

Übungen zur Linearen Algebra  
Übungsblatt 12

Dozent: Prof. M. Möller  
Übungen: Dr. R. Butenuth

22.01.2015

---

**Übung 1** (4 Punkte) Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Das ist die Matrix aus Aufgabe 1, Blatt 11, mit  $\zeta = 1$ .

Sei  $P := X^7 - 3X^6 + 6X^4$ . Berechnen Sie  $P(A)$  mit Hilfe der Ergebnisse von Blatt 11.

**Übung 2** (4 Punkte)

- (a) Seien  $f, g$  zwei Endomorphismen eines Vektorraums  $V$ . Zeigen Sie: Wenn eine Basis von  $V$  existiert, sodass die Abbildungsmatrizen  $A_f$  und  $A_g$  bezüglich dieser Basis diagonal sind, dann gilt  $f \circ g = g \circ f$ .
- (b) Seien  $f$  und  $g \in \text{End}(V)$  diagonalisierbar. Gilt immer  $f \circ g = g \circ f$ ?
- (c) Seien  $A, B \in K^{n \times n}$ , sodass  $AB = BA$ . Zeigen Sie, dass für  $x \in E_\lambda(A)$  auch  $Bx \in E_\lambda(A)$  ist.
- (d) Seien  $A, B \in K^{n \times n}$  diagonalisierbar mit  $AB = BA$ . Folgern Sie aus c), dass es eine Basis  $V$  von  $K^n$  gibt, sodass  $A$  und  $B$  bezüglich dieser Basis Diagonalmatrizen sind.

**Übung 3** (4 Punkte) Seien  $a_i \in \mathbb{R}$  und

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ 0 & a_2 & 1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

- (a) Für welche  $a_i$  ist diese Matrix diagonalisierbar?
- (b) Berechnen Sie in diesem Fall eine Diagonalmatrix  $D \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  und eine invertierbare Matrix  $Q \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ , sodass  $Q^{-1}AQ = D$  gilt.

**Übung 4** (4 Punkte) Sei  $V$  der Untervektorraum aller differenzierbaren Abbildungen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  der von  $1, \sin(x)$  und  $\cos(x)$  erzeugt wird.

- (a) Zeigen Sie:  $\dim V = 3$ .
- (b) Sei  $\varphi : V \rightarrow V$  der lineare Endomorphismus  $f \mapsto \frac{d}{dx}(f)$ . Zeigen Sie, dass  $\varphi$  sich zu einem Endomorphismus  $\varphi|_V$  von  $V$  nach  $V$  einschränkt.
- (c) Ist  $\varphi|_V$  diagonalisierbar?

Dieses Blatt kann bis spätestens **10:00 Uhr am Donnerstag, den 29.01.2015**, im Postfach des Tutors im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihre Namen und Ihre Matrikelnummern mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Tacker, zusammen zu halten.