Übungen zur Linearen Algebra

Übungsblatt 9

Dozent: Prof. M. Möller
Übungen: Dr. R. Butenuth

11.12.2014

Übung 1 (4 Punkte)

(a) Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & 4 & a \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & a & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

und

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = b$.

(b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{4\times 4}$$

und

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^4.$$

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{F}_2$ die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = b$.

Übung 2 (2 Punkte) Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass falls $\mathrm{char}(K) \neq 0$ gilt, so ist $\mathrm{char}(K)$ eine Primzahl.

Übung 3 (2 Punkte) Sei f die alternierende Trilinearform von $V = \mathbb{R}^3$ mit:

$$f\left((1,0,0),(0,1,2),(1,2,3)\right) = 4$$

Berechnen Sie $f\left((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\right)$.

— bitte wenden —

Übungen zur Linearen Algebra

Übungsblatt 9

Dozent: Prof. M. Möller 11.12.2014

Übungen: Dr. R. Butenuth

Übung 4 (4 Punkte) Sei V ein Vektorraum. Ein affiner Unterraum von V ist eine Teilmenge der Form $v + U$ mit $v \in V$ und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum.

(a) Sei

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$U = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

Bestimmen Sie ein lineares Gleichungssystem, das den affinen Unterraum $v + U$ als Lösungsmenge besitzt.

(b) (Bonusaufgabe, 4 Zusatzpunkte) Sei $V = K^n$. Zeigen Sie, dass jeder affine Unterraum von V die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems ist.

Übung 5 (4 Punkte) Sei K ein Körper, V ein $K-$Vektorraum und B (bzw. A, S) die Menge der Bilinearformen (bzw. alternierenden, symmetrischen Bilinearformen) auf V.

(a) Zeigen Sie, dass B ein Untervektorraum des Vektorraums der Abbildungen von $V \times V$ nach K ist. Zeigen Sie, dass A und S Untervektorräume von B sind.

(b) Zeigen Sie, dass $B = A \oplus S$, falls K kein Körper von Charakteristik zwei ist.

(c) Zeigen Sie, dass $A \subset S$, falls die Charakteristik von K zwei ist.

Dieses Blatt kann bis spätestens **10:00 Uhr** am **Donnerstag, den 18.12**, im Postfach des Tutors im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihre Namen und Ihre Matrikelnummern mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Tacker, zusammen zu halten.