. Das Bild dieser Abbildung wird *Diagonale* genannt und auch mit Δ oder mit Δ_X bezeichnet. Eine Prävarietät X wird eine *Varietät* genannt, wenn die Diagonale Δ abgeschlossen ist.

Die affine Gerade mit dem doppelten Nullpunkt ist keine Varietät, denn die Diagonale ist nicht abgeschlossen: Ihr Abschluss enthält auch die Punkte (N_1, N_2) und (N_2, N_1) , wobei N_i den Nullpunkt im Teilraum X_i bezeichnet.

Affine Varietäten (und damit auch projektive Varietäten und quasi-projektive Varietäten) sind immer noch Varietäten in diesem Sinne. Um dies einzusehen sei $Y \subset \mathbb{A}^n(k)$ die affine Varietät mit dem Verschwindungsideal $I(Y) = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$. Sind $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ die Koordinaten auf $\mathbb{A}^n(k) \times \mathbb{A}^n(k)$, so ist die Diagonale durch die Gleichungen $f_i(x_1, \dots, x_m)$ für $i = 1, \dots, m$ und $x_j = y_j$ für $j = 1, \dots, n$ ausgeschnitten und somit abgeschlossen.

Vom Standpunkt des Verklebens sind projektive Varietäten nur eines von vielen Beispielen, wie man aus affinen Varietäten eine neue Varietät bastelt. Wir wollen hier rechtfertigen, warum wir projektive Varietäten eine prominente Rolle in den vorigen Abschnitten gegeben haben, homogene Koordinatenringe untersucht usw. Wir haben in Proposition 4.8 bemerkt, dass der projektive Raum und damit jede projektive Varietät über \mathbb{C} in der klassischen Topologie kompakt ist. Die Standarddefinition von Kompaktheit ist in der Zariski-Topologie kein sinnvoller Begriff. Stattdessen erinnern wir daran, dass das stetige Bild einer kompakten Menge kompakt, und damit insbesondere abgeschlossen ist. Zum Vergleich ist das Bild einer affinen Varietät unter einem

Morphismus im Allgemeinen nicht abgeschlossen. Als Beispiel dafür nehmen wir die Hyperbel $X = Z(xy - 1) \subset \mathbb{A}^2(k)$ und den Morphismus $X \rightarrow \mathbb{A}^1(k)$ gegeben durch die Projektion auf die erste Koordinate. Das Bild ist $\mathbb{A}^1(k) \setminus \{0\}$ und damit nicht abgeschlossen.

Satz 12.1 Die Projektion $\pi : \mathbb{P}^n(k) \times \mathbb{P}^m(k) \rightarrow \mathbb{P}^n(k)$ auf die erste Koordinate ist eine abgeschlossene Abbildung, d.h. ist $X \subset \mathbb{P}^n(k) \times \mathbb{P}^m(k)$ abgeschlossen, dann ist auch $\pi(X)$ abgeschlossen.

Beweis: Sei $X \subset \mathbb{P}^n(k) \times \mathbb{P}^m(k)$ abgeschlossen. Mit Hilfe von Koordinaten der Segre-Einbettung wissen wir, dass X als die Nullstellenmenge von Polynomen $f_1(x, y), \dots, f_r(x, y)$ geschrieben werden kann, welche bihomogen in den Koordinatentupeln $x = (x_0, \dots, x_n)$ und $y = (y_0, \dots, y_m)$ sind.

Sei nun $P \in \mathbb{P}^n(k)$ ein beliebiger Punkt. Dieser ist in $\pi(X)$ wenn es eine gemeinsame Nullstelle der Polynome $f_i(P, y)$ für ein $y \in \mathbb{P}^m(k)$ gibt. Nach dem Nullstellensatz bedeutet dies, dass $P \in \pi(X)$ genau dann wenn

$$\langle y_0, \dots, y_m \rangle^s \not\subseteq \langle f_1(P, y), \dots, f_r(P, y) \rangle \quad (12.1)$$

ist. Durch Durchmultiplizieren mit Potenzen einer Variable können wir zudem annehmen, dass alle Polynome f_i in y den gleichen Grad d besitzen. Für $s < d$ gilt (12.1) trivialerweise. Wir müssen also einsehen, dass für jedes $s \geq d$ die Menge aller Punkte P , die (12.1) erfüllen, abgeschlossen ist.

Das Ideal $\langle y_0, \dots, y_m \rangle^s$ wird von allen $\binom{m+s}{m}$ Polynomen vom Grad s in den y_i erzeugt. Wir listen diese und bezeichnen sie mit $M_i(y)$. Also gilt das Gegenteil (Enthaltensein) in (12.1), falls es homogene Polynome g_{ij} vom Grad $s - d$ gibt, sodass $M_i(y) = \sum g_{ij} f_j(P, y)$. Wir listen die Kollektion von homogenen Polynomen vom Grad $s - d$ und bezeichnen sie mit $N_k(y)$. Das Gegenteil von (12.1) gilt also, falls die Polynome

$$\{N_k(y) f_j(P, y), 1 \leq k \leq \binom{m+s-d}{m}, 1 \leq j \leq r\}$$

den gesamten Vektorraum der Polynome vom Grad d aufspannen. Wenn man die Koeffizienten dieser Polynome in einer Matrix $A = A(P)$ zusammenfasst, ist also (12.1) für ein gegebenes s genau dann erfüllt, falls der Rang von $A(P)$ kleiner als $\binom{m+s}{m}$ ist. Diese Rangungleichung kann man mit Hilfe der Minoren von $A(P)$ ausdrücken, welche offenbar homogene Polynome in den Koordinaten von P sind. Damit ist $\pi(X)$, als Verschwindungsort dieser Minoren, abgeschlossen. \square

Dieser Satz wird auch als (erster) Hauptsatz der Eliminationstheorie bezeichnet, da man die Variablen y_i aus den Gleichungen $f_i(x, y)$ eliminieren muss. In dieser Sprechweise, besagt er, dass die Lösung von einem Variableneliminationsproblem in (homogenen) algebraischen Gleichungen wieder in (homogenen) algebraischen Gleichungen gegeben ist.

Um den Begriff 'universell abgeschlossen' in Abschnitt 14 zu motivieren, halten wir noch eine Verallgemeinerung dieses Satzes fest.

Korollar 12.2 Die Projektion $\pi_Y : Y \times \mathbb{P}^m(k) \rightarrow Y$ auf die erste Koordinate ist für jede Varietät Y eine abgeschlossene Abbildung.

Beweis: Wir behandeln zuerst den Fall einer affinen Varietät Y . Wir betrachten $Y \subset \mathbb{P}^n(k)$, wobei Y darin offenbar weder offen noch abgeschlossen ist. Sei $X \subset Y \times \mathbb{P}^m(k)$ abgeschlossen vorgegeben und \overline{X} der Abschluss in $\mathbb{P}^n(k) \times \mathbb{P}^m(k)$. Dann ist $\pi(\overline{X}) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ abgeschlossen. Da

$$\pi_Y(X) = \pi(\overline{X} \cap Y \times \mathbb{P}^m(k)) = \pi(\overline{X}) \cap Y$$

ist $\pi_Y(X)$ abgeschlossen in Y , und das ist die Behauptung.

Abgeschlossenheit ist eine Bedingung, die man auf einer offenen Überdeckung testen kann. Daher genügt es, den affinen Fall betrachtet zu haben. \square

13 Schemata

Obwohl wir im vorigen Abschnitt bereits den Varietätenbegriff verallgemeinert haben, werden wir hier die Kategorie der zugrundeliegenden Räume nochmals stark verallgemeinern.

Seit dem ersten Abschnitt haben wir mit dem Hilbertschen Nullstellensatz Radikalideale unterdrückt. Wir haben aber beim Satz von Bézout und beim Aufblasen des Durchschnitts zweier Varietäten in Aufgabe 6.4 gesehen, dass nilpotente Elemente wesentlich sind. Der Begriff des Schemas behält diese.

Die wichtigste Einsicht Grothendiecks, die ihn auch zur Einführung des Schemabegriffs bewogen hat, ist dass man in der algebraischen Geometrie alles relativ sehen soll. Statt einer Varietät X sollte man Morphismen $f : X \rightarrow S$ betrachten. Einen solchen Morphismus kann man als Familie von Varietäten auffassen, die Menge aller Fasern $f^{-1}(s)$ für Punkte $s \in S$. Dieser Standpunkt ist für die Klassifikationstheorie von Varietäten wichtig. Im einleitenden Beispiel der Fermat-Kurven kann man zum Beispiel anhand der Automorphismengruppen sehen, dass die Fermat-Kurven für verschiedene n nicht zueinander isomorph sind. Aber kann man sie ineinander deformieren? Kann man eine Familie $f : X \rightarrow S$ über einer zusammenhängenden Basis S bauen, so dass mehrere (alle) Fermat-Kurven X_n als Fasern dieser Familie auftauchen? Um diese Frage korrekt (und negativ) zu beantworten, benötigen wir zunächst eine brauchbare Definition des Faserbegriffs. Diesen werden wir im Zusammenhang mit dem Faserprodukt einführen, welches wiederum voraussetzt, dass S ein beliebiges Schema sein kann und nilpotente Elemente nicht ignoriert. Erst dann können wir über die Invarianz des in Abschnitt ?? eingeführten Geschlechts in Familien sprechen und damit die Fermatkurven wirklich auseinanderhalten.

Im Zuge dieser Verallgemeinerung lassen wir die Voraussetzung, dass der Grundkörper k algebraisch abgeschlossen ist, nun auch weg. Damit können wir auch algebraische Geometrie über endlichen Körpern definieren. Wir verwenden im Allgemeinen sogar gar keinen Grundkörper, sondern arbeiten einfach mit kommutativen Ringen, statt k -Algebren. Auch die (bisher ständig verwendete) Voraussetzung, dass die affinen Koordinatenringe endlich erzeugt sind, lassen wir zunächst weg und erhalten somit Objekte 'von unendlichem Typ'. Allerdings müssen wir dann eine Zusatzvoraussetzung 'von endlichem Typ' in viele Aussagen einbauen. Der Leser sollte, zumindest bei einem Schema von endlichem Typ an eine 'Varietät mit möglicherweise interessanter Struktur nilpotenter Elemente' denken.

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Das *Spektrum von R* oder das *affine Schema zu R* ist die Menge aller Primideale von R . Wir bezeichnen es mit $\text{Spec}(R)$. Damit ist beispielsweise für einen Körper k das affine Schema $\text{Spec}(k)$ ein einzelner Punkt 0 . Für $R = \mathbb{C}[x]$ erhalten wir das affine Schema $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$, welches für jeden Punkt P das Primideal $x - P$ enthält und zudem noch den Punkt (0) . Allgemein gehören maximale Ideale zu Punkten, falls R eine k -Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper ist. Nicht-maximale Ideale korrespondieren zu Untervarietäten positiver Dimension in diesem Fall. Ab diesem Abschnitt ist auch z.B. $R = \mathbb{R}[x]$ zugelassen, welches Punkte der Form $x - P$ für $P \in \mathbb{R}$ enthält, aber auch das maximale Ideal $(x^2 + 1)$.

Zu jedem Punkt \mathfrak{p} des Spektrums definieren wir den Restklassenkörper $k(\mathfrak{p}) = \text{Quot}(R/\mathfrak{p})$. Jedes Element $f \in R$ können wir damit als 'Funktion' auf $\text{Spec}(R)$ auffassen, in dem wir den 'Wert' von f bei \mathfrak{p} als das Bild von f unter der natürlichen Abbildung $R \rightarrow k(\mathfrak{p})$ definieren. Der Restklassenkörper von $\text{Spec}(\mathbb{R}[x])$ bei $x - P$ ist \mathbb{R} und bei $(x^2 + 1)$ ist er gleich \mathbb{C} .

Nun bauen wir alle Konstruktionen aus dem Abschnitt über affine Varietäten nach. Ist $S \subset R$ eine Teilmenge, so definieren wir

$$Z(S) = \{ \mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) : f(\mathfrak{p}) = 0 \text{ für alle } f \in S \}.$$

Offensichtlich hängt $Z(S)$ nur von dem von S erzeugten Ideal ab. Wie im Fall affiner Varietäten zeigt man folgendes Lemma.

Lemma 13.1 *Sei R ein Ring. Dann gilt*

- i) Sind \mathfrak{a}_i für $i \in I$ Ideale von R , dann ist $\bigcap_{i \in I} Z(\mathfrak{a}_i) = Z(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i)$.
- ii) Sind \mathfrak{a}_1 und \mathfrak{a}_2 Ideale von R , dann ist $Z(\mathfrak{a}_1) \cup Z(\mathfrak{a}_2) = Z(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2)$.
- iii) Sind $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \subseteq R$ Ideale, dann ist $Z(\mathfrak{a}_1) \subseteq Z(\mathfrak{a}_2)$ genau dann wenn $\sqrt{\mathfrak{a}_2} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}_1}$.

Damit können wir auf $\text{Spec}(R)$ die *Zariski-Topologie* definieren, in der die abgeschlossenen Mengen gerade Mengen der Form $Z(S)$ für $S \subset R$ sind. Wie

bei affinen Varietäten definieren wir zu $f \in R$ den *Nichtverschwindungsort* $D(f)$ als $X \setminus Z(f)$.

Als nächstes wollen wir auf $X = \text{Spec}(R)$ eine Strukturgarbe \mathcal{O}_X definieren. Dabei können wir nicht genau die Definition im Fall affiner Varietäten nachbauen, denn dort haben wir Funktionen $f : V \rightarrow k$ als regulär definiert, wenn sie lokal Quotient zweier Polynome waren. Hier gibt es aber keinen festgelegten Grundkörper k . Die regulären Funktionen haben wir danach auf 'kleine' offene Mengen eingeschränkt, so den lokalen Ring in jedem Punkt P definiert und diesen dann in Proposition 7.1 mit der Lokalisierung des affinen Koordinatenrings nach dem maximalen Ideal \mathfrak{m}_P identifiziert. Diese Definition der lokalen Ringe kann man auch hier verwenden und danach bauen wir reguläre Funktionen aus lokalen Daten zusammen, genau wie bei der Definition der Garbifizierung. Daher ergibt folgende Definition offensichtlich eine Garbe.

Ist $X = \text{Spec}(R)$, so ist die Strukturgarbe \mathcal{O}_X definiert für jede offene Menge $U \subset X$ als Schnitte $s = (s_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in U}$ bestehend aus einer Kollektion von Keimen $s_{\mathfrak{p}} \in R_{\mathfrak{p}}$, die sich lokal in der Form f/g mit $f, g \in R$ schreiben lassen, d.h.

$$\mathcal{O}_X(U) = \{s = (s_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in U} : s_{\mathfrak{p}} \in R_{\mathfrak{p}}, \text{ für alle } \mathfrak{p} \in U \text{ gibt es } V \subseteq U \text{ und } f, g \in R \text{ sodass für alle } \mathfrak{q} \in V \text{ gilt } g \notin \mathfrak{q} \text{ und } s_{\mathfrak{q}} = \frac{f}{g} \in R_{\mathfrak{q}}\}.$$

Mit dieser Definition ist ein affines Schema nun nicht nur eine Menge, sondern ein geringter Raum.

Nun muss man überprüfen, dass diese Strukturgarbe, die Eigenschaften hat, die wir von affinen Varietäten gewohnt sind.

Proposition 13.2 *Ist R ein Ring und $X = \text{Spec}(R)$, so ist der Halm $\mathcal{O}_{X, \mathfrak{p}}$ von \mathcal{O}_X bei \mathfrak{p} isomorph zum lokalen Ring $R_{\mathfrak{p}}$ und für jedes $f \in R$ ist $\mathcal{O}_X(D_f)$ isomorph zu R_f . Insbesondere ist $\mathcal{O}_X(X) = R$.*

Beweis: Man hat offensichtlich Abbildungen

$$\psi : \mathcal{O}_{X, \mathfrak{p}} \rightarrow R_{\mathfrak{p}}, \quad (U, s = (s_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}) \mapsto s_{\mathfrak{p}}$$

bzw.

$$\phi : R_f \rightarrow \mathcal{O}_X(D_f), \quad \frac{g}{f^r} \mapsto \left(\frac{g}{f^r}\right)_{\mathfrak{p} \in D_f}$$

von denen man zeigen muss, dass sie bijektiv sind. Insbesondere die Surjektivität ist nicht ganz offensichtlich. Der Beweis ist in [Har77, Proposition II.2.2] gegeben. \square

Wir verfolgen weiter die Vorgehensweise bei affinen Varietäten und definieren nun Morphismen zwischen affinen Schemata. Dort konnten wir einfach stetige Funktionen f verwenden, sodass die zugehörige Abbildung $f^{\#}$ wie im vorigen Abschnitt definiert, reguläre Funktionen auf reguläre Funktionen abbildet. Dies ist hier nicht möglich, da reguläre Funktionen Werte in beliebigen

Körpern haben, die nicht miteinander vergleichbar sind. Wir wollen also die Abbildung $f^\#$ mit in das Datum eines Morphismus aufnehmen. Dazu verlangen wir genügend viel Kompatibilität mit der stetigen Abbildung, dass die untenstehende Proposition 13.3, wie aus dem Fall affiner Varietäten gewohnt, gilt.

Ein *lokal geringter Raum* ist ein geringter Raum (X, \mathcal{O}_X) sodass an jedem Punkt $P \in X$ der Halm $\mathcal{O}_{X,P}$ ein lokaler Ring ist. Wir bezeichnen (weiterhin) das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{X,P}$ mit $\mathfrak{m}_{X,P}$ und den Restklassenkörper $\mathcal{O}_{X,P}/\mathfrak{m}_{X,P}$ mit $k(P)$. Mit dieser Definition ist ein affines Schema nun nicht nur ein geringter Raum, sondern genauer ein lokal geringter Raum nach Proposition 13.2.

Ein *Morphismus lokal geringter Räume* zwischen (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) ist ein Paar $(f, f^\#)$ bestehend aus einer stetigen Abbildung $f : X \rightarrow Y$ und einem Garbenmorphismus $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$, sodass die induzierten Abbildungen $f_P^\# : \mathcal{O}_{Y,f(P)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,P}$ auf den Halmen lokale Homomorphismen sind. Dabei wird ein Homomorphismus $\varphi : R \rightarrow S$ zwischen lokalen Ringen lokal genannt, falls $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_S) = \mathfrak{m}_R$ ist. Ein *Morphismus von affinen Schemata* ist ein Morphismus lokal geringter Räume.

Proposition 13.3 *Seien $X = \text{Spec } R$ und $Y = \text{Spec } S$ affine Schemata. Dann gibt es eine funktorielle, pfeilrichtungsinvertierende Bijektion zwischen Morphismen $X \rightarrow Y$ und Ringhomomorphismen $S \rightarrow R$.*

Beweis: Ist $\varphi : S \rightarrow R$ ein Ringhomomorphismus, so definieren wir $f : X \rightarrow Y$ durch $f(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$. Damit ist $f^{-1}(Z(\mathfrak{a})) = Z(\varphi(\mathfrak{a}))$ für jedes Ideal \mathfrak{a} von S und somit ist f stetig. Die Lokalisierung von φ bei einem Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ gibt einen Homomorphismus $\varphi_{\mathfrak{p}} : S_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} \rightarrow R_{\mathfrak{p}}$. Sei $V \subset Y$ offen vorgegeben. Nach Definition der Strukturgarben gibt das Produkt dieser Homomorphismen für alle $\mathfrak{p} \in f^{-1}(V)$ einen Homomorphismus $\mathcal{O}_Y(V) \rightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$. Man überprüft dazu noch, dass falls ein Schnitt in $\mathcal{O}_Y(V)$ lokal durch s_1/s_2 mit $s_i \in S$ gegeben ist, so ist das Bild durch $\varphi(s_1)/\varphi(s_2)$ gegeben. Diese Homomorphismen sind offenbar mit Einschränkungsabbildungen verträglich und definieren den gesuchten Garbenmorphismus $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$. Da die zugehörige Abbildung auf den Halmen gerade der lokale Homomorphismus $\varphi_{\mathfrak{p}}$ ist, ist $f^\#$ in der Tat ein Morphismus lokal geringter Räume.

Gegeben sei nun ein Morphismus $(f, f^\#)$ lokal geringter Räume. Aufgrund der letzten Aussage in Proposition 13.2 ist $f^\#(\text{Spec}(S))$ ein Homomorphismus $\varphi : S \rightarrow R$.

Wir müssen nun noch prüfen, dass die Zuordnungen zueinander invers sind. Ausgehend von einem Ringhomomorphismus ist das offensichtlich, vgl. die obige Bemerkung über das Bild eines Schnittes s_1/s_2 . Ausgehend von $(f, f^\#)$ erhalten wir $\varphi = f^\#(\text{Spec}(S))$. Die Halmabbildungen $f_{\mathfrak{p}}^\# : S_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} \rightarrow R_{\mathfrak{p}}$ sind also durch Lokalisieren von φ entstanden. Aufgrund der Vorausset-

zung, dass $f_{\mathfrak{p}}^{\#}$ ein lokaler Homomorphismus ist, muss $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) = f(\mathfrak{p})$ sein. Damit haben wir f aus φ zurückgewonnen. Da aber der Garbenmorphismus $f^{\#}$ nach Definition der Strukturgarbe durch die Halmmorphismen bestimmt ist, gewinnen wir diesen auch aus φ zurück. Insgesamt zeigt dies die Bijektivität der Zuordnungen. \square

Schließlich definieren wir ein (allgemeines) *Schema* als einen lokal geringten Raum (X, \mathcal{O}_X) , der eine offene Überdeckung durch Mengen U_i besitzt, sodass $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ ein affines Schema ist. Auch hier ist ein *Morphismus von Schemata* ein Morphismus lokal geringter Räume.

Nach der Terminologie des vergangenen Abschnitts sollte man konsequenterweise das eben definierte Objekt ein Präschema nennen und für Schemata eine abgeschlossene Diagonale. Dies ist in älterer Literatur manchmal üblich, inzwischen ist es aber üblich geworden, ein Schema mit abgeschlossener Diagonale *separiert* zu nennen.

Wir halten noch fest, dass wir zum Verkleben von Prävarietäten lediglich einen Morphismus von geringten Räumen auf den Verklebemengen verwendet haben. Folglich können wir diese Konstruktion wörtlich auf Schemata übertragen.

Damit das Konzept von Schemata eine Verallgemeinerung des Varietätenkonzepts ist, sollten Prävarietäten stets Schemata sein, und Varietäten stets separierte Schemata. Dies ist auch richtig, allerdings muss man beim Vergleich der topologischen Räume aufpassen, denn die Punkte einer Varietät sind nur die abgeschlossenen Punkte des zugehörigen Schemas. Ausserdem müssen wir den Grundkörper festhalten. Diese leistet folgender Begriff.

Sei S ein Schema. Ein *Schema über S* ist ein Schema X zusammen mit einem Morphismus $X \rightarrow S$. Morphismen von Schemata über S sind Morphismen, die mit der Abbildung nach S kommutieren. Die Schemata über S bilden eine Kategorie, die wir mit $\mathfrak{Sch}(S)$ bezeichnen. Ist $S = \text{Spec}(A)$ affin, so ist insbesondere im Fall $A = k$ ein Körper auch die Bezeichnung $\mathfrak{Sch}(k)$ gebräuchlich.

Proposition 13.4 *Ist k ein algebraisch abgeschlossener Körper, so gibt es einen volltreuen Funktor $t : \mathfrak{Var}(k) \rightarrow \mathfrak{Sch}(k)$ der einer Prävarietät X mit Grundkörper k ein Schema über k zuordnet. Die Punkte des topologischen Raums, der $t(X)$ zugrunde liegt, sind die abgeschlossenen Teilmengen von X und die regulären Funktionen auf $t(X)$ sind die Restriktion der regulären Funktionen auf X auf diesen Teilraum.*

Beweis: Wir beginnen mit den zugrundeliegenden topologischen Räumen. Wir definieren $t(X)$ als die Menge der nichtleeren abgeschlossenen Teilmenge von X . Diese Mengen machen wir zu einem topologischen Raum, indem wir die abgeschlossenen Mengen als die Mengen der Form $t(Y)$ für $Y \subseteq X$ abgeschlossen definieren. Zu einer stetigen Abbildung $f : X_1 \rightarrow X_2$ basteln wir eine Abbildung $t(f) : t(X_1) \rightarrow t(X_2)$, indem wir eine irreduzible abgeschlossene Menge auf den Abschluss des Bildes schicken. Man überprüft, dass diese

Abbildung wieder stetig ist. Damit haben wir den topologischen Teil der Abbildung t .

Zur Konstruktion von Strukturgarben verwenden wir das gleiche Prinzip und definieren zunächst eine stetige Abbildung $\alpha : X \rightarrow t(X)$, indem wir eine irreduzible abgeschlossene Menge auf den Abschluss des Bildes schicken.

Sei also nun X eine Prävarietät. Wir wollen zeigen, dass $(t(X), \alpha_*(\mathcal{O}_X))$ ein Schema ist. Da Prävarietäten durch affine Varietäten überdeckt sind und der Schemabegriff auch mit Überdeckungen definiert ist, genügt es den Fall einer affinen Varietät X mit Koordinatenring $A = A(X)$ zu betrachten. Wir definieren das Pendant zu α auf einer solchen affinen Teilmenge, d.h. einen Morphismus lokal geringter Räume

$$\beta : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow Y = \text{Spec}(A)$$

wie folgt. Auf Punkten sei dies $\beta(P) = \mathfrak{m}_P$, das maximale Ideal, das zu P gehört. Dies ist eine Bijektion auf die Menge der abgeschlossenen Punkte und ein Homöomorphismus auf das Bild. Sei nun $U \subset Y$ gegeben. Wir wollen eine Abbildung

$$\beta^\# : \mathcal{O}_Y(U) \rightarrow \beta_*\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(\beta^{-1}(U))$$

definieren. Sei $s \in \mathcal{O}_Y(U)$ vorgegeben und $P \in \beta^{-1}(U)$. Wir definieren den Wert von $\beta^\#(s)$ im Punkt P , indem wir den Halm $s_P \in \mathcal{O}_{Y,P} \cong A_{\mathfrak{m}_P}$ nehmen und ihn modulo \mathfrak{m}_P reduzieren, um so ein Element von k zu bekommen. Dass wir so in der Tat eine reguläre Funktion definiert haben, liegt an der Definition von $\mathcal{O}_Y(U)$, denn die Schnitte dort sind lokal in einer Umgebung Quotienten von Elementen von A . Man überprüft nun, dass $\mathcal{O}_Y(U) = \mathcal{O}_X(\beta^{-1}(U))$ gilt.

Um den Morphismus nach $\text{Spec}(k)$ anzugeben ist auf der Seite der topologischen Räume nichts zu tun (alles wird auf einen Punkt abgebildet) und wir müssen einen Homomorphismus $k \rightarrow \mathcal{O}_{t(X)}(t(X))$ angeben. Auf jedem affinen Teil $t(V)$ von $t(X)$ mit Koordinatenring einer k -Algebra $A = A(V)$ ist $\mathcal{O}_{t(X)}(t(V)) = A$ und der gesuchte Ringhomomorphismus $k \rightarrow A$ ist die k -Algebreninklusion.

Die Verifikation der restlichen Behauptungen verbleibt als Übung. \square

Mit dem gleichen Beweis zeigt man auch die folgende, stärkere Version von Proposition 13.3, in der nur das Bild des Schemamorphismus als affin vorausgesetzt wird, analog zu Korollar 5.5.

Korollar 13.5 *Sei $Y = \text{Spec } S$ ein affines und X ein beliebiges Schema. Dann gibt es eine funktorielle, pfeilrichtungsinvertierende Bijektion zwischen Morphismen $X \rightarrow Y$ und Ringhomomorphismen $S \rightarrow \mathcal{O}_X(X)$.*

Beispiel 13.6 Wir bezeichnen mit $\mathbb{A}_k^r = \text{Spec}(k[x_1, \dots, x_r])$ das Schema des affinen Raums der Dimension r über einem beliebigen Körper k . Die Notation unterscheidet sich bewusst von der Notation $\mathbb{A}^r(k)$ für die Varietät, die wir als affinen Raum der Dimension r in Abschnitt 2 eingeführt haben,

Zum Schluss noch ein paar Vokablen in der Schemasprache. Ein Schema wird *zusammenhängend* bzw. *irreduzibel* genannt, falls der zugrundeliegende topologische Raum diese Eigenschaft hat. Ein Schema X wird *reduziert* genannt, falls für alle $U \subset X$ offen, der Ring $\mathcal{O}_X(U)$ keine nilpotenten Elemente besitzt. Das Schema X wird *integer* genannt, falls für alle $U \subset X$ offen, der Ring $\mathcal{O}_X(U)$ ein Ganzheitsring ist. Man zeigt, dass X integer ist, genau dann wenn es reduziert und irreduzibel ist.

Ein Schema X ist *lokal noethersch*, falls es von affinen Schemata $U_i = \text{Spec}(A_i)$ überdeckt werden kann, wobei die Ringe A_i noethersch sind. Das Schema X wird *noethersch* genannt, falls es eine solche Überdeckung mit endlich vielen U_i gibt. Man kann nun zeigen:

Proposition 13.7 *Ein Schema ist lokal noethersch, genau dann wenn für jede offene Teilmenge $U \subset X$ der Form $U = \text{Spec}(A)$ der Ring A noethersch ist.*

Beweis: Siehe z.B. [Har77, Proposition II.3.2]. □

14 Tensorprodukte und Fasern

Die korrekte Definition der Faser eines Morphismus war eine der Motivationen zur Einführung der Schemasprache. Bisher haben wir bereits Produkte von affinen und quasi-projektiven Varietäten betrachtet und mit Hilfe der Segre-Einbettung wieder als quasi-projektive Varietät erkannt. Dies verallgemeinern wir nun auf beliebige Schemata über einem gemeinsamen Basisschema S .

Seien $f_X : X \rightarrow S$ und $f_Y : Y \rightarrow S$ Schemata über S . Ein Schema wird *Faserprodukt* von X und Y über S genannt und mit $X \times_S Y$ bezeichnet, falls es Morphismen $p_X : X \times_S Y \rightarrow X$ und $p_Y : X \times_S Y \rightarrow Y$ mit $f_X \circ p_X = f_Y \circ p_Y$ gilt und folgende universelle Abbildungseigenschaft erfüllt ist. Ist Z ein Schema mit Morphismen $q_X : Z \rightarrow X$ und $q_Y : Z \rightarrow Y$, sodass $f_X \circ q_X = f_Y \circ q_Y$ gilt, dann gibt es genau einen Morphismus $h : Z \rightarrow X \times_S Y$ mit $q_X = p_X \circ h$ und $q_Y = p_Y \circ h$.

Proposition 14.1 *Das Faserprodukt zweier Schemata über S existiert und ist bis auf Isomorphie eindeutig.*

Beweis: Die Eindeutigkeit bis auf Isomorphie ist unmittelbare Konsequenz der Definition eines Faserprodukts durch eine universelle Abbildungseigenschaft.

Wir konstruieren das Faserprodukt in mehreren Schritten. Im ersten Schritt seien $S = \text{Spec}(R)$, $X = \text{Spec}(A)$ und $Y = \text{Spec}(B)$ alle affin. Dann behaupten wir, dass $X \times_S Y = \text{Spec}(A \otimes_R B)$ ist. Die Abbildungen ψ_A bzw. ψ_B von A bzw. B in das Tensorprodukt definieren die gesuchten Abbildungen p_X und

p_Y nach Proposition 13.3. Das Datum (Z, q_X, q_Y) ist nach Korollar 13.5 äquivalent zu Ringhomomorphismen $\phi_A : A \rightarrow O_Z(Z)$ und $\phi_B : B \rightarrow O_Z(Z)$, die nach Präkomposition mit dem Morphismus $R \rightarrow A$ bzw. $R \rightarrow B$ übereinstimmen. Nach Definition des Tensorprodukts gibt es also genau eine Abbildung $\phi : A \otimes_R B \rightarrow O_Z(Z)$, sodass $\phi \circ \psi_A = \phi_A$ und $\phi \circ \psi_B = \phi_B$. Übersetzt in die Sprache von Morphismen zwischen Schemata gibt dies wieder mit Korollar 13.5 genau die gesuchte Abbildung $Z \rightarrow \text{Spec}(A \otimes_R B)$.

Im zweiten Schritt fangen wir an, diese Konstruktionen zu verkleben. Wir starten mit folgender Beobachtung. Um einen Morphismus $f : X_1 \rightarrow X_2$ zwischen zwei Schemata anzugeben, genügt es eine Kollektion von Morphismen $f_i : U_i \rightarrow X_2$ auf einer offenen Überdeckung $U_i, i \in I$ anzugeben, die auf den Durchschnitten $U_i \cap U_j$ übereinstimmt. Dabei verwenden wir wesentlich die Garbeneigenschaft der Strukturgarben. Die zweite Vorbemerkung ist, dass falls $X \times_S Y$ existiert und $U \subset X$ offen ist, dann ist $p_X^{-1}(U)$ das Faserprodukt $U \times_S Y$. Dies zeigt man, indem man Morphismen $Z \rightarrow p_X^{-1}(U)$ mit der Inklusion $p_X^{-1}(U) \rightarrow X \times_S Y$ verkettet und dort die universelle Abbildungseigenschaft anwendet.

Wir nehmen nun an, dass wir für eine offene Überdeckung X_i von X gezeigt haben, dass die Faserprodukte $X_i \times_S Y$ existieren und wollen zeigen, dass $X \times_S Y$ existiert. Dazu müssen wir diese entlang der Überlappungen verkleben. Sei also $X_{ij} = X_i \cap X_j$ und $U_{ij} = p_X^{-1}(X_{ij})$. Dann ist nach der zweiten Vorbemerkung sowohl U_{ij} als auch U_{ji} das Faserprodukt von $X_{ij} = X_{ji}$ mit Y über S . Wir verwenden nun, dass Faserprodukte bis auf Isomorphie eindeutig sind und erhalten einen Isomorphismus von Schemata $\varphi_{ij} : U_{ij} \rightarrow U_{ji}$. Entlang dieser Isomorphismen können wir nun die Faserprodukte $X_i \times_S Y$ zu $X \times_S Y$ verkleben. Wir weisen nun die Abbildungseigenschaft davon nach. Sei also (Z, q_X, q_Y) gegeben. Dann definieren wir $Z_i = q_X^{-1}(X_i)$ und erhalten nach Definition von $X_i \times_S Y$ Morphismen $h_i : Z_i \rightarrow X_i \times_S Y$, die mit den Projektionen auf X und Y vertauschen. Diese stimmen auf $Z_i \cap Z_j$ überein, denn dort ist der Morphismus eindeutig, aufgrund der Abbildungseigenschaft von $X_{ij} \times_S Y = X_{ji} \times_S Y$. Also verkleben die h_i zu einem Morphismus $h : Z \rightarrow X \times_S Y$, der die gewünschte Eigenschaft $q_X = p_X \circ h$ und $q_Y = p_Y \circ h$ hat.

Dieses Prinzip wenden wir ausgehend vom Fall, dass alle beteiligten Schemata affin sind, an. Seien also S und Y affin und X durch affine X_i überdeckt. Dann existiert also das Faserprodukt $X \times_S Y$. Durch Vertauschen der Rollen können wir nun Y beliebig und X durch affine X_i überdeckt behandeln und erhalten somit die Existenz des Faserprodukts, wenn wir nur S affin voraussetzen.

Im letzten Schritt überdecken wir also S durch affine Schemata S_i , setzen $X_i = f_X^{-1}(S_i)$ und $Y_i = f_Y^{-1}(S_i)$, und verwenden die Faserprodukte $F_i = X_i \times_{S_i} Y_i$, die nach den bisherigen Schritten existieren. Wir behaupten

ten, dass $F_i = X_i \times_S Y$ ist. Um das einzusehen, seien $q_{X,i} : Z \rightarrow X_i$ und $q_{Y,i} : Z \rightarrow Y$ Morphismen mit $f_X \circ q_{X,i} = f_Y \circ q_{Y,i}$. Dann muss notwendigerweise das Bild von $q_{Y,i}$ in $f_Y^{-1}(S_i) = Y_i$ enthalten sein, also haben wir Morphismen $q_{Y,i} : Z \rightarrow Y_i$, die mit den Abbildungen nach S_i vertauschen. Damit gibt die Faserprodukteigenschaft von F_i auch die gesuchte eindeutige Abbildung $Z \rightarrow X_i \times_S Y$. Eine weitere Anwendung des allgemeinen Verklebprinzips beweist nun die Existenz des Faserprodukts $X \times_S Y$. \square

Um die Faser eines Morphismus $f : X \rightarrow S$ von Schemata zu definieren, machen wir uns zunächst klar, dass jeder Punkt P des topologischen Raumes S einen Morphismus von Schemata $\text{Spec } k(P) \rightarrow S$ definiert, wobei $k(P)$ der Restklassenkörper von P ist.

Ist $f : X \rightarrow S$ ein Morphismus, so definieren wir die *Faser* X_s von s über dem Punkt $s \in S$ als

$$X_s = X \times_S \text{Spec}(k(s)).$$

Damit wird X_s zu einem Schema über dem Körper $k(s)$ und man sieht leicht ein, dass der zugrundeliegende topologische Raum gerade $f^{-1}(s)$ ist.

Beispiel 14.2 Sei $X = \text{Spec}(k[x, y, t]/(x^2 - ty))$ und $Y = \text{Spec}(k[t])$ und $f : X \rightarrow Y$ gegeben durch die Inklusion von k -Algebren $t \mapsto t$. Dann sind X und Y integer und f surjektiv. Für $a \in k^\times$ ist $X_a = \text{Spec}(k[x, y]/(x^2 - ay))$, also die Parabel $ay = x^2$ in der affinen Ebene, und ein integeres Schema. Für $a = 0$ ist die Faser $X_0 = \text{Spec}(k[x, y]/(x^2))$ ein nicht-reduziertes Schema, eine verdoppelte Gerade.

Die folgenden Bemerkungen wurden in der Vorlesung aus Zeitmangel nur implizit und skizzenhaft verwendet, bzw. auf die Literatur insbesondere [Har77], Abschnitt II.4 und II.7 verwiesen.

Wir definieren nun mit Hilfe des Tensorprodukts die relative Version dessen, was 'so abgeschlossen ist wie ein projektiver Raum', was also die Eigenschaft in Korollar 12.2 nachbildet.

Ein Morphismus $f : X \rightarrow Y$ wird *eigentlich* (englisch: proper) genannt, falls er separiert ist (d.h. das Bild der Diagonale $\Delta : X \rightarrow X \times_Y X$ ist abgeschlossen, falls er von endlichem Typ ist (d.h. Y kann durch eine endliche Menge affiner Schemata $V_i = \text{Spec}(A_i)$ überdeckt werden, deren f -Urbild durch affine Schemata $U_{ij} = \text{Spec}(B_{ij})$ überdeckt werden, sodass B_{ij} eine endlich erzeugte A_i -Algebra ist) und (vor allem!) falls f universell abgeschlossen ist (d.h. für jeden Morphismus ('Basiswechsel') $Z \rightarrow Y$ ist $f_Z : X \times_Y Z \rightarrow Z$ universell abgeschlossen).

Beispielsweise ist die Projektion $\mathbb{A}_k^1 \rightarrow \text{Spec}(k)$ abgeschlossen, aber nicht universell abgeschlossen, wie man an der Hyperbel nach Basiswechsel mit $\mathbb{A}_k^1 \rightarrow \text{Spec}(k)$ sieht.

Es fehlt eine Diskussion der Bewertungskriterien für separierte und eigentliche Morphismen und damit die Verkettungseigenschaften solcher Morphismen. Das wichtige Beispiel projektiver Morphismen wird am Ende von Abschnitt 16 kurz angerissen.

15 Vektorbündel und kohärente Garben

In Abschnitt 11 haben wir Garben definiert, aber außer der Strukturgarbe (und Garben die durch Morphismen daraus hervorgehen) fast keine Beispiele oder Konstruktionen kennengelernt. Ziel dieses Abschnitts ist den Werkzeugkasten zur Konstruktion von Garben stark zu erweitern. Die wichtigsten Beispiele, die bei der Klassifikation von Varietäten vorkommen, werden uns dann im übernächsten Abschnitt über Differentialformen begegnen.

Sei (X, \mathcal{O}_X) ein geringter Raum. Eine \mathcal{O}_X -Modul ist eine Garbe \mathcal{F} auf X , sodass $\mathcal{F}(U)$ ein $\mathcal{O}_X(U)$ -Modul für alle offenen $U \subseteq X$ ist und sodass die Restriktionsmorphisme kompatibel mit der Modulstruktur sind. Homomorphismen zwischen \mathcal{O}_X -Moduln sind Garbenmorphisme, die mit den \mathcal{O}_X -Modulstrukturen verträglich sind.

Die Kategorie der \mathcal{O}_X -Moduln ist abgeschlossen unter 'allen erdenklichen' Operationen. Kerne, Kokerne, Bilder, direkte Summen, direkte Produkte, inverse Limiten von \mathcal{O}_X -Moduln sind wieder \mathcal{O}_X -Moduln. Sind \mathcal{F} und \mathcal{G} zwei \mathcal{O}_X -Moduln, so definieren wir das Tensorprodukt $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ als die Garbe zur Prägarbe $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$. Wir definieren die Hom-Garbe $\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ durch $U \mapsto \text{Hom}(\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U))$. (Hierbei müssen wir nicht nochmal Garbifizieren.) Tensorprodukt und Hom-Garbe sind wiederum \mathcal{O}_X -Modulgarben.

Eine *freie Garbe* ist eine Garbe, die isomorph zu $\mathcal{O}^{\oplus n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ist. Dabei wird n der *Rang* der freien Garbe genannt. Während dies ein relativ banaler Begriff ist, definiert der folgende Begriff eine große Klasse wichtiger Beispiele.

Eine *lokalfreie Garbe* ist eine Garbe \mathcal{F} , zu der es eine Überdeckung von X durch offene Mengen U_i gibt, sodass die Einschränkung $\mathcal{F}|_{U_i}$ frei ist. Falls X zusammenhängend ist, ist der Rang einer lokalfreien Garbe auf jeder trivialisierenden offenen Menge gleich.

Das Hauptkonstruktionsprinzip für Beispiele ist, dass Modulgarben auf affinen Schemata nichts anderes als Moduln sind. Die folgende Konstruktion sollte an die der Garbifizierung erinnern.

Sei R ein Ring und M ein R -Modul. Dann definieren wir die zu M assoziierte Garbe \widetilde{M} wie folgt. Auf einer offenen Menge U ist ein Schnitt von $\widetilde{M}(U)$ ein Produkt von Schnitten in den Halmen zu den Punkten in U mit der Konsistenzbedingung, dass die Schnitte in den Halmen auf kleinen Umgebungen

sich als globale Quotienten schreiben lassen. Präzise gesagt,

$$\begin{aligned} \widetilde{M}(U) = \{s = \{s_p\}_{p \in U}, s_p \in M_p \text{ und für all } p \text{ gibt es eine Umgebung} \\ V \subseteq U \text{ und } m \in M, r \in R, \text{ sodass} \\ s_q = m/r \text{ und } r \notin \mathfrak{q} \text{ für alle } \mathfrak{q} \in V\}. \end{aligned}$$

Die folgende Proposition zeigt man mit den gleichen Argumenten wie Proposition 13.2, siehe [Har77], Proposition 5.1.

Proposition 15.1 *Ist M ein R -Modul und $X = \text{Spec}(R)$, so ist für jeden Punkt $\mathfrak{p} \in X$ der Halm von \widetilde{M} bei \mathfrak{p} gleich der Lokalisierung $M_{\mathfrak{p}}$. Die Schnitte $\widetilde{M}(X_f)$ der Garbe über auf den Nichtverschwindungsort von $f \in R$ sind gerade M_f . Insbesondere ist $\widetilde{M}(X) = X$.*

Eine Garbe \mathcal{F} von \mathcal{O}_X -Moduln, die lokal von dieser Konstruktion herkommt, sodass also für jede affine offene Teilmenge $U \subset X$ die Einschränkung $\mathcal{F}|_U$ von der Form \widetilde{M}_U für einen $\mathcal{O}_X(U)$ -Modul M_U ist, wird *quasi-kohärent* genannt. Man kann zeigen ([Har77] Proposition 5.4), dass Quasi-Kohärenz eine lokale Eigenschaft ist, dass also \mathcal{F} bereits quasi-kohärent ist, falls eine offene Überdeckung von X existiert, sodass auf den Überdeckungsmengen $\mathcal{F}|_U$ von der Form \widetilde{M}_U für einen $\mathcal{O}_X(U)$ -Modul M_U ist. Eine quasi-kohärente Garbe wird *kohärent* genannt, wenn zudem die Moduln M_U endlich erzeugt sind.

Nicht alle \mathcal{O}_X -Moduln sind quasi-kohärent. Wir betrachten dazu $X = \mathbb{A}_k^1$, $j : U = X \setminus \{0\} \rightarrow X$ die Inklusion und $\mathcal{F} = j_! \mathcal{O}_U$ die Fortsetzung durch Null, wie in Aufgabe 11.2 definiert. Der einzige globale Schnitt dieser Garbe ist der Nullschnitt. Wenn $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ wäre, müsste nach der obigen Proposition $M = 0$ sein, was aber offensichtlich nicht sein kann.

Lokalfreie Garben sind offenbar auch kohärent, aber nicht alle (quasi-) kohärenten Garben sind lokalfrei.

Beispiel 15.2 Die Wolkenkratzergarbe auf $X = \mathbb{P}_k^1$ (vgl. Aufgabe 11.1) mit nichttrivialem Halm genau beim Punkt $P = (0 : 1)$ ist kohärent, aber nicht lokal-frei. Auf der offenen Menge $U_0 = X \setminus P$ ist sie offenbar die assoziierte Garbe zum Nullmodul und auf $U_1 = X \setminus \{(1 : 0)\} \cong \text{Spec}(k[x_1])$ betrachten wir den Modul $M_1 = k$ mit der Modulstruktur $f \cdot \lambda = f(0)\lambda$ für $f \in k[x_1]$ und $\lambda \in M_1$. Dann ist offenbar die assoziierte Garbe zu M_1 gerade die Einschränkung der Wolkenkratzergarbe

Wir können dieses Beispiel auch anders motivieren. Lokalfreie Garben kommen beim Studium von (nicht-singulären) algebraischen Varietäten 'als Erstes' bzw. 'am häufigsten' vor und man kann sie sich mit der Vektorbündelperspektive (siehe unten) am einfachsten vorstellen. Lokalfreie Garben sind auch unter vielen Operationen abgeschlossen.

Die direkte Summe und das direkte Produkt lokalfreier Garben ist lokalfrei. Das Tensorprodukt zweier lokalfreier Garben ist lokalfrei. Sind \mathcal{F} und \mathcal{G} lokalfrei, so ist die Hom-Garbe $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ wieder lokalfrei. Als Spezialfall hiervon definieren wir die *duale Garbe* von \mathcal{F} also $\mathcal{F}^\vee = \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ und es gilt $(\mathcal{F}^\vee)^\vee \cong \mathcal{F}$. Auch der Kern eines Morphismus zwischen lokalfreien Garben ist wieder lokalfrei.

Aber der Kokern eines Morphismus zwischen lokalfreien Garben ist im Allgemeinen nicht lokalfrei. Dazu betrachten wir $Y = \mathbb{A}_k^1 = \text{Spec}(k[x_1])$ und den Morphismus zwischen den Strukturgarben der durch Multiplikation mit x_1 definiert wird. Der Kokern dieses Morphismus ist die Rang-1-Wolkenkratzergarbe im Nullpunkt, die kein Vektorbündel aber eine kohärente Garbe ist, wie wir im vorangehenden Beispiel gesehen haben.

Bei quasi-kohärenten Garben tritt dieses Problem nicht auf. Man kann sich die folgende Proposition unter dem Slogan 'Kohärente Garben bilden eine abelsche Kategorie' merken.

Proposition 15.3 *Sei R ein Ring, $X = \text{Spec}(R)$ und M, N seien R -Moduln.*

- i) *Es gibt eine Bijektion zwischen $\text{Mor}_{R\text{-Mod}}(M, N)$ und $\text{Mor}_{\mathcal{O}_X\text{-Mod}}(\widetilde{M}, \widetilde{N})$.*
- ii) *Eine kurze Sequenz von R -Moduln ist exakt genau dann wenn die kurze Sequenz der assoziierten \mathcal{O}_X -Moduln exakt ist.*
- iii) *Es gelten $\widetilde{M} \oplus \widetilde{N} = \widetilde{M \oplus N}$, sowie $\widetilde{M} \otimes \widetilde{N} = \widetilde{M \otimes N}$ und $(\widetilde{M})^\vee = \widetilde{M^\vee}$.*

Beweis: In i) erhält man ausgehend von einem Morphismus von \mathcal{O}_X -Moduln einen Morphismus von R -Moduln, in dem man den Morphismus auf den globalen Schnitten verwendet. Umgekehrt induziert ein Morphismus von R -Moduln einen Morphismus der Lokalisierungen bei jedem Primideal. Damit erhält man die umgekehrte Zuordnung und die beiden sind offensichtlich invers zueinander.

Zum Beweis von ii) erinnern wir daran, dass man Exaktheit einer kurzen Sequenz von Garben nach Aufgabe 11.4 c) durch Exaktheit an den Halmen testen kann und dass Lokalisieren an einem Primideal ein exakter Funktor ist (vgl. z.B. [KommAlg], Satz 6.14).

Auch die Aussagen in iii) folgen auf die gleiche Art: Man kann den Wahrheitsgehalt an den Halmen testen und hat sich auf den entsprechenden bekannten Aussagen über Lokalisierungen von Moduln reduziert. \square

In Abschnitt 7 haben wir jedem Punkt einer Varietät den Tangentialraum zugeordnet. Jedem Punkt einen Vektorraum zuzuordnen ist die Grundidee eines Vektorbündels, aber in allen Fällen, in denen der Begriff nützlich ist, will man zudem, dass der Vektorraum in vernünftiger Weise vom Punkt abhängt. Die triviale Art ein solches Bündeln zu konstruieren, wäre einfach jedem Punkt den gleichen, festen Vektorraum zuzuordnen. Der Begriff des Vektorbündels

ist in verschiedenen Kategorien (topologische Räume, differenzierbare Mannigfaltigkeiten, Schemata) sinnvoll und besagt, dass man solch eine Trivialisierung lokal (in der entsprechenden Topologie und mit den entsprechenden Morphismen der Kategorie) finden kann. Wir kommen auf die Definition des Tangentialbündels im nächsten Abschnitt zurück.

Ein *Vektorbündel* vom Rang r über einem Schema X über k ist ein k -Morphismus $\pi : F \rightarrow X$, sodass es eine Überdeckung von X durch offene Mengen U_i und Isomorphismen $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{A}_k^r \times U_i$ gibt, sodass die Verkettungen $\psi_i \circ \psi_j^{-1} \in \text{Aut}((U_i \cap U_j) \times \mathbb{A}_k^r)$ lineare Abbildungen in den Koordinaten von \mathbb{A}_k^r sind.

Proposition 15.4 *Für jedes Schema X über k gibt es für jedes r eine natürliche Bijektion zwischen Vektorbündeln vom Rang r auf X und lokalfreien \mathcal{O}_X -Moduln vom Rang r .*

Beweis: Gegeben ein Vektorbündel $\pi : F \rightarrow X$, so definieren wir eine Garbe \mathcal{F} als die Garbe der Schnitte von π , d.h.

$$\mathcal{F}(U) = \{k\text{-Morphismen } s : U \rightarrow F \text{ mit } \pi \circ s = \text{id}_U\}.$$

Diese Garbe ist eine \mathcal{O}_X -Modulgarbe, da die Fasern von π allesamt k -Vektorräume sind und somit mit Skalaren (dem Werte einer regulären Funktion im entsprechenden Punkt) multipliziert werden können. Auf einer Menge U_i , die zur Trivialisierung des Vektorbündels benutzt wird, ist ein Schnitt in $\mathcal{F}(U_i)$ gerade ein k -Morphismus $U_i \rightarrow \mathbb{A}_k^r$ und somit durch r unabhängige Funktionen definiert. Dies zeigt, dass \mathcal{F} lokalfrei ist.

Sei umgekehrt \mathcal{F} eine lokalfreie Garbe. Per Definition gibt es eine offene Überdeckung von X durch U_i und Isomorphismen $\psi_i : \mathcal{F}|_{U_i} \rightarrow \mathcal{O}_{U_i}^{\oplus r}$. Mit Hilfe dieser Isomorphismen verkleben wir die Schemata $U_i \times \mathbb{A}_k^r$ entlang der Schnittmengen $(U_i \cap U_j) \times \mathbb{A}_k^r$ durch den Isomorphismus $\text{id}_{U_i \cap U_j} \times \psi_i \circ \psi_j^{-1}$. Dass $\psi_i \circ \psi_j^{-1}$ nach Definition ein Isomorphismus von $\mathcal{O}_{U_i \cap U_j}$ -Moduln ist, bedeutet gerade, dass diese Abbildung linear in den Koordinaten von \mathbb{A}_k^r ist. \square

Vektorbündel vom Rang 1 werden auch *Geradenbündel* genannt. Aufgrund der Proposition verwendet man den Begriff auch für lokalfreie Garben vom Rang 1. Wir bezeichnen die Menge aller Geradenbündel auf X mit $\text{Pic}'(X)$. Die Menge $\text{Pic}'(X)$ besitzt eine Gruppenstruktur, in der die Multiplikation durch das Tensorprodukt und das neutrale Element durch die Strukturgarbe gegeben ist. Das inverse Element ist die duale Garbe aufgrund von

$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}^\vee = \mathcal{F} \otimes \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) \cong \mathcal{O}_X.$$

Unser Ziel ist es die Gruppe $\text{Pic}'(X)$ mit der Gruppe der Divisorenklassen $\text{Pic}(X)$ auf einer *glatten* Kurve X zu vergleichen. Um dies zu erreichen sei \mathcal{L}

ein Geradenbündel auf X , es sei $s \in \mathcal{L}(U)$ ein Schnitt auf einer offenen Teilmenge U von X und $P \in X$ ein (abgeschlossener) Punkt. Dann definieren wir die *Verschwindungsordnung* $\text{ord}_P(s)$ von s im Punkt P als die Verschwindungsordnung der regulären Funktion $\psi(s)$ in P , wobei $\psi : \mathcal{L}|_V \rightarrow \mathcal{O}_X|_V$ ein Isomorphismus ist, der \mathcal{L} auf einer Umgebung V von P trivialisiert. Hierbei verwenden wir, dass ein regulärer lokaler Ring der Dimension Eins ein diskreter Bewertungsring ist ([AM69] Proposition 9.2). Man sieht, dass dieser Begriff wohldefiniert ist, denn wenn ψ' eine weitere Trivialisierung ist, so ist $\psi \circ \psi'$ ein Automorphismus von $\mathcal{O}_X|_V$, also gegeben durch eine auf V nirgends verschwindende reguläre Funktion und diese ändert die Verschwindungsordnung nicht. Ist $s \in \mathcal{L}(X)$ ein globaler Schnitt von \mathcal{L} , so definieren wir dessen Divisor als

$$\text{div}(s) = \sum_{P \in X} \text{ord}_P(s) \cdot [P]. \quad (15.1)$$

Wir würden gerne einem Geradenbündel den Divisor eines globalen Schnitts zuordnen. Nur hat leider nicht jedes Geradenbündel einen globalen Schnitt. (Man denke zum Beispiel an $X = \mathbb{P}^1(k)$ und die lokalfreie Garbe der rationalen Funktionen, die mindestens einmal im Punkt $P = (1 : 0)$ verschwinden.) Die Lösung dieses Problems ist folgender Begriff.

Ein *rationaler Schnitt* auf U des Geradenbündels \mathcal{L} ist ein Element von $(\mathcal{L} \otimes_X K(X))(U)$. Dabei ist $K(X)$ die konstante Garbe rationaler Funktionen auf X , offenbar auch eine \mathcal{O}_X -Modulgarbe. Mit der gleichen Definition wie oben hat auch ein rationaler Schnitt eine wohldefinierte Verschwindungsordnung, die nun auch negativ sein kann. Die Definition (15.1) des Divisors eines Schnitts können wir wörtlich auch für rationale Schnitte ausdehnen.

Lemma 15.5 *Sei P ein glatter Punkt auf einer Kurve X . Dann gibt es eine Umgebung U von P und eine reguläre Funktion $\varphi_P \in \mathcal{O}_X(U)$, sodass die Verschwindungsordnung von φ_P bei P gleich Eins ist und sodass φ_P ungleich Null auf $U \setminus P$ ist.*

Beweis: Sie φ_P eine reguläre Funktion, deren Keim einen Erzeuger von $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ repräsentiert. Dann hat φ_P die gewünschte Verschwindungsordnung und in dem man U klein genug wählt, hat φ_P keine Nullstellen auf U . \square

Proposition 15.6 *Ist X eine glatte Kurve, so ist $\text{Pic}'(X) \cong \text{Pic}(X)$.*

Zum Beweis führen wir folgenden Begriff ein. Ein Divisor $D = \sum_{P \in X} a_P \cdot P$ heißt *effektiver Divisor*, in Zeichen $D \geq 0$, falls $a_P \geq 0$ für alle $P \in X$. Die Divisoren von Schnitten in (15.1) sind effektive, die Divisoren von rationalen Schnitten im allgemeinen nicht.

Beweis: Wir behaupten, dass die Zuordnungen

$$\mathcal{L} \mapsto \text{div}(s) \quad \text{wobei } s \text{ ein rationaler Schnitt von } \mathcal{L} \text{ auf } X \text{ ist,}$$

und

$$D \mapsto \mathcal{O}(D), \quad \text{wobei } \mathcal{O}(D)(U) = \{\varphi \in K(X) : \text{div}(\varphi) + D \geq 0 \text{ auf } U\},$$

wohldefiniert und zueinander inverse Gruppenhomomorphismen sind.

Zunächst ist zu prüfen, dass es zu jedem Geradenbündel einen rationalen Schnitt auf X gibt. Dazu können wir zum Beispiel mit der konstanten Funktion Eins auf einer offenen Menge beginnen U_1 , auf der \mathcal{L} trivialisiert ist (d.h. nachdem wir einen Isomorphismus $\mathcal{L}|_{U_1} \cong \mathcal{O}_X|_{U_1}$ gewählt haben). Auf einer benachbarten offenen Menge U_2 , in der \mathcal{L} ebenfalls trivialisiert ist, ist Einsfunktion auf U_1 eine rationale Funktion f_{U_2} usw., sodass wir insgesamt einen Schnitt von $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} K(X)$ erhalten.

Als Nächstes bemerken wir, dass die Klasse des Divisors $\text{div}(s)$ nicht von dem gewählten Schnitt abhängt, denn falls s' ein weiterer Schnitt ist, so ist s/s' in rationaler Schnitt von \mathcal{O}_X , also eine rationale Funktion, und deren Divisoren haben wir gerade beim Übergang zur Divisorenklasse herausdividiert.

Die Garben $\mathcal{O}(D)$ sind in der Tat Geradenbündel. Dazu nehmen wir für jedes $Q \in X$ ein Umgebung V her, die keinen Punkt P mit $a_P > 0$ enthält. Auf dieser Umgebung liefert Multiplikation mit $\varphi_Q^{a_Q}$ den gewünschten Isomorphismus $\mathcal{O}(D)|_V \rightarrow \mathcal{O}|_V$, wobei φ_Q die Funktionen aus dem vorangehenden Lemma sind.

Die Isomorphieklasse von $\mathcal{O}(D)$ hängt nicht von der Wahl des Vertreters D in seiner Divisorenklasse ab, denn falls $D' = D + \text{div}(\psi)$ für eine rationale Funktion ψ , so liefert Multiplikation mit ψ den gewünschten Isomorphismus $\mathcal{O}(D) \rightarrow \mathcal{O}(D')$.

Um zu zeigen, dass die Verkettung in der einen Richtung die Identität ist, sie \mathcal{L} gegeben und ein rationaler Schnitt s gewählt. Dann müssen wir zeigen, dass $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}(\text{div}(s))$ ist. Die Abbildung $\varphi \mapsto \varphi/s$ leistet dies.

Für die umgekehrte Verkettung starten wir mit einem Divisor D und nehmen den rationalen Schnitt Eins von $\mathcal{O}(D)$. Um die Verschwindungsordnung dieses Schnittes in einem Punkt P zu messen, verwenden den lokalen Isomorphismus von $\mathcal{O}(D)|_V \rightarrow \mathcal{O}_V$, den wir oben konstruiert haben. Die Verschwindungsordnung ist also die von $1 \cdot \varphi_Q^{a_Q}$ und diese ist gerade.

Schliesslich bleibt noch die Homomorphieeigenschaft einer der Abbildungen zu zeigen. Falls s bzw. s' rationale Schnitt von \mathcal{L} bzw. von \mathcal{L}' sind, dann ist ss' ein rationaler Schnitt von $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}'$ und $\text{div}(ss') = \text{div}(s) + \text{div}(s')$. \square

Beispiel 15.7 Sei K ein Zahlkörper, \mathfrak{O}_K der Ganzzahlring in K . Dann ist ein gebrochenes \mathfrak{O}_K -Ideal (d.h. ein \mathfrak{O}_K -Untermodul I von K , sodass es ein $a \in K^*$ gibt mit $aI \subseteq \mathfrak{O}_K$) in K genau das selbe wie ein Geradenbündel über $\text{Spec}(\mathfrak{O}_K)$. Insbesondere ist die Idealklassengruppe aus der algebraischen Zahlentheorie ein Beispiel für die Picardgruppe einer glatten Kurve.

Zum Beweis benötigt man ein paar Aussagen aus der kommutativen Algebra. Zunächst ist ein gebrochenes \mathfrak{O}_K -Ideal (automatisch invertierbar, da wir

uns auf den Ganzheitsring eingeschränkt haben und damit) ein endlich erzeugter projektiver \mathfrak{D}_K -Modul. Weiterhin sind die endlich erzeugten projektiven Moduln über lokalen Ringen frei, also alle Lokalisierungen von I an Primidealen sind frei. Gegeben ein Punkt in $\text{Spec}(\mathfrak{D}_K)$, also ein Primideal \mathfrak{p} suchen wir ein $s \in \mathfrak{D}_K \setminus \mathfrak{p}$, sodass die Lokalisierung I_s frei ist. Da die Lokalisierungen bei \mathfrak{p} frei (und vom Rang 1) sind, gibt es einen Homomorphismus $\alpha : \mathfrak{D}_K \rightarrow I$, dessen Kern N und Kokern C nach Lokalisierung bei \mathfrak{p} zum Nullmodul werden. Da C als Quotient von I endlich erzeugt ist, gibt es ein $f \in \mathfrak{D}_K \setminus \mathfrak{p}$ mit $C_f = 0$. Also haben wir eine exakte Sequenz $0 \rightarrow N_f \rightarrow (\mathfrak{D}_K)_f \rightarrow I_f \rightarrow 0$, welche spaltet, da I und damit I_f projektiv sind. Damit ist der Kern N_f auch ein Quotient, endlich erzeugt und damit gibt es ein $g \in \mathfrak{D}_K \setminus \mathfrak{p}$ mit $(N_f)_g = 0$. Es genügt nun $s = fg$ zu setzen.

Hier sehen wir den Nutzen, die Schemasprache allgemein eingeführt zu haben: die Kurve $\text{Spec}(\mathcal{O}_K)$ hier ist ein eindimensionales Schema und keine k -Varietät für irgendeinen Körper k .

16 Projektive Schemata

Projektive Schemata verhalten sich zu allgemeinen Schemata wie projektive Varietäten zu allgemeinen Varietäten: Es ist eigentlich ein Spezialfall, projektive Schemata können aus affinen Schemata zusammengeklebt werden, aber der Spezialfall ist so wichtig (z.B. haben wir universelle Abgeschlossenheit bereits gesehen und werden Invarianz von wichtigen kohomologischen Größen in Familien projektiver Schemata noch sehen) und so bequem (aufgrund der Beschreibung mit Hilfe von graduierten Ringen, dass es sich lohnt in der gebotenen Kürze die Vorgehensweisen von Abschnitt 4 und Abschnitt 13 nochmal kombiniert zusammenzufassen).

Sei R ein graduirter Ring. Wir definieren $\text{Proj}(R)$ als die Menge aller homogenen Primideale \mathfrak{p} , welche nicht das irrelevante Ideal $R_+ = \bigoplus_{d>0} R^{(d)}$ enthalten. Ist $I \subseteq R$ ein homogenes Ideal, so definieren wir Verschwindungsort von I als

$$Z(I) = \{ \mathfrak{p} \in \text{Proj}(R) : \mathfrak{p} \supseteq I \}.$$

Wie in den genannten früheren Abschnitten gesehen, bilden $Z(I)$ die abgeschlossenen Mengen einer Topologie, die wir die Zariski-Topologie auf $\text{Proj}(R)$ nennen.

Auch auf $\text{Proj}(R)$ definieren wir eine Strukturgarbe, durch

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(U) = \{ s = (s_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in U} : s_{\mathfrak{p}} \in R_{(\mathfrak{p})}, \text{ für alle } \mathfrak{p} \in U \text{ gibt es } V \subseteq U \\ \text{ und } f, g \in R \text{ sodass für alle } \mathfrak{q} \in V \text{ gilt } g \notin \mathfrak{q} \text{ und } s_{\mathfrak{q}} = \frac{f}{g} \in R_{(\mathfrak{q})} \}. \end{aligned}$$

Der Unterschied zur Definition in Abschnitt 13 ist kaum erkennbar, die Keime sind nun Element der *homogen lokalisierten Ringe* $R_{(\mathfrak{p})}$ anstelle von $R_{\mathfrak{p}}$.

Ein *projektives Schema* ist der topologische Raum $X = \text{Proj}(R)$ zu einem graduierten Ring, zusammen mit der Strukturgarbe \mathcal{O}_X .

Auch hier gilt das Analogon zu Proposition 13.2, dass die Halme der Garbe die homogen lokalisierten Ringe sind und die globalen Schnitte auf Nichtverschwindungsmengen durch homogene Lokalisierungen. Der Beweis, analog zu Proposition 13.2, ist in [Har77], Proposition 2.5 skizziert.

Proposition 16.1 *Ist R ein graduierter Ring und $X = \text{Spec}(R)$, so ist der Halm $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$ von \mathcal{O}_X bei \mathfrak{p} isomorph zum lokalen Ring $R_{(\mathfrak{p})}$ und für jedes $f \in R$ ist $\mathcal{O}_X(D_f)$ isomorph zu $R_{(f)}$. Insbesondere ist $\mathcal{O}_X(X) = R^{(0)}$.*

Wir definieren den *projektiven Raum* über dem Ring S als das Schema $\mathbb{P}_S^n = \text{Proj}(S[x_0, \dots, x_n])$, wobei $S[x_0, \dots, x_n]$ wie üblich die Graduierung mit allen x_i vom Gewicht Eins hat. Ist $S = k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, so finden wir die Varietät wieder, die wir als projektiven Raum bezeichnet haben. Wie in Abschnitt 13 hat das Schema 'projektiver Raum' mehr Punkte als die Varietät 'projektiver Raum' und es gilt eine Einbettung von Kategorien ganz analog zu Proposition 13.4. Auch die Schema-Version des projektiven Raumes hat eine Standardüberdeckung durch $n+1$ offene Teilmengen $U_i \cong \text{Spec}(S[x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n])$.

Auch in der projektiven Situation können wir \mathcal{O}_X -Modulgarben konstruieren, in dem wir von Moduln ausgehen, die nun graduiert sein müssen. Sind dazu S ein graduierter Ring und M ein graduierter S -Modul. Wir definieren die zu M assoziierte Garbe \widetilde{M} , analog zur affinen Situation, durch

$$\begin{aligned} \widetilde{M}(U) = \{s = \{s_{\mathfrak{p}}\}_{\mathfrak{p} \in U}, s_{\mathfrak{p}} \in M_{(\mathfrak{p})} \text{ und für all } \mathfrak{p} \text{ gibt es eine Umgebung} \\ V \subseteq U \text{ und } m \in M, r \in R, \text{ homogen vom gleichen Grad, sodass} \\ s_{\mathfrak{q}} = m/r \text{ und } r \notin \mathfrak{q} \text{ für alle } \mathfrak{q} \in V\}. \end{aligned}$$

Der Unterschied ist, dass die Halme in der homogenen Lokalisierung liegen, und die Gradbedingung an (m, r) . Das Analogon zu Proposition 15.1 gilt hier ebenfalls, die Ausformulierung ([Har77], Proposition 5.11) ist dem Leser überlassen.

Der projektive Raum und allgemeiner abgeschlossenes Unterschema $X = \text{Proj}(S)$ in einem projektiven Raum kommt mit einer wichtigen Reihe von Modulgarben daher, Serre's *Twisting-Garben* $\mathcal{O}_X(n)$. Diese sind als die assoziierten Garben zum getwisteten S -Modul $S(n)$, welchen wir in Abschnitt 9 bereits als $S(n)_d = S_{n+d}$ definiert hatten. Offenbar ist $\mathcal{O}_X(0) = \mathcal{O}_X$ die Strukturgarbe.

Um diese Twisting-Garben zu verstehen, halten wir folgende Bemerkungen fest.

- i) Jedes homogene Polynom vom Grad n definiert einen globalen Schnitt von $\mathcal{O}_X(n)$, d.h. einen Schnitt von $\mathcal{O}_X(n)(X)$.
- ii) Für $n < 0$ hat $\mathcal{O}_X(n)$ keine globalen Schnitte.

iii) Ist f ein homogenes Polynom vom Grad d , so ist $1/f$ ein Schnitt von $\mathcal{O}_X(-d)(D(f))$.

Proposition 16.2 *Es gilt $\mathcal{O}_X(m) \otimes \mathcal{O}_X(n) \cong \mathcal{O}_X(m+n)$. Ist S erzeugt von S_1 als S_0 -Algebra, so sind die Twisting-Garben $\mathcal{O}_X(n)$ Geradenbündel.*

Beweis: Da S von S_1 als S_0 -Algebra erzeugt ist, überdecken die Standardmengen $D(f)$ für $f \in S_1$ ganz X . Auf so einer Menge liefert Multiplikation mit f^d den gewünschten Isomorphismus $\mathcal{O}_X|_{D(f)} \cong \mathcal{O}_X(d)|_{D(f)}$. \square

Wir wollen Garben, z.B. die Twisting-Garbe von projektiven Räumen auf abgeschlossene Unterschemata einschränken und allgemeiner wie Morphismen zurückziehen. Dazu müssen wir die zwei soeben verwendeten Begriffe klären.

Ein Morphismus $f : X \rightarrow Y$ ist eine *abgeschlossene Einbettung*, falls f ein Homöomorphismus von X auf eine abgeschlossene Teilmenge von Y ist und zudem der induzierte Garbenmorphismus $\mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ surjektiv ist. In diesem Fall wird $\mathcal{I}_{X/Y} = \text{Ker}(\mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X)$ die *Idealgarbe* der Einbettung genannt.

Die zweite Bedingung der Definition bedarf einer Erläuterung. Ein Morphismus der Form $\text{Spec}(R/I) \rightarrow \text{Spec}(R)$, der von einem Ringhomomorphismus $\varphi : R \rightarrow R/I$ herkommt, soll sicher eine abgeschlossene Einbettung definieren und er tut dies auch, da man die Surjektivität von $\mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ an den Halmen testen kann und die gilt, da die Lokalisierungen von φ ebenfalls surjektiv sind. Und die lässt sich umkehren: Ist $X = \text{Spec}(S)$ und $Y = \text{Spec}(R)$ so ist \mathcal{O}_Y kohärent, $f_*\mathcal{O}_X$ auch (nämlich die assoziierte Garbe zu S aufgefasst als R -Modul) und damit ist auch $\mathcal{I}_{X/Y}$ kohärent. Also ist die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{X/Y} \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X \rightarrow 0 \quad \text{zu} \quad 0 \rightarrow I \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow 0$$

assoziiert.

Als Beispiel, dass eine abgeschlossene Einbettung nicht nur durch die zugrundeliegenden topologischen Räume gegeben ist, betrachten wir die zwei Achsenkreuze $X_1 = \text{Spec}(k[x,y]/(xy))$ und $X_2 = \text{Spec}(k[x,y]/(x^2, xy))$. Die Quotientabbildung von $k[x,y]$ liefert in beiden Fällen eine Abbildung $X_i \rightarrow Y = \mathbb{A}_k^2$, welche eine abgeschlossene Einbettung ist. Die X_1 und X_2 zugrundeliegenden topologischen Räume sind gleich, die beiden Schemata sind aber offenbar nicht isomorph.

Als nächstes wollen wir \mathcal{O}_Y -Modulgarben bezüglich eines Morphismus $f : X \rightarrow Y$ zurückziehen ('pull-back'). Diese sollte eigentlich einfacher sein als ein direktes Bild ('push-forward') zu definieren, denn aus einer Funktion auf Y kann man durch Präkomposition eine Funktion auf X definieren (aber nicht umgekehrt) und Schnitte von Garben verhalten sich wie Funktionen. Technisch wird die Sache dadurch verkompliziert, dass das Bild $f(U)$ einer offenen Menge leider nicht immer offen ist.

Ist $f : X = \text{Spec}(R) \rightarrow Y = \text{Spec}(S)$ ein Morphismus affiner Schemata gegeben durch einen Ringhomomorphismus $S \rightarrow R$ und ist zudem $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ quasi-kohärent auf Y , so ist $M \times_S R$ ein R -Modul und die assoziierte Garbe eine \mathcal{O}_X -Modulgarbe.

Um den allgemeinen Fall in den Griff zu bekommen, definieren wir zunächst den Garben-Pullback $f^{-1}\mathcal{F}$ für eine beliebige Garbe \mathcal{F} als die Prägarbe zur Garbe

$$U \mapsto \lim_{Y \supseteq V \supseteq f(U)} \mathcal{F}(V),$$

wobei V offene Teilmengen durchläuft. Der Limes ist dabei wie bei der Konstruktion von Keimen aufzufassen, d.h. zwei Paare (V, φ) und (V', φ') definieren den gleichen Schnitt, falls es eine offene Teilmenge $W \supseteq f(U)$ gibt, auf der die beiden übereinstimmen. Diese Konstruktion ist der Ersatz für das Problem der Nichtoffenheit von $f(U)$ und liefert $U \mapsto \mathcal{F}(f(U))$ falls diese Menge in der Tat offen ist. Wichtig ist, dass f^{-1} an den Halmen das Erwartete tut, nämlich $(f^{-1}\mathcal{F})_P = \mathcal{F}_{f(P)}$.

Falls \mathcal{F} eine \mathcal{O}_Y -Modulgarbe ist, so ist diese noch nicht die endgültige Konstruktion, denn $f^{-1}(\mathcal{F})$ ist eine Garbe von $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ -Moduln, aber im Allgemeinen keine Garbe von \mathcal{O}_X -Moduln, wie das folgende Beispiel zeigt. Daher definieren wir den *Pullback einer \mathcal{O}_Y -Modulgarbe \mathcal{F}* als

$$f^*\mathcal{F} = f^{-1}\mathcal{F} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X.$$

In der Praxis muss man fast nie diese Definition wirklich anwenden, sondern rechnet in der einfachen affinen Situation auf einer Überdeckung.

Beispiel 16.3 Sei $X = Y = \mathbb{P}_k^1$ und $f : (s : t) \mapsto (x : y) = (s^2 : t^2)$. Wir berechnen den Pullback $f^*\mathcal{O}_Y(1)$ einer Twist-Garbe. Schnitte von \mathcal{O}_Y sind lokal von der Form $g(x, y)/h(x, y)$, wobei g und h homogen sind und $\deg(g) - \deg(h) = 1$. Der Garbenpullback f^{-1} bedeutet die Schnitte der Garbe mit f zu präkomponieren, d.h. $x = s^2$ und $y = t^2$ einzusetzen. Also sehen Schnitte von $f^{-1}(\mathcal{O}_Y(1))$ lokal auf einer Überdeckung aus wie $g(s^2, t^2)/h(s^2, t^2)$ und nun ist die Differenz zwischen Zählergrad und Nennergrad gleich zwei. Die Menge der Schnitte dieser Form bilden aber keinen \mathcal{O}_X -Modul, wie man z.B. an dem Versuch sieht, den Schnitt s^2 mit der Funktion t/s (auf geeigneten Definitionsbereichen) zu multiplizieren. Nachdem man das Tensorprodukt wie in der Definition von f^* eingefügt hat erhält man eine \mathcal{O}_X -Modulgarbe. Ein beliebiger Schnitt von $f^*\mathcal{O}_Y(1)$ hat also die Gestalt (eigentlich eine Summe solcher Ausdrücke, aber man kann alles auf einen Hauptnenner bringen)

$$\frac{g(s^2, t^2)}{h(s^2, t^2)} \cdot \frac{g'(s, t)}{h'(s, t)}, \quad \deg(g(s^2, t^2)) - \deg(h(s^2, t^2)) = 2, \quad \deg(g') - \deg(h') = 0.$$

Offenbar lässt sich jeder Bruch homogener Polynome mit Zählergrad mit Nennergrad gleich zwei so darstellen (sogar mit $g(x, y) = x$ und $h(x, y) = 1$), sodass wir $f^*\mathcal{O}_Y(1) = \mathcal{O}_X(2)$ gezeigt haben.

Ein lückenloser Aufbau des Skripts sollte an dieser Stelle, nach dem der Begriff abgeschlossene Einbettung definiert wurde, auf folgenden Begriff zurückkommen. Die folgenden Bemerkungen wurden in der Vorlesung aus Zeitmangel nur implizit und skizzenhaft verwendet, bzw. auf die Literatur insbesondere [Har77], Abschnitt II.4 und II.7 verwiesen.

Wir definieren allgemein den projektiven Raum der (relativen) Dimension n über einem beliebigen Schema Y als $\mathbb{P}_Y^n = \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\text{Spec}(\mathbb{Z})} Y$. Ein Morphismus $f : X \rightarrow Y$ wird *projektiv* genannt, falls er sich als Verkettung einer abgeschlossenen Einbettung $i : X \rightarrow \mathbb{P}_Y^n$ und der natürlichen Projektion $\mathbb{P}_Y^n \rightarrow Y$ für ein $n \in \mathbb{N}$ schreiben lässt. Wichtig ist dabei insbesondere der folgende Satz, insbesondere in Kombination mit der nachfolgenden Bemerkung ([Har77], Exercise II.4.4)

Satz 16.4 *Ein projektiver Morphismus ist eigentlich.*

Beweis: [Har77], Theorem 4.9 □

Proposition 16.5 *Das Bild eines eigentlichen S -Schemas ist eigentlich über S , d.h. ist $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus zwischen separierten Schemata von endlichem Typ über einem noetherschen Schema S und $Z \subset X$ ein abgeschlossenes Unterschema von X , welches eigentlich über S ist, dann ist $f(Z)$ eigentlich über S .*

17 Differenzialformen

In der Definition des Tangentialraums haben wir die formalen Ableitungen von regulären Funktionen verwendet. In der Differentialgeometrie definiert man das Bündel der Differentialformen als den Dualraum des Tangentialbündels. Wir drehen hier die Reihenfolge um und definieren zunächst eine Garbe der Differentialformen, für alle Schemata, unabhängig von Nichtsingularität. Für nichtsinguläre Varietäten wird die Garbe der Differentialformen lokalfrei sein und das Tangentialbündel das duale Vektorbündel davon. Diese Definition stimmt, für ein glattes, reduziertes Schema über \mathbb{C} mit der Definition aus der Differentialgeometrie überein.

Sei $f : X = \text{Spec}(R) \rightarrow Y = \text{Spec}(S)$ ein Morphismus affiner Schemata. Der R -Modul $\Omega_{R/S}$ der *relativen Differentialformen* ist der freie R -Modul auf den Symbolen $\{df, r \in R\}$ modulo der Relationen

$$d(r_1 + r_2) = dr_1 + dr_2, \quad d(r_1 r_2) = r_1 dr_2 + r_2 dr_1, \quad ds = 0$$

für $r_1, r_2 \in R$ und $s \in S$.

Ist beispielsweise $S = k$ ein Körper und $R = k[x_1, \dots, x_n]$ der Polynomring und f induziert durch die Inklusion, so kann man durch die Produktregel alles durch Linearkombinationen der Symbole dx_i ausdrücken, d.h. $\Omega_{R/k} = \langle dx_1, \dots, dx_n \rangle$ ist ein freier R -Modul vom Rang n .

Ist $S = k$ und $R = k[x_1, \dots, x_n]/\langle f_1, \dots, f_s \rangle$, so ist aufgrund von $df_i = 0$

$$\Omega_{R/k} = \langle dx_1, \dots, dx_n \rangle / \left(\sum_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_i, j = 1, \dots, s \right).$$

und dies ist genau das Dual des Tangentialraums, den wir in Abschnitt 7 definiert haben.

Der Modul $\Omega_{R/S}$ definiert eine assoziierte quasi-kohärente Garbe, die wir mit $\Omega_{X/Y} = \widetilde{\Omega_{R/S}}$ bezeichnen.

Als Vorbereitung für die Definition von relativen Differentialformen für einen allgemeinen Morphismus zwischen Schemata, beweisen wir folgende alternative Beschreibung des Moduls $\Omega_{R/S}$ im affinen Fall.

Lemma 17.1 Sei $\varphi : S \rightarrow R$ ein Ringhomomorphismus und $\delta : R \otimes_S R \rightarrow R$ definiert durch $\delta(r_1 \otimes r_2) = r_1 r_2$ und $I = \text{Ker}(\delta)$. Dann ist

$$\Omega_{R/S} = I/I^2$$

als R -Moduln.

Beweis: Zunächst hat I/I^2 die R -Modulstruktur $r \cdot (r_1 \otimes r_2) = r r_1 \otimes r_2 = r_1 \otimes r r_2$, wobei für die Gleichheit der definierenden Ausdrücke

$$r r_1 \otimes r_2 - r_1 \otimes r r_2 = (r_1 \otimes r_2)(r \otimes 1 - 1 \otimes r) \in I \cdot I$$

verwendet wurde. Die Abbildung $f : \Omega_{R/S} \rightarrow I/I^2$ ist gegeben durch $dr \mapsto r \otimes 1 - 1 \otimes r$ und wir basteln nun eine Umkehrabbildung. Der R -Modul $A = R \oplus \Omega_{R/S}$ wir mittels

$$(r_1, dr'_1) \cdot (r_2, dr'_2) = (r_1 r_2, r dr'_2 + r_2 dr'_1)$$

zu einer R -Algebra. Die Abbildung

$$g : R \times R \rightarrow A, \quad (r_1, r_2) \mapsto (r_1 r_2, r_1 dr_2)$$

ist S -bilinear und steigt also zu einer Abbildung $g : R \otimes_S R \rightarrow A$ ab. Per Definition ist $g(I) \subseteq \Omega_{R/S}$, denn die erste Komponente von g ist gerade δ . Da $g(I^2) = 0$ nach Definition der Multiplikation auf A , induziert g also eine Abbildung $I/I^2 \rightarrow \Omega_{R/S}$. Man rechnet nach, dass diese zu f invers ist. \square

Der Morphismus δ aus dem Lemma korrespondiert in der Sprache von Schema $X = \text{Spec}(R)$ und $Y = \text{Spec}(S)$ zu der Diagonaleinbettung $X \rightarrow X \times_Y X$, wie man an der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts und der Konstruktion des Faserprodukts (im affinen Fall war dies einfach das Tensorprodukt) sieht. Also ist die zu I assoziierte Garbe die Idealgarbe \mathcal{I}_Δ , wobei wir die Diagonaleinbettung sprachlich mit ihrem Bild $\Delta \subset X \times_Y X$ identifizieren. Diese Interpretation lässt sich leicht verallgemeinern.

Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus und $\Delta : X \rightarrow X \times_Y X$ die Diagonale. Dann ist die Garbe der *relativen Differentialformen* $\Omega_{X/Y}^1$ definiert als das Pullback der Idealgarbe zu Delta, d.h.

$$\Omega_{X/Y}^1 = \Delta^* \mathcal{I}_{\Delta(X)/X \times_Y X}.$$

Falls Y ein Punkt $\text{Spec}(k)$ ist, schreibt man kurz Ω_X^1 .

Zum praktischen Rechnen ist diese Definition nutzlos. Sie dient nur dazu, die globale Existenz einer Garbe relativen Differentialformen zu zeigen, welche (aufgrund des Lemmas) mit dem intuitiven Begriff im affinen Fall übereinstimmt. Die Definition zusammen mit der vorangehenden im affinen Fall zeigt auch, dass $\Omega_{X/Y}^1$ quasi-kohärent ist.

Mit Hilfe von Differentialformen kann man Glattheit charakterisieren.

Proposition 17.2 *Ein Punkt P in einer n -dimensionalen Varietät X ist nicht-singulär genau dann wenn Ω_X^1 lokalfrei vom Rang n in einer Umgebung von P ist.*

Beweis: Falls Ω_X^1 lokalfrei vom Rang n in einer Umgebung von P ist, so ist auch die duale Garbe, also der Tangentialraum lokalfrei vom Rang n . Nimmt man nun Proposition 7.5 und die Charakterisierung von Nichtsingulärheit durch die Dimension von $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ in Satz 7.2 zusammen, so folgt die erste Implikation.

Sei nun umgekehrt P nichtsingulär. Wir können uns auf eine affine Umgebung $X = \text{Spec}(R)$ und $R = k[x_1, \dots, x_r]/\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ einschränken. Wir haben im Beispiel oben gesehen, dass

$$\Omega_{R/k} = \langle dx_1, \dots, dx_r \rangle / \left(\sum_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_i, j = 1, \dots, s \right).$$

Am Punkt P ist der Halm hiervon ein n -dimensionaler Vektorraum aufgrund der Nichtsingulärheit und den oben zitierten Resultaten aus Abschnitt 7. Die bedeutet, dass die Matrix $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ im Punkt P den Rang $r - n$ hat.

Die Behauptung folgt nun daraus, dass das Nichtverschwinden einer Determinante eine offene Bedingung ist. Wir führen die Details aus. Wir können durch lineare Transformation erreichen, dass die Matrix aus den ersten $r - n$ Zeilen und Spalten vollen Rang hat und somit dx_{r-n+1}, \dots, dx_r eine Basis von $\Omega_{R/k,P}$ bilden. Nun gibt es eine offene Umgebung U von P , auf der die Determinante $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ nicht verschwindet und für alle $Q \in U$ sind dann die Differenziale dx_{r-n+1}, \dots, dx_r immer noch eine Basis von $\Omega_{R/k,Q}$. Also ist

$$\Omega_X|_U = \mathcal{O}_U dx_{r-n+1} \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_U dx_r$$

und damit ist Ω_X lokalfrei vom richtigen Rang. □

In der glatten Situation wird Ω_X^1 auch das *Kotangentialbündel* und sein Dual $T_1 = (\Omega_X^1)^\vee$ das *Tangentialbündel* genannt. Mit Hilfe dieser Proposition kann man jeder nicht-singulären Varietät ein 'leicht handhabbares Bündel', d.h. ein Geradenbündel zuordnen, das kanonisch konstruiert ist und dessen Eigenschaften geeignet sind, Isomorphieklassen von Varietäten auseinanderzuhalten.

Auf einer n -dimensionalen Varietät wird die n -fache äussere Potenz des Kotangentialbündels $\omega_X = \wedge^n \Omega_X^1$ das *kanonische Bündel* genannt.

Unser nächste Ziel ist es, das Kotangentialbündel von \mathbb{P}_k^n und von Hyperflächen in \mathbb{P}_k^n auszurechnen.

Proposition 17.3 *Das Kotangentialbündel von \mathbb{P}_k^n sitzt in einer kurzen exakten Sequenz*

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}_k^n}^1 \rightarrow \mathcal{O}(-1)^{\oplus(n+1)} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow 0$$

und das Tangentialbündel sitzt in einer kurzen exakten Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}(1)^{\oplus(n+1)} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow T_{\mathbb{P}_k^n}.$$

Insbesondere ist $\omega_{\mathbb{P}_k^n} \cong \mathcal{O}(-n-1)$.

Diese exakten Sequenzen sind unter dem Namen *Euler-Sequenz* bekannt.

Beweis: Auf den offenen Menge U_i der Standardüberdeckung ist $\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^1|_{U_i}$ durch die Differenziale $d(\frac{x_0}{x_i})$ frei erzeugt, wie in den einführenden Beispielen erläutert. Um die erste Abbildung der Sequenz zu definieren, lassen wir uns von der formalen Quotientenregel

$$d\left(\frac{x_i}{x_j}\right) = \frac{x_j dx_i - x_i dx_j}{x_j^2}$$

leiten. Die auf der rechten Seite verwendeten Symbole sind keine Elemente einer Garbe von Differentialformen, da die x_i keine regulären Funktionen (auch nicht auf einer offenen Teilmenge) sind. Aber wir können die dx_i als formale Bezeichnung der $n+1$ Erzeuger von $\mathcal{O}(-1)^{\oplus(n+1)}$ verwenden. Somit motiviert die symbolische Ableitungsregel die Abbildung

$$\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^1 \rightarrow \mathcal{O}(-1)^{\oplus(n+1)}, \quad d\left(\frac{x_i}{x_j}\right) \mapsto \frac{1}{x_j} dx_i - \frac{x_i}{x_j^2} dx_j.$$

Die Vorkoeffizienten auf der rechten Seite sind homogen vom Grad -1 , also ist das Bild wirklich in $\mathcal{O}(-1)^{\oplus(n+1)}$. Um die Wohldefiniertheit diese Abbildung zu prüfen, müssen wir auf $U_i \cap U_j$ prüfen, dass die zwei Darstellungen der lokalen Erzeuger das gleiche Bild haben. Die Erzeuger auf diesem Durchschnitt gehen durch $(x_k/x_i) = x_j/x_i \cdot (x_k/x_j)$ auseinander hervor und es gilt

$$d\left(\frac{x_k}{x_i}\right) - \frac{x_j}{x_i} d\left(\frac{x_k}{x_j}\right) = \frac{x_k}{x_j} d\left(\frac{x_j}{x_i}\right).$$

Die zweite Abbildung der Sequenz definieren wir durch $dx_i \mapsto x_i$. Diese ist ein surjektiver Garbenmorphismus (aber wieder ein Beispiel, bei dem der Prägarbenmorphismus nicht surjektiv ist, denn die Konstanten, in Grad Null liegen nicht in dessen Bild. Außerdem ist offenbar das Bild der ersten im Kern der zweiten Abbildung und da die Garben lokalfrei von Rängen n , $n + 1$ und 1 respektive sind, folgt auch die umgekehrte Inklusion.

Die zweite Aussage folgt durch dualisieren, die letzte Aussage aus Aufgabe WELCHE. \square

Als Vorbemerkung zur nächsten Proposition notieren wir, dass jeder Morphismus $f : X \rightarrow Y$ zwischen Schemata (über eine Körper) einen Garbenmorphismus $f^*\Omega_Y \rightarrow \Omega_X$ durch $d\varphi \mapsto d(f^*\varphi) = d(\varphi \circ f)$ induziert.

Proposition 17.4 Sei $i : X \rightarrow \mathbb{P}_k^n$ die Inklusionsabbildung einer glatten Hyperfläche vom Grad d . Dann ist das Kotangententialbündel von X durch die kurzen exakten Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-d) \rightarrow i^*\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^1 \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow 0$$

bestimmt.

Beweis: Sei f die definierende Gleichung von X , die erste Abbildung durch $\varphi \mapsto d(f\varphi)$ und die zweite Abbildung durch die kanonische Abbildung wie in der Vorbemerkung definiert. Diese ist surjektiv bei einer abgeschlossenen Einbettung, denn jede Funktion auf X kann man lokal als Quotient zweier homogener Polynome von gleichem Grad und damit als Quotient zweier Funktionen auf \mathbb{P}_k^n schreiben. Dementsprechend erhält man das Differential dieser Funktion als Restriktion der Differentiale der Funktionen auf dem \mathbb{P}_k^n .

Wiederum ist das Bild der ersten Abbildung im Kern der zweiten Abbildung und die erste Abbildung ist offenbar injektiv, da $f\varphi$ für $\varphi \in \mathcal{O}_X(-d)(U)$ niemals konstant sein kann. Aus den Rängen dieser lokalfreien Garben folgt wieder die für die Exaktheit noch fehlende Inklusion. \square

Beispiel 17.5 Das kanonische Bündel einer glatten Kubik X (Grad 3-Kurve) im \mathbb{P}_k^2 ist $\omega_X \cong \mathcal{O}_X(3-3) \cong \mathcal{O}_X$ nach den zwei vorangehenden Propositionen. Damit haben wir einen weiteren Beweis (neben der Eigenschaft der Divisorenklassengruppe) dass eine Kubik nicht zu einem \mathbb{P}^1 isomorph ist, denn \mathcal{O}_X hat einen eindimensionalen Vektorraum globaler Schnitte, aber $\omega_{\mathbb{P}_k^1} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}(-2)$ hat keine globalen Schnitte.

In der Situation von zwei Morphismen ist es oftmals nützlich, die verschiedenen Garben der relativen Differentialformen zu vergleichen.

Proposition 17.6 Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Morphismen. Dann ist die Sequenz

$$f^*\Omega_{Y/Z} \rightarrow \Omega_{X/Z} \rightarrow \Omega_{X/Y} \rightarrow 0$$

exakt.

Beweis: Exaktheit von Garbenmorphismen kann man lokal testen. Auf affinen Teilmengen von Z und geeigneten affinen Urbildern davon sind die Differentialalgebren Garbifizierungen der Garben von Differentialmoduln. Es genügt also zu zeigen, dass für Ringhomomorphismen $\phi : A \rightarrow B$ und $\psi : B \rightarrow C$ die Sequenz

$$\Omega_{B/A} \otimes C \rightarrow \Omega_{C/A} \rightarrow \Omega_{C/B} \rightarrow 0$$

von C -Moduln gegeben durch $db \otimes c \mapsto c db$ und $dc \mapsto dc$ exakt ist. Surjektivität ist klar, ebenso klar ist, dass das Bild der ersten im Kern der zweiten Abbildung liegt. Um den Kokern zu identifizieren bemerkt man, dass sich $\Omega_{C/B}$ von $\Omega_{C/A}$ nur durch die Zusatzrelationen $db = 0$ für $b \in B$ unterscheidet und dies sind gerade die Relationen, die vom Bild der ersten Abbildung herkommen. \square

Der erste Morphismus ist im Allgemeinen nicht injektiv. Er ist injektiv bei glatten Morphismen (ein Konzept, das wir in diesem Skript nicht definieren). Ein wichtiger Spezialfall davon mit Anwendung im nächsten Kapitel ist der folgende Fall.

Proposition 17.7 *Ist in der Situation der vorigen Proposition $Z = \text{Spec}(k)$ und X und Y glatte projektive Kurven, so ist*

$$0 \rightarrow f^* \Omega_{Y/Z} \rightarrow \Omega_{X/Z} \rightarrow \Omega_{X/Y} \rightarrow 0$$

exakt, falls $K(X)/K(Y)$ eine separable Erweiterung ist.

Beweis: Die Garbe $\Omega_{Y/Z}$ und damit auch ihr f -Pullback ist lokalfrei vom Rang Eins, also ein Geradenbündel. Aus der geometrischen Beschreibung der Schnitte eines Geradenbündels ist offensichtlich, dass eine Untergarbe eines Geradenbündels, wie zum Beispiel der Kern von $\phi : f^* \Omega_{Y/Z} \rightarrow \Omega_{X/Z}$ nur dann von der Nullgarbe verschieden ist, falls der Halm am generischen Punkt η von X von der Nullgarbe verschieden ist. Am generischen Punkt sind $f^* \Omega_{Y/Z}$ und $\Omega_{X/Z}$ beides eindimensionale $K(X)$ -Vektorräume, d.h. die Injektivität folgt aus der Surjektivität, bzw. daraus, dass $K(X) \otimes \Omega_{X/Y} = \Omega_{K(X)/K(Y)} = 0$ ist. Um dies zu zeigen, verwenden wir, dass $K(X)/K(Y)$ algebraisch aufgrund der Dimensionsvoraussetzungen ist, und somit jedes $\alpha \in K(X)$ ein Minimalpolynom $P \in K(Y)[T]$ besitzt. Damit ist $0 = d(P(\alpha)) = P'(\alpha)d\alpha$ und da $P'(\alpha) \neq 0$ aufgrund der Separabilität, folgt die Behauptung. \square

18 Die Sätze von Riemann-Hurwitz und Riemann-Roch

Ein Geradenbündel auf einer glatten Kurve hat zwei wichtige Invarianten. Zum einen ist es der Grad, definiert als der Grad des nach Proposition 15.6 zugehörigen Divisors. Die andere Invariante ist die Dimension des Vektorraums

der globalen Schnitte. Interessanterweise bestimmen diese Invarianten einander nicht immer: Bei hohem und negativen Grad kann man die eine aus der anderen ausrechnen, im Bereich dazwischen kommt noch eine andere Invariante ins Spiel. Die genaue Aussage ist der Satz von Riemann-Roch, den wir hier für Geradenbündel auf glatten Kurven formulieren und beweisen werden. Dieser wichtige Satz ist in vielen Aspekten verallgemeinert worden, für Vektorbündel und für höherdimensionale Varietäten. Im Satz von Riemann-Roch taucht (unter anderem zur Festlegung, was 'hoher Grad' bedeutet) das Geschlecht von Kurven auf. Der Satz von Riemann-Hurwitz gibt eine einfache Formel, dieses im Falle von surjektiven Morphismen zwischen glatten Kurven zu berechnen.

Der Raum der globalen Schnitte $\mathcal{F}(X)$ einer Garbe \mathcal{F} auf einem Schema X bezeichnet man auch mit $\Gamma(X, \mathcal{F})$. Grund für das Einführen dieser Bezeichnung ist die Idee $\Gamma(X, \cdot)$ als Funktor von Garben nach Gruppen zu studieren und damit die Invarianten der Garbenkohomologie zu definieren. Dies ist auch der Grund, weswegen wir (im Fall, dass X ein k -Schema und \mathcal{F} eine \mathcal{O}_X -Modulgarbe, also $\Gamma(X, \mathcal{F})$ ein k -Vektorraum) auch $h^0(\mathcal{F})$ für die Dimension von $\Gamma(X, \mathcal{F})$ als k -Vektorraum schreiben. Dementsprechend schreiben wir auch kurz $h^0(X)$ für $h^0(\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)))$.

Die Bedeutung von $\Gamma(X, \mathcal{F})$ wird aus folgender Bemerkung offensichtlich.

Proposition 18.1 *Sei X ein Schema über $\text{Spec}(R)$ und $f : X \rightarrow \mathbb{P}_R^n$ ein Morphismus über $\text{Spec}(R)$. Dann ist $\mathcal{L} = f^*\mathcal{O}(1)$ ein Geradenbündel, das von den globalen Schnitten $s_i = x_i \circ f$ erzeugt ist, d.h. die s_i erzeugen die Halme \mathcal{L}_P als $\mathcal{O}_{X,P}$ -Modul in jedem Punkt P von X .*

Umgekehrt, sei \mathcal{L} ein Geradenbündel auf dem R -Schema X und seien $s_i \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ für $i = 0, \dots, n$ Schnitte die \mathcal{L} erzeugen, d.h. für jedes P in X den Halm \mathcal{L}_P als $\mathcal{O}_{X,P}$ -Modul erzeugen. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus $f : X \rightarrow \mathbb{P}_R^n$, sodass $\mathcal{L} = f^\mathcal{O}(1)$ und $s_i = x_i \circ f$.*

Beweis: Die erste Aussage ist klar nach der Definition von Twisting-Garben.

Für die Umkehrung definieren wir $f(P) = (s_0(P) : s_1(P) : \dots : s_n(P))$. Man beachte, dass der Wert eines Schnittes $s_0(P)$ nicht wohldefiniert ist, aber das Verhältnis $s_i(P)/s_j(P)$ als Schnitt von $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^\vee = \mathcal{O}_X$ ist es, sodass insgesamt die gegebene Abbildung f eine Kollektion von wohldefinierten Abbildungen von $\{s_j \neq 0\} \rightarrow U_j$ ist, welche auf den Überlappungsbereichen übereinstimmen. Da die Schnitte die Garbe \mathcal{L} erzeugen, überdecken diese Mengen $\{s_j \neq 0\}$ ganz X . \square

Wenn die Schnitte s_i nicht überall \mathcal{L} erzeugen, dann bekommt man immer noch auf der offenen Teilmenge U , auf der sei \mathcal{L} erzeugen, einen Morphismus $U \rightarrow \mathbb{P}_R^n$ also eine rationale Abbildung von X nach R .

Wichtig ist es auch ein Kriterium zu haben, wann die durch Schnitt von \mathcal{L} definierte Abbildung eine abgeschlossene Einbettung ist. Dazu beginnen wir mit einer ziemlich tautologischen Umformulierung.

Lemma 18.2 *Sei $f : X \rightarrow \mathbb{P}_R^n$ durch Schnitte $s_i \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ für $i = 0, \dots, n$ einer invertierbaren Garbe gegeben. Dann ist f eine abgeschlossene Einbettung, genau dann wenn die Nichtverschwindungsorte $X_i = D(s_i)$ affin sind und zudem für jedes i die Abbildungen $R[y_0, \dots, y_n] \rightarrow \Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$ definiert durch $y_j \mapsto s_j/s_i$ surjektiv sind.*

Beweis: Ist f eine abgeschlossene Einbettung, so ist X_i ein abgeschlossenes Unterschema von U_i und damit affin. Aus der Surjektivität von $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_R^n} \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ folgt die Surjektivität für die Schnitte auf Nichtverschwindungsorten von globalen Schnitten, wie im Zusammenhang mit der Definition von abgeschlossenen Einbettungen diskutiert. Umgekehrt folgt aus den genannten Kriterien, dass $f|_{X_i}$ eine abgeschlossene Einbettung ist. Da die X_i ganz X überdecken, folgt die Behauptung. \square

Richtig nützlich ist aber folgendes Kriterium, dass alles auf lokale Eigenschaften reduziert.

Proposition 18.3 *Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, X ein projektives Schema und wieder $f : X \rightarrow \mathbb{P}_k^n$ durch Schnitte $s_i \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ für $i = 0, \dots, n$ einer invertierbaren Garbe gegeben und $V = \langle s_0, \dots, s_n \rangle \subseteq \Gamma(X, \mathcal{L})$. Dann ist f eine abgeschlossene Einbettung, genau dann wenn V Punkte trennt und V Tangentialvektoren trennt.*

Dabei bedeutet trennen von Punkten, dass es zu Punkten $P \neq Q$ ein $s \in V$ gibt, mit $s \in \mathfrak{m}_P\mathcal{L}_P$, aber $s \notin \mathfrak{m}_Q\mathcal{L}_Q$. Und V trennt Tangentialvektoren bedeutet, dass zu jedem Punkt die Schnitte $\{s \in V : s \in \mathfrak{m}_P\mathcal{L}_P\}$ den k -Vektorraum $\mathfrak{m}_P\mathcal{L}_P/\mathfrak{m}_P^2\mathcal{L}_P$ aufspannen.

Beweis: Angenommen f ist eine abgeschlossene Einbettung und damit V von den Bildern von $x_0, \dots, x_n \in \Gamma(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n})$ aufgespannt. Zu $P \neq Q$ gibt es eine Hyperebene, die P aber nicht Q enthält. Der zugehörige Schnitt trennt P und Q . Ausserdem gibt es zu jedem Punkt P von X und jedem Tangentialvektor eine Hyperebene, die sich zu diesem Tangentialvektor einschränkt. Das zeigt das Trennen von Tangentialvektoren.

Sei umgekehrt eine Abbildung f gegeben, deren V Punkte und Tangentialvektoren trennt. Da V Punkte trennt ist (wegen der Voraussetzung k algebraisch abgeschlossen) f injektiv auf Punkten. Zunächst ist das Bild nach Satz 16.4 in Kombination mit Proposition 16.5 abgeschlossen, da X projektiv vorausgesetzt ist. Nach diesem Satz ist also f eine abgeschlossene Abbildung, stetig sowie als Morphismus von Schemata und damit ein Homöomorphismus auf sein Bild. Entscheidend ist also zu zeigen, dass $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n} \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ surjektiv ist, was wir an den Halmen untersuchen können. Da das Bild $f_*\mathcal{O}_X$ kohärent ist

([Har77], Corollary II.5.20), folgt die Behauptung aus dem folgenden lokalen Lemma. \square

Lemma 18.4 *Sei $f : A \rightarrow B$ ein lokaler Homomorphismus lokaler nötherscher Ringe. Falls $\bar{f} : A/\mathfrak{m}_A \rightarrow B/\mathfrak{m}_B$ ein Isomorphismus ist, die Abbildung $\mathfrak{m}_A \rightarrow \mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2$ surjektiv ist und B ein endlich erzeugter A -Modul ist, dann ist f surjektiv.*

Beweis: Sei $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}_A B$. Dieses Ideal ist nach Definition eines lokalen Homomorphismus in \mathfrak{m}_B enthalten. Nach dem Nakayama-Lemma angewandt auf \mathfrak{m}_B für den lokalen Ring B und der zweiten Voraussetzung ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}_B$. Nun wenden wir das Nakayama-Lemma auf den A -Modul B an. Dieser ist endlich erzeugt, und das Element 1 erzeugt diesen modulo $\mathfrak{m}_A B$, denn $B/\mathfrak{m}_A B = B/\mathfrak{m}_B = A/\mathfrak{m}_A$, nach der ersten Voraussetzung. Also erzeugt das Element 1 den A -Modul B , was zu zeigen war. \square

Ab sofort betrachten wir die Situation von irreduziblen, projektiven Kurven über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k . Wir erinnern daran, dass nach Satz 16.4 ein Morphismus $f : X \rightarrow Y$ zwischen projektiven Kurven stets abgeschlossen ist, und er daher surjektiv ist oder ein endliches (im irreduziblen Fall: einpunktiges) Bild hat. Wir erinnern an Aufgabe TODO für die Definition eines endlichen Morphismus.

Proposition 18.5 *Ein surjektiver Morphismus $f : X \rightarrow Y$ zwischen irreduziblen projektiven Kurven ist ein endlicher Morphismus.*

Beweis: Da f surjektiv, also insbesondere dominant ist, induziert f eine Inklusion $K(Y) \rightarrow K(X)$ der Funktionenkörper. Da beide Körper endlich erzeugt und vom Transzendenzgrad Eins sind, muss dies eine endliche Körpererweiterung sein. Die Fasern von f sind abgeschlossene echte Unterschemata von X , also endlich. Nun verwendet man, dass ein eigentlicher Morphismus mit endlichen Fasern endlich ist ([Har77], Kapitel 3, Konsequenz aus Zariskis 'Main Theorem') oder die Endlichkeit des Ganzabschlusses ([Har77], II.Proposition 6.8, welche auf I.6 verweist.) \square

Der Grad $[K(X) : K(Y)]$ der zugehörigen Körpererweiterung wird auch der *Grad des Morphismus* genannt.

Nachdem wir den Pullback von Modulgarben, also insbesondere von Geradenbündeln, definiert haben, und auf glatten Kurven Geradenbündeln und Divisoren vergleichen können, wollen wir auch in dieser Situation den *Pullback von Divisoren* definieren, in den Fällen, in denen wir Divisoren definiert haben, nämlich für Morphismen zwischen glatten projektiven Kurven $f : X \rightarrow Y$.

In dieser Situation definieren wir an einem Punkt $P \in X$ den *Verzweigungsindex* e_P wie folgt. Sei $Q = f(P)$ und φ_Q ein lokaler Parameter, d.h. eine Funktion wie in Lemma 15.5, die in einer Umgebung von P nur bei P und

dort einfach verschwindet. Dann ist $e_P = \text{ord}_P(\varphi_Q \circ f)$ und für einen Divisor $D = \sum a_P \cdot P$ definieren wir

$$f^*D = \sum_{P \in X} e_P a_P \cdot P.$$

Man prüft nach, dass die Definition des Pullbacks mit dem von Geradenbündeln und dem Isomorphismus in Proposition 15.6 verträglich ist. In dieser Situation gilt weiterhin:

Proposition 18.6 *Für jeden Punkt Q ist $\deg(f^*Q) = \deg(f)$. Insbesondere ist $\deg(f^*D) = \deg(f) \deg(D)$ für jeden Divisor D .*

Beweis: [Har77], II.Proposition 6.9. □

In dieser Situation, also $f : X \rightarrow Y$ ein surjektiver Morphismus zwischen glatten projektiven Kurven definieren wir den *Verzweigungsdivisor* als

$$R = \sum_{P \in X} (e_P - 1) \cdot P.$$

Dass R in der Tat ein Divisor ist, folgt aus Proposition 17.7, wie in Aufgabe WELCHER genauer ausgeführt.

Die Punkte P in X mit $e_P > 1$ werden *Verzweigungspunkte* genannt. Oftmals werden deren Bilder in Y auch Verzweigungspunkte genannt. (Die Literatur ist in dieser Begriffsbildung uneinheitlich. In englischsprachigen Quellen wird manchmal zwischen 'ramification point' und 'branch point' unterschieden, aber auch da ist nicht einheitlich, welche in X und welche in Y liegen. Man muss den Kontext lesen.)

Der Verzweigungsdivisor misst den Unterschied zwischen den kanonischen Bündeln auf X und Y .

Satz 18.7 (Riemann-Hurwitz) *Sei $f : X \rightarrow Y$ ein surjektiver Morphismus zwischen glatten projektiven Kurven über einem Körper der Charakteristik Null und R der Verzweigungsdivisor von f . Dann ist $K_X = f^*K_Y + R$, oder äquivalent $\omega_X = f^*\omega_Y \otimes \mathcal{O}_X(R)$ in $\text{Pic}(X)$.*

Beweis: Sei $P \in X$ ein beliebiger Punkt mit Bildpunkt $Q = f(P) \in Y$. Wir wählen die durch Lemma 15.5 gegebenen lokalen Parameter φ_P und φ_Q , die bei P bzw. Q genau einfach verschwinden. Dann gilt nach Definition des Verzweigungsindex $f^*\varphi_Q = u\varphi_P^{e_P}$ mit einer Funktion u , die auf einer Umgebung von P weder eine Nullstelle noch eine Polstelle besitzt. Wie im Beweis von Proposition 15.6 wählen wir einen rationalen Schnitt s zur Berechnung des Divisor, hier von der Garbe ω_Y . Angenommen $\text{div}(s)$ enthält den Punkt Q mit Koeffizient n . Dann ist lokal

$$s = v \varphi_Q^n d\varphi_Q$$

mit einer Funktion v , die auf einer Umgebung von Q weder eine Nullstelle noch eine Polstelle besitzt. Also ist

$$f^*s = f^*v(f^*\varphi_Q^n)d(f^*\varphi_Q) = f^*v u^n \varphi_P^{ne_P} \cdot (\varphi_P^{e_P} du + u e_P \varphi_P^{e_P-1} d\varphi_P).$$

Da die Terme in der Klammer aufgrund der Charakteristikvoraussetzung verschiedene Verschwindungsordnungen haben, ist die Verschwindungsordnung davon das Minimum der beiden und insgesamt verschwindet der Ausdruck bei P zur Ordnung $n + e_P - 1$. Da f^*s ein rationaler Schnitt von ω_X ist, folgt die Behauptung durch Summation der obigen Rechnung über allen Punkte $P \in X$. \square

In Charakteristik p zeigt die Abbildung $f : z \mapsto z^p$, dass die Aussage im Allgemeinen falsch ist. Unter der Voraussetzung dass die Erweiterung $K(X)/K(Y)$ der Funktionenkörper separabel ist, bleibt die Aussage des Satzes von Riemann-Hurwitz richtig.

Wir kommen nun zur Definition des Geschlechts einer glatten projektiven Kurve, genauer gesagt zum Vergleich der verschiedenen Definition. Zunächst hatten wir in Aufgabe ?? das *arithmetische Geschlecht* g_a einer beliebigen Kurve $X \rightarrow \mathbb{P}_k^n$ als

$$g_a(X) = 1 - P_X(0)$$

definiert, wobei P_X das Hilbertpolynom der projektiven Untervarietät ist. Dieser Begriff hängt a priori von der Einbettung in einen projektiven Raum ab. Wir zeigen später die Unabhängigkeit von der Einbettung durch Vergleich mit dem topologischen Geschlecht. Wichtigste Konsequenz dieser Definition ist die Formel

$$h^0(\mathcal{O}_X(n)) = P_X(n) = \deg(\mathcal{O}_X(n)) + 1 - g_a(X) \quad (18.1)$$

für genügend große n . Dabei ist die erste Gleichheit die Definition des Hilbertpolynoms, denn globale Schnitte von $\mathcal{O}_X(n)$ sind von der Form f/g mit homogenen Funktionen f, g mit $\deg(f) - \deg(g) = n$ und g muss zudem konstant sein, da X projektiv ist. Weiter ist nach Proposition 9.3 das Polynom P_X linear und nach Definition des arithmetischen Geschlechts ist noch zu zeigen, dass der führende Koeffizient gleich $\deg(\mathcal{O}_X(1))$ ist. Diesen Koeffizienten hatten wir in Abschnitt 9 den Grad von X in \mathbb{P}^n genannt. Falls X eine Hyperebene ist, also $n = 2$, folgt die Behauptung direkt aus der Version Satz 9.6 des Satzes von Bezout, der allgemeine Fall durch Induktion durch Schneiden mit Hyper-ebenen.

Einen weiteren Geschlechtsbegriff definiert man für projektive algebraische Kurven über den komplexen Zahlen, d.h. für kompakte Riemannsche Flächen $X_{\mathbb{C}}$ (oder etwas allgemeiner für kompakte topologische Flächen). Wir nehmen ohne Beweis an, dass eine solche Riemannsche Flächen $X_{\mathbb{C}}$ eine *Zellen* besitzt,

d.h. es gibt 0-Zellen (Punkte), 1-Zellen (Kanten) und 2-Zellen (Dreiecke), jeweils abgeschlossene Teilmenge von X , wobei das Innere einer Zelle Y homöomorph zu $(0, 1)^{\dim(Z)}$ ist, sodass die Flächen $X_{\mathbb{C}}$ überdecken, die Ränder von Flächen endlich viele Kanten sind, die Ränder von Kanten Punkte sind, sowie Punkte nur an den Rändern von Kanten liegen und Flächen nur an den Rändern von Flächen, und schliesslich, dass eine Teilmenge $M \subseteq X_{\mathbb{C}}$ genau dann abgeschlossen ist, wenn ihr Schnitt mit allen Zellen abgeschlossen ist.

Seien σ_0, σ_1 und σ_2 respektive die Anzahl von 0-, 1- und 2-Zellen. Dann gilt die fundamentale Beobachtung:

Lemma 18.8 *Die topologische Eulercharakteristik $\chi(X_{\mathbb{C}}) = \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2$ einer kompakten Riemannschen Flächen $X_{\mathbb{C}}$ ist unabhängig von der Zellzerlegung.*

Beweis: Zunächst überzeugt man sich, dass $\chi(X_{\mathbb{C}})$ unter Verfeinern invariant ist. Jede Verfeinerung ist Verkettung folgender zwei Operationen. Wenn man einen Punkt im Inneren einer Kante einfügt, muss diese in zwei Kanten geteilt werden und dabei steigen σ_0 und σ_1 beide um eins. Wenn man eine Kante im Inneren einer Zelle einfügt, muss diese in zwei Zellen geteilt werden und dabei steigen σ_1 und σ_2 beide um eins.

Schliesslich haben je zwei Zellzerlegungen eine gemeinsame Verfeinerung, in dem man die Kanten beider Zerlegungen nimmt, Punkte an allen Schnittpunkten einfügt und eine Zelle zu jedem Komplement der Vereinigung aller Kanten hinzunimmt. \square

Wir definieren mit Hilfe dieses Lemmas das *topologische Geschlecht* einer kompakten Riemannschen Fläche $X_{\mathbb{C}}$ durch $\chi(X_{\mathbb{C}}) = 2 - 2g_{\text{top}}$.

Satz 18.9 (Topologische Riemann-Hurwitz-Formel) *Sei $f : X \rightarrow Y$ ein surjektiver Morphismus vom Grad d zwischen glatten projektiven Kurven über \mathbb{C} und sei R der Verzweigungsdivisor von f . Dann ist*

$$\chi(X_{\mathbb{C}}) = d\chi(Y_{\mathbb{C}}) - \deg(R).$$

Beweis: Wir können durch Verfeinerung der Zellzerlegung immer annehmen, dass alle die Bilder der Verzweigungspunkte 0-Zellen sind. Wir bezeichnen die Anzahl der Zellen in X bzw. in Y mit einem entsprechenden oberen Index.

Dann gilt also $\sigma_1^X = d\sigma_1^Y$ und $\sigma_2^X = d\sigma_2^Y$. Bei den 0-Zellen würden bei der entsprechenden Formel jeder Punkt mit n Urbildern gezählt. Bei einem Verzweigungspunkt P ist diese Zählung aber um einen Summanden $e_P - 1$ falsch. Daraus folgt $\sigma_0^X = d\sigma_0^Y - \deg(R)$ und die behauptete Formel. \square

Damit können wir den Grad des kanonischen Divisors ausrechnen, in dem wir die beiden Riemann-Hurwitz-Formeln miteinander vergleichen.

Proposition 18.10 *Ist X eine projektive algebraische Kurve über \mathbb{C} , so ist*

$$\deg K_X = 2g_{\text{top}} - 2. \tag{18.2}$$

Beweis: Jede projektive algebraische Kurve über k besitzt einen surjektiven Morphismus nach \mathbb{P}_k^1 , den man durch geeignete Projektion der projektiven Einbettung erhält. Da $\deg K_{\mathbb{P}_k^1} = -2$ nach Proposition 17.3, folgt die Behauptung aus der topologischen Riemann-Hurwitz-Formel. \square

Wir bringen nun die beiden Definitionen des Geschlechts in Verbindung.

Satz 18.11 *Ist X eine projektive algebraische Kurve über \mathbb{C} , so ist*

$$g_a(X) = g_{\text{top}}(X_{\mathbb{C}}). \quad (18.3)$$

Beweis: Wir starten mit einer gegebenen Kurve $X \rightarrow \mathbb{P}^n$ und verallgemeinern die Projektion von einem Punkt aus zu Projektionen $p_L : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^k$ von einem Unterraum $L = L_{n-k+1}$ der Dimension $n - k + 1$. Der Beweis besteht aus zwei Schritten:

Im Schritt I betrachten wir die Restriktionen $p_k = p_L|_X$ von p_L auf X und zeigen abhängig von der Bilddimension:

- Ia) Ist $k \geq 3$, so ist für fast alle L der Morphismus p_k birational auf das Bild und X ist glatt.
- Ib) Ist $k = 2$, so ist für fast alle L der Morphismus p_2 birational auf das Bild und X ist glatt bis auf endlich viele 'rationale Doppelpunkte', d.h. Punkte bei denen die lokale Gleichung die Gestalt

$$0 = (aX_0 + bX_1)(cX_0 + dX_1) + (\text{Terme höherer Ordnung})$$

mit $ad - bc \neq 0$ hat.

- Ic) Ist $k = 1$, so ist p_1 für fast alle L surjektiv und $e_p \leq 2$ für alle $P \in X$.

Für Schritt II definieren wir $d = \deg(X)$, es sei ν die Anzahl der Doppelpunkte von $p_2(X)$ und β die Anzahl der Verzweigungspunkte von p_1 . Wir zeigen

$$\text{IIa) } g_a = (d - 1)(d - 2)/2 - \nu$$

$$\text{IIb) } d(d - 1) = \beta + 2\nu.$$

Ausserdem ist $2g_{\text{top}} - 2 = -2d + \beta$ nach Riemann-Hurwitz, da $\deg(X)$ gleich der Anzahl der Schnittpunkte von X mit der Hyperebene aufgespannt von L_{n-2} und einer Gerade von L durch X ist, und somit gleich dem Grad von p_1 . Diese Gleichungen löst man zu $g_a = g_{\text{top}}$ auf.

Zum Beweis von Ia) betrachten wir Projektion von einem Punkt $P \notin X$ aus. Wir behaupten, dass es einen solchen Punkt gibt, sodass

$$\overline{Px} \cap X = \{x\} \quad \text{für alle } x \in X \text{ und } \langle \overline{Px} \rangle \neq T_{X,x}. \quad (18.4)$$

Wir suchen solche Punkte, denn die erste Bedingung garantiert, dass die Projektion p_x eingeschränkt auf X bijektiv auf ihr Bild ist. Die zweite Bedingung garantiert, dass $p_x(X)$ glatt ist. (Dazu rechnet man nach, dass die zweite Bedingung garantiert, dass die Schnittmultiplizität $i(L, X; x) = 1$ ist. Nun fehlt noch das Kriterium, dass diese Glattheit des Bildpunktes impliziert, siehe z.B. [Mum95, Theorem 5.11 b) und Corollary 5.15]). Zum Beweis der Existenz von x zeigen wir, dass die zu (18.4) komplementäre Bedingung eine abgeschlossene Untervarietät der Dimension 3 definiert. Dazu betrachten wir die Inzidenzvarietät

$$X \times X \times \mathbb{P}^k \supseteq C := \{(x, y, z) : z \in \overline{xy}\},$$

wobei im Falle von $x = y$ die Gerade \overline{xy} als Tangente zu interpretieren ist. Um einzusehen, dass dies eine abgeschlossene algebraische Untervarietät von $X \times X \times \mathbb{P}^k$ ist, betrachtet man die Geradengleichung, die die möglichen Positionen von z für $x \neq y$ definiert. Die Tangentenbedingung erhält man, wenn man diese Untervarietät abschließt. Da es durch je zwei Punkte nur eine Gerade gibt, sind die Fasern der Projektion $C \rightarrow X \times X$ eindimensionale Untervarietäten und somit ist C dreidimensional, was zu zeigen war.

Für den Beweis von Schritt Ib) können wir nach Schritt Ia) annehmen, dass $n = 3$ ist. Für diesen Schritt suchen wir Punkte $P \notin X$, sodass i) P nirgends auf einer Tangente an einen Punkt $x \in X$ liegt, ii) es nur endlich viele Punktpaare $u_i, v_i \in X$ gibt, sodass P auf der Sekanten $\overline{u_i v_i}$ liegt, iii) in all diesen Fällen ist $\overline{u_i v_i}$ keine Dreifachsekante an X und iv) in all diesen Fällen liegen T_{X, u_i} und T_{X, v_i} nicht in einer Ebene.

Dabei besagt ii), dass $p_x : X \rightarrow p_x(X)$ birational ist und erlaubt endlich viele Doppelpunkte, iii) verhindert Dreifachpunkte, i) verhindert (höhere) Spitzen (in einer Umgebung derer der Morphismus p_x bijektiv aber kein Isomorphismus auf das Bild ist), iv) verhindert, dass zwei Zweige sich tangential statt transversal im Bild von p_x treffen.

Um zu zeigen, dass es so einen Punkt P gibt, definieren wir die Trisekantenvarietät

$$T = \{(x, y) : \overline{xy} \text{ trifft } X \text{ in einem dritten Punkt}\} \subseteq X \times X \setminus \Delta,$$

wobei unter 'drittem Punkt' auch 'ist tangential bei x oder bei y ' eingerechnet ist, und die Bitangentialebenenvarietät

$$B = \{(x, y) : \text{die Geraden } T_{X, x} \text{ und } T_{X, y} \text{ liegen in einer Ebene}\} \subseteq X \times X \setminus \Delta.$$

Dass dies abgeschlossene Untervarietäten sind, ist in der komplexen Topologie klar. Algebraisch sieht man dies ein, indem man Bedingungs-paare wie z.B. ' P liegt auf \overline{xy} ' und ' P liegt auf X ' mittels Resultanten als polynomiale Bedingungen an (x, y) erkennt.

Wir wollen nun zeigen, dass T und B echt in $X \times X \setminus \Delta$ enthalten sind. Dazu beginnen wir mit einem Punkt $x \in X$, seiner Tangenten ℓ und betrachten die

Einschränkung der Projektion $p_\ell : X \rightarrow \mathbb{P}^1$. Sei $\alpha \in \mathbb{P}^1$ ein Punkt, über dem p_ℓ unverzweigt ist. Sei $L = p^{-1}(\alpha) \cup \ell$ der Abschluss der Hyperebene im Urbild von α und wir listen die Punkte im Schnitt $L \cap X = \{x, y_1, \dots, y_m\}$. Für einen Punkt $y \in X$ ausserhalb von ℓ bedeutet die Unverzweichtigkeit von p_ℓ , dass das p_ℓ -Bild der Tangente dort gleich \mathbb{P}^1 ist. Daher ist der Tangentialraum T_{X,y_i} für kein i in L . Mit anderen Worten, die Punktpaare (x, y_i) liegen nicht in B .

Die Aussage der echten Inklusion für T führen wir auf die Aussage von B zurück. Wir argumentieren dazu komplex-analytisch und parametrisieren die glatte Kurve X in einer Umgebung von x durch $\phi : D = \{z : |z| < \varepsilon\} \rightarrow X$, $\phi(0) = x$. Der Satz über implizite Funktionen gestattet dies. Wir betrachten die Sekanten $\overline{y_i \phi(z)}$. Da $(x, y_i) \notin B$, ist auch $(\phi(z), y_i) \notin B$ falls ε klein genug gewählt ist. Angenommen $T = X \times X \setminus \Delta$, also hat (x, y_1) eine Trisekante, die dann notwendigerweise in L liegt. Damit ist der dritte Punkt auf dieser Geraden auch einer der Punkte y_i . Auch Punkte in der Nähe von x hätten dann Trisekanten. Es gäbe also eine Folge von Punkten $z_n \rightarrow 0$, $X \ni y_i^{(n)} \rightarrow y_i$, sodass $(\phi(x), y_1, y_i^{(n)})$ kollinear sind. Mit anderen Worten liegt die Sekante $\overline{y_1, y_1^{(n)}}$ in der Ebene, die von $\{y_1, x, \phi(z)\}$ aufgespannt wird. Im Limes $n \rightarrow \infty$ konvergiert dies zur Ebene L und die Sekante $\overline{y_1, y_1^{(n)}}$ zur Tangente T_{X,y_i} . Damit haben wir den gesuchten Widerspruch zu $T_{X,y_i} \not\subseteq L$.

Zum Beweis von Ic) muss man 'inflection points' auf X untersuchen. Ist $x \in X$ ein glatter Punkt, so sind dies die Punkte mit $i(X, T_{X,x}; x) \geq 3$. Sei ab sofort $X = Z(f)$, wobei $f \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$ ein homogenes Polynom vom Grad d ist. Wir behaupten, dass die 'inflection points' genau die Punkte im glatten Ort von X , bei denen die Determinante der Hesse-Matrix

$$H = \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j}\right)$$

nicht verschwindet. Zum Beweis der Aussage verwendet man die Unabhängigkeit des Verschwindens von H von der Koordinatenwahl, nimmt also $x = (1 : 0 : 0)$ und $T_{X,x} = V(X_1)$ an, sodass

$$f = \alpha X_1 X_0^{d-1} + (\beta X_2^2 + \gamma X_1 X_2 + \delta X_1^2) X_0^{d-2} + R,$$

wobei im Restglied R nur Monome $X_1^i X_2^j$ vom Gesamtgrad größer zwei auftreten. Dann ist

$$H(1, 0, 0) = -2(d-1)^2 \alpha^2 \beta$$

und $\alpha \neq 0$, da x glatt vorausgesetzt ist. Also ist $H = 0$ äquivalent zu $\beta = 0$ und dies ist wiederum äquivalent dazu, dass die Multiplizität ≥ 3 ist, wie man durch Einsetzen von $X_1 = 0$ in f erkennt.

An dem Kriterium mit der Hesse-Matrix erkennt man, dass 'inflection points' eine abgeschlossene algebraische Untervarietät des glatten Locus von X bilden, und falls $d = \deg(f) = \deg(X) > 1$ ist, offenbar auch eine echte Untervarietät, also endlich viele Punkte.

Der letzte Schritt im Beweis von Ic) ist nun nachzuprüfen, dass für $P \in \mathbb{P}^2$ ausserhalb von X und ausserhalb der Tangenten an 'inflection points' die Projektion $p_P|_X$ nur einfache Verzweigungspunkte besitzt. Die Details stehen in [Mum95, Seite 137].

Zum Beweis von IIa) betrachten wir die endliche vielen Punktpaare (u_i, v_i) für $i = 1, \dots, \nu$, die auf einen Punkt y_i in $Y = p_2(X)$ abgebildet werden, so dass p_2 ausserhalb dieser Punkte ein Isomorphismus ist. Der Morphismus p_2 definiert eine Inklusion

$$S = \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]/(F) \rightarrow \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]/I(X)$$

der homogenen Koordinatenringe. Wir können durch Koordinatenverschiebung annehmen, dass $X_i(y_j) \neq 0$ für alle i, j ist. Wir behaupten, dass für $k \gg 0$ die Sequenz

$$0 \rightarrow S_k \rightarrow R_k \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{\nu} \mathbb{C} \rightarrow 0 \quad (18.5)$$

exakt ist, wobei der zweite Morphismus durch $\alpha(f) = \frac{f}{X_0^k}(u_i) - \frac{f}{X_0^k}(v_i)$ definiert ist. Aus diese Behauptung folgt wegen $d = \deg(F)$ nach Bézout, dass

$$\begin{aligned} P_X(k) &= \dim(R_k) = \dim(\mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]/(F)_k) + \nu \\ &= \dim(\mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]_k) - \dim(F \cdot \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]_{k-d}) + \nu \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} - \frac{(k-d+1)(k-d+2)}{2} + \nu \\ &= kd + 1 + \frac{(d+1)(d+2)}{2} + \nu \end{aligned}$$

und damit die Aussage von IIa).

Um die Behauptung in (18.5) zu zeigen, beweisen wir zunächst die Surjektivität von α . Dies ist nichts anderes als die geometrisch sofort einsichtige Behauptung, dass es für großes k zu jedem i eine Hyperfläche G_i vom Grad k gibt, sodass $u_j, v_j \in Z(G_i)$, $u_i \notin Z(G_i)$ und $v_i \in Z(G_i)$. Das Bild von G_i ist dann der i -te Einheitsvektor. Offensichtlich ist auch das Bild der Inklusion im Kern von α .

Es bleibt zu zeigen, dass ein $G \in R_k$ mit $\alpha(G) = 0$ in S_k liegt. Wir können G als Element des Quotientenkörpers von S auffassen, da p_2 birational ist. Es gilt nun folgende Aussage über Quotientenkörper in K eines graduierten Rings S . Für fixiertes N gibt es ein k_0 , sodass für alle $k \geq k_0$ ein homogenes Element $s \in K$ vom Grad k , dessen Produkt $X_i^N s \in S_{N+k}$ mit Erzeugern X_i von S_1 im Ring liegt, bereits selbst im Ring liegt (siehe [Mum95] Proposition 6.11).

Die alles symmetrisch bzgl. der X_i ist, genügt also mit dieser Bemerkung dass für genügend großes k und ein $G \in R_k$ mit $\alpha(G) = 0$ es ein N gibt mit $X_0^N G \in S_{k+N}$. Dies ist eine dehomogenisierte Behauptung, nämlich gegeben die Inklusion

$$S' = \mathbb{C}\left[\frac{X_1}{X_0}, \frac{X_2}{X_0}\right] / \frac{F}{X_0^d} \rightarrow R' = \mathbb{C}\left[\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_r}{X_0}\right] / I(X)$$

so ist zu zeigen, dass ein $g \in R'$ mit $g(u_i) = g(v_i)$ für alle i bereits in S' liegt. Da der affinen Koordinatenring der Durchschnitt über die lokalen Ringe aller Punkte ist, verbleibt noch die Kernaussage

$$\mathcal{O}_{Y,y_i} = \{g \in \mathcal{O}_{X,u_i} \cap \mathcal{O}_{X,v_i} : g(u_i) = g(v_i)\}. \quad (18.6)$$

zu zeigen. Um dies einzusehen, nehmen wir an, dass $y = y_i = (0, 0)$ und die lokale Gleichung dort in erster Näherung den Koordinatenachsen X_1 und X_2 entspricht, d.h. $F \equiv X_1 X_2 \pmod{\mathfrak{m}_{0,0}^2}$. Ein beliebiges Element f von $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,y}$ kann man als $f = \sum_{i+j < n} c_{ij} X_1^i X_2^j + \mathfrak{m}_{0,0}^n$ schreiben. Gemischte Terme kann man aufgrund der lokalen Gleichung durch höhere Potenzen ersetzen und deswegen kann man jedes Element $f \in \mathcal{O}_{Y,y}$ als

$$f = a + \sum_{i=1}^{n-1} b_i X_1^i + \sum_{i=1}^{n-1} c_i X_2^i + \mathfrak{m}_{0,0}^n \quad (18.7)$$

schreiben. Andererseits kann man ein Element der rechten Seite von (18.6) als

$$f = a + \sum_{i=1}^{n-1} b_i X_1^i + \sum_{i=1}^{n-1} c_i X_2^i + R_n \quad (18.8)$$

schreiben, wobei R in $\mathcal{O}_{X,u_i} \cap \mathcal{O}_{X,v_i}$ ist und zur Ordnung n sowohl bei u_i als auch bei v_i verschwindet. Wir verwenden nun, dass die Quotientenkörper von X und $p_2(X)$ gleich sind. Daher können wir $f = f_n(X_1, X_2) + R_n = g/h$ mit $g, h \in \mathcal{O}_{Y,y}$ schreiben und $hR_n = g - hf_n \in \mathcal{O}_{Y,y}$ wie in (18.7) ausschreiben. Wegen des Verschwindens zu Ordnung n sind die Koeffizienten a, b_i, c_i alle gleich Null. Also ist $hR_n \in \mathfrak{m}_{0,0}^n$, oder umformuliert

$$g \in h \cdot \mathcal{O}_{Y,y} + \mathfrak{m}_{Y,y}^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Nach dem Krull'schen Durchschnittssatz ist damit $g \in h \cdot \mathcal{O}_{Y,y}$ und somit $f \in \mathcal{O}_{Y,y}$.

Eine Anleitung zum Beweis von IIb) ist Aufgabe WELCHE? □

Wir kommen nach diesen Vorbereitungen zu einem der vielen Beweise von einem der viele Versionen des Satzes von Riemann-Roch. Der hier gegebene Beweis verwendet, dass eine glatte projektive Kurve über den komplexen Zahlen stets eine Riemannsche Fläche ist und den Residuensatz auf einer Riemannsche Fläche. Algebraische Beweise, die die Voraussetzung über den Grundkörper nicht benötigen, erhält man z.B. mit Hilfe von Garbenkohomologie und Serre-Dualität, siehe z.B. [Har77][Theorem IV.1.3]. Auch Serre-Dualität basiert auf einer Residuenabbildung, weswegen der hier gegebene Beweis im Grunde mit der komologischen Version identisch ist.

Satz 18.12 (Riemann-Roch) *Sei X eine glatte projektive Kurve über den komplexen Zahlen. Dann gilt für jeden Divisor D auf X*

$$h^0(D) - h^0(K_X - D) = \deg(D) + 1 - g.$$

Beweis: Ausgangspunkt ist die exakte Sequenz von Garben

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(D) \rightarrow \mathcal{O}_X(D + P) \rightarrow \mathbb{C}_P \rightarrow 0$$

wobei \mathbb{C}_P die Wolkenkratzergarbe (vgl. Aufgabe 11.1) im Punkt P mit Halm \mathbb{C} ist. Daraus erhält man die exakte Sequenz,

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D + P)) \rightarrow \mathbb{C},$$

wobei wir nicht behaupten, dass im Allgemeinen der letzte Morphismus surjektiv ist. Wir schreiben also $\chi(D) = h^0(D) - h^0(K_X - D)$, wissen damit dass $\chi(D + P) - \chi(D) \in \{0, 1, 2\}$ ist und wollen zeigen, dass diese Differenz immer gleich Eins ist.

Im ersten Schritt zeigen wir, dass $\chi(D + P) - \chi(D) \neq 2$ ist. Angenommen dies ist doch der Fall. Dann gibt es einen globalen Schnitt φ von $\mathcal{O}_X(D + P)$, welcher kein globaler Schnitt von $\mathcal{O}_X(D)$ ist und ausserdem gibt es einen globalen Schnitt α von $\omega_X(D) = \mathcal{O}_X(K_X - D)$, welcher kein globaler Schnitt von $\mathcal{O}_X(K_X - D - P)$ ist. Dann ist $\varphi\alpha$ ein globaler Schnitt von ω_X , welcher einen einfachen Pol bei P hat und sonst keine Pole. Da ein einfacher Pol stets ein nicht-verschwindendes Residuum hat, ist dies ein Widerspruch zum Residuensatz.

Im zweiten Schritt zeigen wir $\chi(D) \geq \deg(D) + 1 - g$ für jeden Divisor D . Dazu suchen wir Punkte P_1, \dots, P_r , sodass $\mathcal{O}_X(D + P_1 + \dots + P_r) = \mathcal{O}_X(n)$ bezüglich irgendeiner projektiven Einbettung $X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ ist. Um dies zu erreichen, können wir annehmen, dass D effektiv ist (indem wir gegebenenfalls Punkte hinzunehmen, die bei D mit negativem Koeffizienten auftreten). Dann nehmen wir für jeden Punkt, der im Träger von $D = \sum a_p \cdot P$ die a_p -te Potenz einer Hyperebene, die durch P geht. Diese definiert einen globalen Schnitt von $\mathcal{O}_X(a_p)$, der im Allgemeinen neben $a_p \cdot P$ noch viele weitere Nullstellen hat. Das Produkt all dieser Schnitte ist ein globaler Schnitt von $\mathcal{O}_X(n)$ für ein großes n und wir nehmen als P_i die unbeabsichtigten weiteren Nullstellen der Schnitte. Indem wir gegebenenfalls durch Multiplizieren mit weiteren Schnitten n noch weiter vergrössern, können wir aufgrund von (18.1) annehmen, dass

$$h^0(D + P_1 + \dots + P_r) = \deg(D) + r + 1 - g_a(X)$$

ist. Wenn man n (bzw. r) weiter vergrössert, kann man zudem annehmen, dass $K - D - P_1 - \dots - P_r$ negativen Grad hat und somit keine globalen Schnitte haben kann. Damit können wir also annehmen, dass

$$\chi(D + P_1 + \dots + P_r) = \deg(D) + r + 1 - g_a(X).$$

Nun lassen wir sukzessive die Punkte P_i weg. Bei jedem solchen Schritt fällt die rechte Seite um Eins, die linke um Null oder Eins, aufgrund des ersten Schritts. Daraus folgt die Behauptung.

Im dritten Schritt führen wir das gleiche Argument für $K_X - D$ durch und erhalten

$$\begin{aligned} -\chi(D) &= h^0(K_X - D) - h^0(D) \geq \deg(K_X) - \deg(D) + 1 - g_a(X) \\ &= -\deg(D) - 1 + g_a(X), \end{aligned}$$

da $\deg(K_X) = 2g_{\text{top}}(X_{\mathbb{C}}) - 2$ und $g_{\text{top}}(X_{\mathbb{C}}) = g_a(X)$ nach Satz 18.11. Die Kombination dieser beiden Ungleichungen ergibt die Behauptung. \square

Als Spezialfall dieses Satzes erhalten wir $h^0(K_X) = g$, welches in vielen Quellen die Ausgangsdefinition für das Geschlecht einer algebraischen Kurve ist.

Als weiteren Spezialfall sehen wir auch, dass für $\deg(D) \geq 2g - 1$ der Beitrag $h^0(K_X - D)$ verschwindet, dass also für solche Divisoren die Beziehung $h^0(D) = \deg(D) + 1 - g$ zwischen Grad und Anzahl der globalen Schnitte gilt.

Noch zwei Anwendungen:

Proposition 18.13 Sei D ein Divisor auf einer glatten, projektiven Kurve X vom Geschlecht g . Ist $\deg(D) \geq 2g$ so definieren die globalen Schnitte von $\mathcal{O}_X(D)$ einen Morphismus $X \rightarrow \mathbb{P}^r$, wobei $r = h^0(D) - 1$.

Ist $\deg(D) \geq 2g + 1$ so ist dieser Morphismus zudem eine abgeschlossene Einbettung.

Beweis: Für die erste Aussage müssen wir nach Proposition 18.1 zeigen, dass es zu jedem Punkt $P \in X$ ein Schnitt $s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$ gibt, mit $s(P) \neq 0$. Aufgrund der Gradvoraussetzung ist $h^0(K_X - D) = 0$ und auch $h^0(K_X - D + P) = 0$. Damit folgt aus Riemann-Roch, dass

$$h^0(D) = \deg(D) + 1 - g, \quad h^0(D - P) = (\deg(D) - 1) + 1 - g.$$

Daraus folgt, dass es den gewünschten Schnitt gibt.

Für die zweite Aussage zeigen wir, dass $\mathcal{O}_X(D)$ Punkte und Tangenten trennt, was nach Proposition 18.3 die gewünschte Einbettung liefert. Seien zwei Punkte $P \neq Q$ gegeben. Dann wenden wir das Argument des ersten Teils auf $D - P$ an und erhalten aufgrund der neuen Gradvoraussetzung $h^0(D - P) - h^0(D - P - Q) = 1$, und damit den gesuchten Schnitt. Um Tangenten zu trennen müssen wir (im Kurvenfall) nur einen Schnitt $s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$ finden, der bei P genau zu erster Ordnung verschwindet. Nochmal das gleiche Argument liefert $h^0(D - P) - h^0(D - 2P) = 1$, und damit den gesuchten Schnitt. \square

Literatur

- [AM69] M. F. Atiyah und I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969, S. ix+128.
- [Gat14] Andreas Gathmann. "Algebraische Geometrie". Vorlesungsskript, Kaiserslautern. 2014. URL: <http://www.mathematik.uni-kl.de/agag/mitglieder/professoren/gathmann/notes/alggeom/>.
- [GH94] Phillip Griffiths und Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry*. Wiley Classics Library. Reprint of the 1978 original. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994, S. xiv+813.
- [GW10] Ulrich Görtz und Torsten Wedhorn. *Algebraic geometry I*. Advanced Lectures in Mathematics. Schemes with examples and exercises. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2010, S. viii+615.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977, S. xvi+496.
- [Har95] Joe Harris. *Algebraic geometry*. Bd. 133. Graduate Texts in Mathematics. A first course, Corrected reprint of the 1992 original. Springer-Verlag, New York, 1995, S. xx+328.
- [KommAlg] Jakob Stix. "Kommutative Algebra". Vorlesungsskript, Frankfurt/Main. 2015. URL: <http://www.uni-frankfurt.de/55160105/Stix-KommutativeAlgebra-Skript.pdf>.
- [Mum95] David Mumford. *Algebraic geometry. I*. Classics in Mathematics. Complex projective varieties, Reprint of the 1976 edition. Springer-Verlag, Berlin, 1995, S. x+186.
- [Sha13] Igor R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry. 1*. Third. Varieties in projective space. Springer, Heidelberg, 2013, S. xviii+310.

Stichwortverzeichnis

- \mathcal{O}_X -Modul, 68
- d -uple Veronese-Einbettung des \mathbb{P}^n ,
14
- n -dimensionale projektive
Raum $\mathbb{P}^n(k)$, 9
- $(k-)$ algebraische Menge, 3
- (affine) algebraische Kurve, 8

- abgeschlossene Einbettung, 76
- affine Koordinatenring, 7
- affine Schema zu R , 60
- affine Varietät, 3
- affinen Geraden, 4
- affinen Raum, 3
- analytisch isomorph, 32
- arithmetische Geschlecht g_a , 88
- Aufblasungen, 24

- birationale Abbildungen, 21

- Chevalley-Dimension $\delta(S)$, 36
- Cremona-Transformation, 24

- Diagonale, 57
- Dimension, 6
- Dimension einer algebraischen
Menge, 6
- direkten Bildes $\varphi_*\mathcal{F}$, 53
- Divisor, 48
- dominant, 21
- duale Garbe, 70

- effektiver Divisor, 72
- eigentlich, 67
- Euler-Sequenz, 81

- exzeptionelle Divisor, 26

- Faser, 67
- Faserprodukt, 65
- Fortsetzung durch 0, 54
- freie Garbe, 68
- Funktionenkörper, 22

- ganz über R , 20
- Garbe, 52
- Garbifizierung, 54
- Gerade, 15
- Geradenbündel, 71
- geringster Raum (X, \mathcal{O}_X) , 56
- getwistete Kubik, 14
- glatt, 28
- Grad des Morphismus, 86
- Grad einer projektiven Varietät, 43
- graduiert, 9

- Halm, 52
- Hilbertpolynom, 34
- Hilbertpolynom $H(Y, t)$ einer pro-
jektiven Varietät, 42
- homogenen Koordinaten, 9
- homogenes Ideal, 10
- Homogenisierung, 12

- Idealgarbe, 76
- integer, 65
- irreduzibel, 3, 65
- irreduziblen Komponenten, 6
- irrelevante Ideal, 11
- isomorph, 16

- Jacobi-Matrix, 28

kanonische Bündel, 81
 Kegel $C(Y)$, 42
 Keime, 52
 klassischen Topologie, 13
 Kodimension, 9
 kohärent, 69
 Kompositionsreihe, 46
 konstante Garbe, 52
 Kotangentiale Bündel, 81
 Krulldimension, 7

 linear äquivalent, 49
 lokal geringter Raum, 62
 lokal noethersch, 65
 lokalen Ring $\mathcal{O}_{P,Y}$ im Punkt P , 29
 lokalfreie Garbe, 68

 mengentheoretischen vollständigen Durchschnitt, 14
 Morphismus lokal geringter Räume, 62
 Morphismus von affinen Schemata, 62
 Morphismus von Prägarben, 52
 Morphismus von Schemata, 63

 natürliche Projektionsabbildung, 9
 Nichtverschwindungsort, 17
 Nichtverschwindungsort $D(f)$, 61
 Noether-Normalisierung, 39
 noethersch, 5, 65
 Nullstelle, 3
 Nullstellenlokus, 3, 10

 Picardgruppe einer Kurve, 49
 Poincaré-Reihe, 33
 Prägarbe, 51
 Prävarietät, 56
 projektiv, 78
 projektive Varietät, 11
 projektiven Abschluss, 12
 projektiven Koordinatenring, 11
 projektives Schema, 75
 Pullback einer \mathcal{O}_Y -Modulgarbe, 77

 quasi-affine Varietät, 3
 quasi-kohärent, 69
 quasi-kompakt, 5
 quasi-projektive Varietät, 11

 rationale Abbildung, 21
 rationaler Schnitt, 72
 reduziert, 65
 regulärer lokaler Ring, 29
 relativen Differentialformen, 78
 relativen Differentialformen $\Omega_{X/Y}^1$, 80

 Schema, 63
 Schema über S , 63
 Schnitte, 51
 Schnittmultiplizität $i(Y, H; Z_j)$, 44
 Schnittprodukt, 48
 Segre-Einbettung, 14
 separiert, 63
 singular, 28
 Spektrum von R , 60
 Strukturgarbe \mathcal{O}_X , 61

 Tangentialbündel, 81
 Tangentialraum, 31
 topologische Geschlecht, 89
 Twist $M(\ell)$, 43
 Twisting-Garben $\mathcal{O}_X(n)$, 75

 Varietät, 57
 Vektorbündel, 71
 Verklebung, 57
 Verschwindungsideal, 4, 11
 Verschwindungsvarietät, 3
 Verzweigungsdivisor, 87
 Verzweigungsindex e_P , 86
 Verzweigungspunkte, 87
 vollständigen Durchschnitt, 14

 Wendepunkt, 45

 Zariski-Topologie, 3
 Zellen, 88
 zusammenhängend, 65
