

Übungen zur Linearen Algebra  
Übungsblatt 1

Dozent: Prof. M. Möller  
Übungen: Dr. R. Butenuth

---

16.10.2014

**Übung 1** (4 Punkte) Für zwei Mengen  $A, B$  heiße  $A\Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$  die symmetrische Differenz von  $A$  und  $B$ . Zeigen Sie (durch Zurückführen auf die Definitionen von  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  und  $A \setminus B$ ), dass für beliebige Mengen  $A, B$  gilt:

- (a)  $\emptyset\Delta A = A$
- (b)  $A\Delta A = \emptyset$
- (c)  $A\Delta B = B\Delta A$
- (d)  $A\Delta(A\Delta B) = B$  (d.h.  $A\Delta B$  löst die Gleichung  $A\Delta X = B$ )

**Übung 2** (4 Punkte)

- (a) Sei  $M$  eine endliche Menge. Bestimmen sie  $|\mathcal{P}(M)|$ .
- (b) Sei  $M$  eine beliebige Menge. Zeigen sie, dass es keine surjektive Abbildung  $\varphi : M \rightarrow \mathcal{P}(M)$  gibt.

**Übung 3** (4 Punkte)

- (a) Seien  $Y, Z$  Mengen. Zeigen sie, dass eine Abbildung  $g : Y \rightarrow Z$  genau dann injektiv ist, wenn gilt: Für alle Mengen  $X$  und Abbildungen  $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$  gilt:  $g \circ f_1 = g \circ f_2$  impliziert  $f_1 = f_2$ .
- (b) Seien  $X, Y$  Mengen. Zeigen sie, dass eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  genau dann surjektiv ist, wenn gilt: Für alle Mengen  $Z$  und Abbildungen  $g_1, g_2 : Y \rightarrow Z$  gilt:  $g_1 \circ f = g_2 \circ f$  impliziert  $g_1 = g_2$ .

**Übung 4** (4 Punkte) Sei  $M$  das Quadrat in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  mit Eckpunkten  $(1, 1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(-1, -1)$  und  $(1, -1)$ . Sei  $D_4$  die Menge der Rotationen und Achsenspiegelungen der Ebene  $\mathbb{R}^2$ , die  $M$  in sich selber überführt

- (a) Begründen Sie anhand einer Skizze, dass  $D_4$  aus genau vier Rotationen und vier Achsenspiegelungen besteht. Geben Sie diese explizit an.
- (b) Zeigen Sie, dass  $D_4$  mit der Hintereinanderausführung von Abbildungen als Verknüpfung eine Gruppe ist. Bestimmen Sie dazu zunächst die Verknüpfungstafel.

Dieses Blatt kann bis spätestens **10:00 Uhr am Donnerstag, den 23.10**, im Postfach des Tutors im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihre Namen und Ihre Matrikelnummern mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Schnellhefter, zusammen zu halten.