Übungen zur Linearen Algebra

Übungsblatt 2

Dozent: Prof. M. Möller 23.10.2014

Übungen: Dr. R. Butenuth

Übung 1 (4 Punkte) Seien $(G, \star)$ und $(H, *)$ Gruppen und $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie:

(a) φ ist genau dann injektiv, wenn $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{e_G\}$ gilt.

(b) Das Bild von φ ist eine Untergruppe von H.

(c) Sei $h \in G$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi_h : G \to G,\ g \mapsto h \star g \star h^{-1}$$

ein Isomorphismus ist. Was ist sein Inverses?

Übung 2 (4 Punkte) Im Folgenden seien $+$ und $\times$ die übliche Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ bezüglich $+$ eine Gruppe bilden:

(i) $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

(ii) $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\mathbb{Z} = \{a + \frac{1}{2}b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

(b) Sind sie Ringe bezüglich $+$ und $\times$?

Übung 3 (4 Punkte) Ein k-Zykel in der symmetrischen Gruppe S_n ist eine Permutation der Form $(i_1, \ldots, i_k)$ für $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ paarweise verschieden.

(a) Zeigen Sie, dass eine Untergruppe von S_4 mit genau vier Elementen keinen 3-Zykel enthält.

(b) Bestimmen Sie alle Untergruppen mit genau vier Elementen von S_4.

Übung 4 (4 Punkte) Sei R ein Ring, so dass $x^2 = x$ für jedes $x \in R$ gilt. Zeigen Sie, dass R kommutativ ist.

Dieses Blatt kann bis spätestens **10:00 Uhr** am **Donnerstag, den 30.10**, im Postfach des Tutors im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihre Namen und Ihre Matrikelnummern mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Schnellhefter, zusammen zu halten.