

Übungen zur Linearen Algebra  
Übungsblatt 3

Dozent: Prof. M. Möller  
Übungen: Dr. R. Butenuth

30.10.2014

---

**Übung 1** (4 Punkte) Für einen Ring  $R$  sei  $R[X]^* := \{P \in R[X] \mid \exists Q \in R[X] : QP = 1\}$  die Menge der in  $R[X]$  invertierbaren Polynome.

- (a) Bestimmen Sie  $K[X]^*$  für jeden beliebigen Körper  $K$ .
- (b) Bestimmen Sie  $\mathbb{Z}[X]^*$ .

**Übung 2** (4 Punkte)

- (a) Seien  $a = i - 1$  und  $b = 3i - 3 \in \mathbb{C}$  gegeben. Geben Sie  $a + b, a - b, a \cdot b$  und  $\frac{a}{b}$  in der Form  $x + iy$  an.
- (b) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen  $x$  mit der Eigenschaft

$$x^2 - (i + 1)x + (8i - 4) = 0.$$

- (c) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen  $x$  mit  $x^3 = -32i$ .

**Übung 3** (4 Punkte) Wir betrachten die Menge  $K = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$  aller reellen Zahlen der Form  $a + b\sqrt{2}$  mit rationalen Zahlen  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Zeigen Sie:

- (a) Die natürliche Addition reeller Zahlen schränkt sich auf  $K$  ein und  $K$  ist mit dieser Operation eine Gruppe.
- (b) Die natürliche Multiplikation reeller Zahlen schränkt sich auf  $K \setminus \{0\}$  ein und  $K \setminus \{0\}$  ist mit dieser Operation einer Gruppe.
- (c)  $(K, +, \cdot)$  ist ein Körper.

**Übung 4** (4 Punkte) Sei  $K$  ein Körper,  $n \in \mathbb{N}$ . Bestimmen Sie

$$Z := \{A \in K^{n \times n} \mid \forall B \in K^{n \times n} : AB = BA\}.$$

Dieses Blatt kann bis spätestens **10:00 Uhr am Donnerstag, den 06.11**, im Postfach des Tutors im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihre Namen und Ihre Matrikelnummern mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Tacker, zusammen zu halten.