Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2021/2022
29. November 2021

Lineare Algebra 1
Prof. Dr. Martin Möller
Johannes Schwab

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 6}$$

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{Q}^6$ des homogenen LGS $Ax = 0$.

(b) Geben Sie eine Basis B von $\mathbb{L}$ an.

(c) Ergänzen Sie B zu einer Basis des $\mathbb{Q}^6$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass jede Basis des $\mathbb{Q}^6$ genau 6 Elemente hat.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei V ein K-Vektorraum und $B \subset V$. Zeigen Sie:

(a) B ist genau dann eine Basis von V, wenn B ein Erzeugendensystem von V ist und jede echte Teilmenge $C \subsetneqq B$ kein Erzeugendensystem von V ist.

(b) B ist genau dann eine Basis von V, wenn B eine linear unabhängige Teilmenge von V ist und jede echte Obermenge $C \supsetneqq B$ keine linear unabgängige Teilmenge von V ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei M eine Menge und K ein Körper. Für $x \in M$ sei

$$\delta_x \colon M \to K, \quad y \mapsto \delta_x(y) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x = y, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\Delta := \{\delta_x \mid x \in M\} \subset \mathrm{Abb}(M, K)$ eine linear unabhängige Teilmenge ist.

(b) Folgern Sie, dass $\mathrm{Abb}(M, K)$

(i) eine Basis mit $|M|$ Elementen hat, falls $|M| < \infty$,

(ii) eine unendliche Basis hat, falls $|M| = \infty$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei K ein Körper. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $K[X]_n := \{P \in K[X] \mid \deg(P) \leq n\} \subset K[X]$ der Untervektorraum der Polynome vom Grad höchstens n.

(a) Zeigen Sie, dass $B := \{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$ eine Basis von $K[X]_n$ ist.

(b) Sei $U_1 := [X^2 + X + 1, X + 1]$ und $U_2 := [X]$. Zeigen Sie, dass die Summe $U_1 \oplus U_2$ direkt ist und dass $U_1 \oplus U_2 = K[X]_2$.

(c) Sei $P := aX^2 + bX + c \in K[X]_2$. Finden Sie $Q_1 \in U_1$ und $Q_2 \in U_2$, so dass $P = Q_1 + Q_2$. Sind Q_1 und Q_2 eindeutig?

Abgabe bis **10:15** am **Montag, den 6. Dezember** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.