Übungen zur Linearen Algebra

# Übungsblatt 7

Dozent: Prof. M. Möller 27.11.2014

Übungen: Dr. R. Butenuth

---

**Übung 1** (4 Punkte) Gegeben sei die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (-7x + 4y - 2z, y, 28x - 14y + 8z) \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass $f$ linear ist.

(b) Bestimmen Sie eine Basis $B_1$ von $\mathrm{Kern}(f)$.

(c) Bestimmen Sie eine Basis $B_2$ von $\mathrm{Bild}(f)$.

(d) Verifizieren Sie an diesem Beispiel die Gültigkeit des Dimensionssatzes für lineare Abbildungen.

**Übung 2** (4 Punkte)

(a) Sei $V$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $f \circ f = f$. Zeigen Sie, dass es Untervektorräume $U, W$ von $V$ gibt mit den folgenden Eigenschaften:

- $V = U \oplus W$
- $f(U) \subseteq U$
- $f(W) \subseteq W$
- Die Einschränkung $f|_U : U \to U$ von $f$ auf $U$ ist die Identität.
- Die Einschränkung $f|_W : W \to W$ von $f$ auf $W$ ist die Nullabbildung.

Hinweis: Wählen Sie für $U$ und $W$ geeignete Unterräume, die Sie aus der Vorlesung kennen und verifizieren Sie die angegebenen Eigenschaften.

(b) Sei

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $f$ die Bedingung $f \circ f = f$ erfüllt und bestimmen Sie die Unterräume $U$ und $V$ aus Teil (a). Geben Sie eine geometrische Interpretation von $U$ und $V$ und der Abbildung $f$ an.

Übungen zur Linearen Algebra

# Übungsblatt 7

Dozent: Prof. M. Möller 27.11.2014

Übungen: Dr. R. Butenuth

---

**Übung 3** (4 Punkte) Seien $V, W$ zwei $K$-Vektorräume, und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung.
Sei weiterhin $B := \{v_i \mid i \in I\}$ eine Basis von $V$ und $C := \{w_i \mid i \in I\}$ mit $w_i := f(v_i)$ für alle $i \in I$. Zeigen Sie:

(a) $f$ ist genau dann surjektiv, wenn $C$ ein Erzeugendensystem von W ist.

(b) $f$ ist genau dann injektiv, wenn $C$ linear unabhängig ist.

**Übung 4** (4 Punkte) Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$H_n := (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

wobei $\frac{d^n}{dx^n}$ die $n$-te Ableitung nach $x$ bezeichnet.

(a) Berechnen Sie $H_0, H_1, H_2, H_3$ und zeigen Sie, dass $H = \{H_0, H_1, H_2, H_3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ der Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ von Grad $\leq 3$ ist.

(b) Geben Sie die Basiswechselmatrizen $\Theta_{HE}$ und $\Theta_{EH}$ an, wobei $E$ die Basis $\{1, x, x^2, x^3\}$ ist.

(c) Verifizieren Sie an diesem Beispiel den aus der Vorlesung bekannten Fakt

$$\Theta_{HE}\Theta_{EH} = I_4.$$

(d) Sei $f : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ gegeben durch $f(p) := \frac{d^2}{dx^2}p - 2x \cdot \frac{d}{dx}p + 6p$.
Zeigen Sie, dass $f$ eine lineare Abbildung ist, stellen Sie die Darstellungmatrix von $f$ bezüglich der Basen $H$ (im Definitionsbereich) und $E$ (im Wertebereich) auf. Berechnen Sie den Kern von $f$.

Dieses Blatt kann bis spätestens **10:00 Uhr** am **Donnerstag, den 04.12**, im Postfach des Tutors im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihre Namen und Ihre Matrikelnummern mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Tacker, zusammen zu halten.