Übungen zur Linearen Algebra

Übungsblatt 8

Dozent: Prof. M. Möller 04.12.2014

Übungen: Dr. R. Butenuth

Übung 1 (4 Punkte) Es sei $B_1 := \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ und es sei $B_2 := \{(1,0,0),(2,1,0),(-1,3,2)\}$ eine weitere Basis des $\mathbb{R}^3$. Weiter sei die lineare Abbildung f gegeben durch

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ , \ (x,y,z) \mapsto (-7x+3y-z, 2x+y, 5x-3y+2z).$$

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrizen $A_{B_1B_1}$, $A_{B_2B_1}$, $A_{B_1B_2}$ und $A_{B_2B_2}$ von f bezüglich dieser Basen sowie den Rang von f.

Übung 2 (4 Punkte) Überprüfen Sie die folgenden Behauptungen für Matrizen über einem Körper K.

(a) A sei die Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

mit $a_i \in K$. Dann gilt $\operatorname{Rang}(A) = n - |\{i \mid a_i = 0\}|$.

(b) Eine obere Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

hat genau dann den Rang n, wenn $a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} \neq 0$ gilt.

(c) B sei eine Matrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$$

mit $a_i, b_j \in K$, wobei wenigstens eine der Zahlen a_i und wenigstens eine der Zahlen b_j von Null verschieden sind. Dann hat die Matrix B den Rang 1.

(d) Permutationsmatrizen (vergl. Blatt 4, Aufgabe 2) aus $K^{n \times n}$ haben den Rang n.

Übungen zur Linearen Algebra

Übungsblatt 8

Dozent: Prof. M. Möller 04.12.2014

Übungen: Dr. R. Butenuth

Übung 3 (4 Punkte) Bestimmen Sie den Rang der folgende Matrix $A(s,t) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ in Abhängigkeit von $r, s \in \mathbb{R}$:

$$A(s,t) = \begin{pmatrix} s & (2s+2t) & (s-t) \\ s & (3s-t) & (2s-3t) \\ 2s & (5s+t) & (4s-3t) \end{pmatrix}$$

Übung 4 (4 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie: Bei der folgenden auf der Menge M definierten Relation $\sim$ handelt es sich um eine Äquivalenzrelation:

(a) $M = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing\}$, $x \sim y :\Leftrightarrow x \cap y \neq \varnothing$.

(b) M sei eine Gruppe, $U \leq M$ eine Untergruppe, $x \sim y :\Leftrightarrow xy^{-1} \in U$

(c) M die Menge der Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}$, $f \sim g :\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N} \;:\; \forall n \in \mathbb{N}_{>m} : f(m) = g(n)$

Dieses Blatt kann bis spätestens **10:00 Uhr** am **Donnerstag, den 11.12**, im Postfach des Tutors im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihre Namen und Ihre Matrikelnummern mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Tacker, zusammen zu halten.