

Übungen zur Linearen Algebra
Übungsblatt 12

Dozent: Prof. M. Möller
Übungen: Dr. R. Butenuth

22.01.2015

Übung 1 (4 Punkte) Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Das ist die Matrix aus Aufgabe 1, Blatt 11, mit $\zeta = 1$.

Sei $P := X^7 - 3X^6 + 6X^4$. Berechnen Sie $P(A)$ mit Hilfe der Ergebnisse von Blatt 11.

Übung 2 (4 Punkte)

- Seien f, g zwei Endomorphismen eines Vektorraums V . Zeigen Sie: Wenn eine Basis von V existiert, sodass die Abbildungsmatrizen A_f und A_g bezüglich dieser Basis diagonal sind, dann gilt $f \circ g = g \circ f$.
- Seien f und $g \in \text{End}(V)$ diagonalisierbar. Gilt immer $f \circ g = g \circ f$?
- Seien $A, B \in K^{n \times n}$, sodass $AB = BA$. Zeigen Sie, dass für $x \in E_\lambda(A)$ auch $Bx \in E_\lambda(A)$ ist.
- Seien $A, B \in K^{n \times n}$ diagonalisierbar mit $AB = BA$. Folgern Sie aus c), dass es eine Basis V von K^n gibt, sodass A und B bezüglich dieser Basis Diagonalmatrizen sind.

Übung 3 (4 Punkte) Seien $a_i \in \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ 0 & a_2 & 1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

- Für welche a_i ist diese Matrix diagonalisierbar?
- Berechnen Sie in diesem Fall eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und eine invertierbare Matrix $Q \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$, sodass $Q^{-1}AQ = D$ gilt.

Übung 4 (4 Punkte) Sei V der Untervektorraum aller differenzierbaren Abbildungen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} der von $1, \sin(x)$ und $\cos(x)$ erzeugt wird.

- Zeigen Sie: $\dim V = 3$.
- Sei $\varphi : V \rightarrow V$ der lineare Endomorphismus $f \mapsto \frac{d}{dx}(f)$. Zeigen Sie, dass φ sich zu einem Endomorphismus $\varphi|_V$ von V nach V einschränkt.
- Ist $\varphi|_V$ diagonalisierbar?

Dieses Blatt kann bis spätestens **10:00 Uhr am Donnerstag, den 29.01.2015**, im Postfach des Tutors im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihre Namen und Ihre Matrikelnummern mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Tacker, zusammen zu halten.