Übungen zur Linearen Algebra

Übungsblatt 5

Dozent: Prof. M. Möller 13.11.2014

Übungen: Dr. R. Butenuth

Übung 1 (4 Punkte) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 9 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{4\times 4}.$$

Weiterhin sei $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{F}_2$ gegeben durch

$$\varphi(n) \mapsto \begin{cases} 0, & \text{wenn } n \text{ gerade,} \\ 1, & \text{wenn } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

.

(a) Bringen Sie $A \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ in Zeilenstufenform und bestimmen Sie die Lösungmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = 0$.

(b) Sei $\varphi(A)$ die Matrix, die man erhält, wenn man φ auf die Einträge von A anwendet. Bringen Sie $\varphi(A)$ in Zeilenstufenform und bestimmen Sie die Lösungmenge des linearen Gleichungssystems $\varphi(A)x = 0$.

Übung 2 (4 Punkte) Sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid \forall i \in \mathbb{N} : a_i \in \mathbb{R}\}$ der Vektorraum aller reellen Folgen, wobei für alle $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}, (b_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \lambda \in \mathbb{R}$ die Verknüpfungen definiert sind durch:

$$(a_i)_{i\in\mathbb{N}} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}} := (a_i + b_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ und } \lambda \cdot (a_i)_{i\in\mathbb{N}} := (\lambda a_i)_{i\in\mathbb{N}}$$

(a) Zeigen Sie, dass $F := \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall i \in \mathbb{N} : \left(\begin{smallmatrix} a_{i+1} \\ a_{i+2} \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a_i \\ a_{i+1} \end{smallmatrix}\right)\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist.

(b) Finden Sie zwei Elemente $v_1, v_2 \in F$ mit $F = [v_1, v_2]$.

Übung 3 (4 Punkte) Sei K ein Körper, $K[X]$ der K-Vektorraum der Polynome über K und $\alpha \in K$.

(a) Zeigen Sie, dass $U_\alpha := \{P \in K[X] \mid P(\alpha) = 0\}$ und $C := \{P \in K[X] \mid \deg(P) \leq 0\}$ Untervektorräume von $K[X]$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass $K[X] = U_\alpha \oplus C$ ist.

— bitte wenden —

Übungen zur Linearen Algebra

Übungsblatt 5

Dozent: Prof. M. Möller 13.11.2014

Übungen: Dr. R. Butenuth

Übung 4 (4 Punkte) Sei K ein Körper. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Für jeden K-Vektorraum V und alle Untervektorräume $U_1, U_2, U_3 \subseteq V$ gilt

$$(U_1 \cap U_2) + U_3 \subseteq (U_1 + U_3) \cap (U_2 + U_3).$$

(b) Für jeden K-Vektorraum V und alle Untervektorräume $U_1, U_2, U_3 \subseteq V$ gilt

$$(U_1 \cap U_2) + U_3 \supseteq (U_1 + U_3) \cap (U_2 + U_3).$$

(c) Für jeden K-Vektorraum V und alle Untervektorräume $U_1, U_2, U_3 \subseteq V$ gilt

$$(U_1 + U_2) \cap U_3 \subseteq (U_1 \cap U_3) + (U_2 \cap U_3).$$

(d) Für jeden K-Vektorraum V und alle Untervektorräume $U_1, U_2, U_3 \subseteq V$ gilt

$$(U_1 + U_2) \cap U_3 \supseteq (U_1 \cap U_3) + (U_2 \cap U_3).$$

Dieses Blatt kann bis spätestens **10:00 Uhr** am **Donnerstag, den 20.11**, im Postfach des Tutors im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihre Namen und Ihre Matrikelnummern mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Tacker, zusammen zu halten.