

Übungen zur Linearen Algebra
Übungsblatt 6

Dozent: Prof. M. Möller
Übungen: Dr. R. Butenuth

20.11.2014

Übung 1 (4 Punkte) Sei V ein K -Vektorraum und $\{v_1, \dots, v_n\}$ in V linear unabhängig.

- (a) Zeigen Sie, dass die Menge $\{v_1, v_1 + v_2, \dots, v_1 + \dots + v_n\}$ auch linear unabhängig ist.
- (b) Für welche n (und für welche K) ist die Menge $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, \dots, v_n + v_1\}$ linear unabhängig?

Übung 2 (4 Punkte)

- (a) Sei $M_1 = \{v_1 := (1, 0, 1, 1), v_2 := (0, 2, -3, 1), v_3 := (2, 2, -1, 3)\} \subset \mathbb{R}^4$ und $M_2 = \{w_1 := (0, 1, -1, 1), w_2 := (3, -1, 5, 1)\} \subset \mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie eine Basis B_1 von $[M_1]$ sodass $B_1 \subset M_1$. Bestimmen Sie eine Basis \tilde{B} von $[M_1 + M_2]$. Ergänzen Sie \tilde{B} zu einer Basis von \mathbb{R}^4 .
- (b) Sei $N = \{v_1 := (1, 0, 1), v_2 := (1, 1, 0), v_3 := (0, 1, 1), v_4 := (1, 1, 1)\} \subset \mathbb{F}_2^3$. Zeigen Sie, dass N ein Erzeugendensystem von \mathbb{F}_2^3 ist, und geben Sie alle Basen $B \subset N$ von \mathbb{F}_2^3 an.

Übung 3 (4 Punkte) Sei V ein Vektorraum und sei $B \subset V$. Zeigen Sie:

- (a) B ist genau dann eine Basis von V , wenn B ein Erzeugendensystem von V ist und jede echte Teilmenge $C \subsetneq B$ kein Erzeugendensystem von V ist.
- (b) B ist genau dann eine Basis von V , wenn B eine linear unabhängige Teilmenge von V ist und jede echte Obermenge $C \supsetneq B$ keine linear unabhängige Teilmenge von V ist.

Übung 4 (4 Punkte) Sei V der Vektorraum der $n \times n$ -Matrizen über \mathbb{R} . Für $A = (a_{i,j}) \in V$ bezeichne A^T die Matrix, die man erhält, wenn man A an der Diagonalen spiegelt, also $A^T = (a_{j,i})$. Sei $U := \{A \in V \mid A^T = A\}$ und $W := \{A \in V \mid A^T = -A\}$.

- (a) Zeigen Sie, dass U und W Untervektorräume von V sind.
- (b) Geben Sie eine Basis von U und von W an.
- (c) Bestimmen Sie $\dim(U)$ und $\dim(W)$.
- (d) Gilt $V = U \oplus W$?

Dieses Blatt kann bis spätestens **10:00 Uhr am Donnerstag, den 27.11.**, im Postfach des Tutors im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihre Namen und Ihre Matrikelnummern mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Tacker, zusammen zu halten.