Modulteilprüfung Lineare Algebra (BaM-GS, L3M-RF)

Wintersemester 2014-15

Universität Frankfurt
FB 12, Institut für Mathematik
Prof. M. Möller

16.02.2015

Dauer: 90 Minuten

Hilfsmittel: Stifte und ein zweiseitig **handbeschriebenes** DinA4-Blatt

Bestehen: Zum Bestehen der Klausur sind 50 Punkte hinreichend.

Bearbeitung: Verwenden Sie für jede Aufgabe ein gesondertes Blatt und beschriften Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
Beantworten Sie die Fragen in dem dafür vorgesehen Bereich auf den Aufgabenblättern. Wenn der Platz nicht ausreicht, schreiben Sie auf der Rückseite weiter.
Wenn Sie zusätzliche Blätter verwenden, müssen diese ebenfalls mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer versehen werden. Bitte geben Sie die Anzahl der zusätzlich verwendeten Blätter unten an.
Wenn nicht anders angegeben, sind alle Antworten zu begründen!

Name	Matrikelnr.	1	2	3	4	5	6	Bonus	$\sum$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1

[16 Punkte]

Zu $x \in \mathbb{R}^*$ definieren wir

$$A_x = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} & -\frac{x}{2} \\ -\frac{x}{2} & \frac{x}{2} \end{pmatrix}$$

und weiter sei $G = \{A_x \mid x \in \mathbb{R}^*\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$.

a) Zeigen Sie: Mit der Multiplikation von Matrizen wird G zu einer Gruppe.

b) Zeigen Sie, dass G isomorph zur Einheitengruppe $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ ist.

Aufgabe 2

[16 Punkte]

Sei $K = \mathbb{F}_2$ der endliche Körper mit 2 Elementen.

a) Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + z &= 1 \end{aligned}$$

mit $x, y, z \in K$.

b) Wie viele Lösungen hat die Gleichung $x + y + z + u + v + w = 1$ in K.

c) Seien $a_1, \ldots, a_n, b \in K$ mit $n \geq 1$. Geben Sie die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b$$

in K in Abhängigkeit von den Parametern $a_1, \ldots, a_n, b$ an.

Aufgabe 3

[16 Punkte]

Es sei $d \in \mathbb{N}_0$ und $V_d = \{F \in \mathbb{Q}[X] \mid \deg(F) \leq d\}$ der $\mathbb{Q}$-Vektorraum der Polynome von Grad $\leq d$. Weiter seien die linearen Abbildungen

$$\Phi : V_2 \to V_4, \qquad F \mapsto F \cdot (X^2 - 1)$$

und

$$\Psi : V_4 \to \mathbb{Q}^2, \qquad F \mapsto (F(1), F(-1))$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrizen von Φ und Ψ bezüglich der Basen $B_2 = \{1, X, X^2\}$ von V_2, $B_4 = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$ von V_4 und der Standardbasis von $\mathbb{Q}^2$.

b) Zeigen Sie, dass Ψ surjektiv ist und dass Φ injektiv ist.

c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Bild}(\Phi) = \mathrm{Ker}(\Psi)$ gilt.

Aufgabe 4

[16 Punkte]

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{R}$. Weiter sei

$$A = \begin{pmatrix} 1-b & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-b & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1-b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Bestimmen Sie $\det(A)$ in Abhängigkeit von b.

Aufgabe 5 [16 Punkte]

Sei

$$A_t = \begin{pmatrix} t+1 & -t-1 & 0 \\ -t-1 & t+1 & 0 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Matrix A_t diagonalisierbar?

b) Bestimmen Sie für jedes solche t eine Diagonalmatrix D und $T \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ mit $D = T^{-1}AT$.

Aufgabe 6

[20 Punkte]

Entscheiden Sie (ohne Begründung), ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Für jede richtige Antwort gibt es +2 Punkte, für jede falsche Antwort −1 Punkt. Dabei kann man für diese Aufgabe keine negative Gesamtpunktzahl erhalten.

	wahr	falsch
Die Abbildung $\det : \mathbb{Q}^{n\times n} \to \mathbb{Q}$, $A \mapsto \det(A)$ ist linear		
Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Wenn für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \pi$, dann ist π ein Eigenwert von A.		
Sei G eine Gruppe, in der für alle $g, h \in G$ gilt: $(gh)^2 = g^2h^2$. Dann ist G abelsch.		
Zwei 2-dimensionale Untervektorräume in einem 4-dimensionalen Vektorraum schneiden sich immer in einem eindimensionalen Untervektorraum.		
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig. Dann gilt: A und A^T haben das gleiche charakteristische Polynom.		
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Gilt $A = A^T$, so ist das LGS $Ax = b$ für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ stets eindeutig lösbar.		
Auf $\mathbb{C}$ sei die Relation $x \sim y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : x^n = y^n$ definiert. Dann gilt: $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.		
Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ linear abhängig. Dann gilt für jedes $w \in \mathbb{R}^3$, dass $v_1 + w, v_2 + w, v_3 + w$ linear abhängig ist.		
Es gibt keine Matrix in $\mathbb{C}^{3\times 3}$ mit Minimalpolynom $X - 1$.		
Die Menge $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin(x_1) = \cos(x_2)\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.		