Übungen zur Linearen Algebra

# Tutoriumsblatt 1

Dozent: Prof. M. Möller 16.10.2014

Übungen: Dr. R. Butenuth

---

**Übung 1** Einige Abkürzungen aus der Aussagenlogik: $\wedge$ ("und"), $\vee$ ("oder"), $\neg$ ("nicht").

(a) Bestimmen Sie die Negation der folgenden Aussagen:

(i) $\exists\, p\ :\ (p \text{ ist Primzahl}) \wedge (p > 2)$

(ii) $\forall\, x \in \mathbb{N}\ \forall\, y \in \mathbb{N}\ :\ x + y > 1$

(b) Was ist die Negation der Aussage "Jedes Übungsblatt schafft Unzufriedene"?

(i) "Es gibt kein Übungsblatt, mit dem alle zufrieden sind."

(ii) "Es gibt einen, der mit allen Übungsblättern zufrieden ist."

(iii) "Es gibt ein Übungsblatt, mit dem alle zufrieden sind."

(iv) "Alle sind mit jedem Übungsblatt zufrieden."

(v) "Es gibt keinen, der mit allen Übungsblättern zufrieden ist."

**Übung 2** (De Morganschen Gesetze) Sei $M$ eine Menge und $A, B \subseteq M$. Zeigen Sie:

(a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ und $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(b) Sei $I$ eine Menge (eine sogenannte "Indexmenge") und für jedes $i \in I$ sei $A_i \subseteq M$ eine Menge. Dann gilt:

$$\bigcup_{i \in I} \overline{A_i} = \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \text{ und } \bigcap_{i \in I} \overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$$

**Übung 3** Es seien $A, B$ Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung. Für $X \subseteq A$ und $Y \subseteq B$ definieren wir die Mengen

$$f(X) = \{y \in B \mid \exists\, x \in X : y = f(x)\}.\text{(Das Bild von } X \text{ unter } f)$$

und

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}.\ \text{(Das Urbild von } Y \text{ unter } f)$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle $X \subseteq A$ gilt $f^{-1}(f(X)) \supseteq X$. Falls $f$ injektiv ist gilt $f^{-1}(f(X)) = X$.

(b) Für alle $Y \subseteq B$ gilt $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$. Falls $f$ surjektiv ist gilt $f(f^{-1}(Y)) = Y$.

(c) Finden Sie Beispiele für Abbildungen $f$, bei denen $f^{-1}(f(X)) \subseteq X$ bzw. $f(f^{-1}(Y)) \supseteq Y$ nicht gilt.

Übungen zur Linearen Algebra

# Tutoriumsblatt 1

Dozent: Prof. M. Möller 16.10.2014

Übungen: Dr. R. Butenuth

---

**Übung 4** (a) Sei $G = \{\pm 1\} \subset \mathbb{Z}$. Mit der gewöhnlichen Multiplikation von $\mathbb{Z}$ wird dies zu einer Gruppe. Stellen Sie die Verknüpfungstafel von $G$ auf.

(b) Sei $(G, \star)$ eine Gruppe und $h \in G$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi_h : G \to G, \quad g \mapsto h \star g$$

bijektiv ist. Was bedeutet dies für die Verknüpfungstafel einer Gruppe?

(c) Welche der folgenden Mengen sind Gruppen:

- $\mathbb{Z}$ mit der Multiplikation als Verknüpfung.
- $M = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0) = 0\}$ mit der Verknüpfung

$$(f \boxplus g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (f \boxplus g)(x) := f(x) + g(x).$$

**Übung 5** Geben Sie alle möglichen Arten von Verknüpfungstafeln für Gruppen mit vier Elementen an.

**Übung 6** (Russels Antinomie) Wieso definiert der Ausdruck

$$M = \{x \mid x \notin x\}$$

keine Menge?

Dieses Blatt wird nur in den Tutorien besprochen und ist nicht abzugeben.