

Übungen zur Linearen Algebra
Übungsblatt 3

Dozent: Prof. M. Möller
Übungen: Dr. R. Butenuth

30.10.2014

Übung 1 (4 Punkte) Für einen Ring R sei $R[X]^* := \{P \in R[X] \mid \exists Q \in R[X] : QP = 1\}$ die Menge der in $R[X]$ invertierbaren Polynome.

- (a) Bestimmen Sie $K[X]^*$ für jeden beliebigen Körper K .
- (b) Bestimmen Sie $\mathbb{Z}[X]^*$.

Übung 2 (4 Punkte)

- (a) Seien $a = i - 1$ und $b = 3i - 3 \in \mathbb{C}$ gegeben. Geben Sie $a + b, a - b, a \cdot b$ und $\frac{a}{b}$ in der Form $x + iy$ an.
- (b) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (i + 1)x + (8i - 4) = 0.$$

- (c) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit $x^3 = -32i$.

Übung 3 (4 Punkte) Wir betrachten die Menge $K = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ aller reellen Zahlen der Form $a + b\sqrt{2}$ mit rationalen Zahlen $a, b \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie:

- (a) Die natürliche Addition reeller Zahlen schränkt sich auf K ein und K ist mit dieser Operation eine Gruppe.
- (b) Die natürliche Multiplikation reeller Zahlen schränkt sich auf $K \setminus \{0\}$ ein und $K \setminus \{0\}$ ist mit dieser Operation einer Gruppe.
- (c) $(K, +, \cdot)$ ist ein Körper.

Übung 4 (4 Punkte) Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie

$$Z := \{A \in K^{n \times n} \mid \forall B \in K^{n \times n} : AB = BA\}.$$

Dieses Blatt kann bis spätestens **10:00 Uhr am Donnerstag, den 06.11**, im Postfach des Tutors im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihre Namen und Ihre Matrikelnummern mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Tacker, zusammen zu halten.