Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2021/2022
22. November 2021

Lineare Algebra 1
Prof. Dr. Martin Möller
Johannes Schwab

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei M eine Menge und K ein Körper.

(a) Für $f, g\colon M \to K$ definieren wir $f + g\colon M \to K$ durch $\big(f + g\big)(x) = f(x) + g(x)$ und für $k \in K$ definieren wir $k \cdot f\colon M \to K$ durch $\big(k \cdot f\big)(x) = k \cdot f(x)$.

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Abb}(M, K) \coloneqq \{f\colon M \to K \text{ Abbildung}\}$ dadurch eine K-Vektorraumstruktur erhält.

(b) Für $f \in \mathrm{Abb}(K, K)$ definieren wir nun die Skalarmultiplikation $k * f\colon K \to K$ durch $\big(k * f\big)(x) \coloneqq f(kx)$.

Zeigen Sie, dass für jeden Körper K die Menge $\mathrm{Abb}(K, K)$ mit Skalarmultiplikation $*$ *kein* Vektorraum wird.

Hinweis: In den folgenden Aufgaben sei $\mathrm{Abb}(M, K)$ *stets mit der Skalarmultiplikation aus Teil (a) versehen.*

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Überprüfen Sie, ob es sich bei folgenden Teilmengen um Untervektorräume handelt:

(a) $A \coloneqq \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(2) = 0\} \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;

(b) $B \coloneqq \{f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \mid f(2) \neq 0\} \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$;

(c) $C \coloneqq \mathrm{Abb}(M, \mathbb{R}) \subseteq \mathrm{Abb}(M, \mathbb{C})$ (als $\mathbb{C}$-Vektorraum);

(d) $D \coloneqq \mathrm{Abb}(M, \mathbb{R}) \subseteq \mathrm{Abb}(M, \mathbb{C})$ (als $\mathbb{R}$-Vektorraum);

(e) $E \coloneqq \{a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid |a(\mathbb{N})| < \infty\} \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Sei M eine Menge und K ein Körper. Für $x \in M$ sei

$$\delta_x\colon M \to K, \quad y \mapsto \delta_x(y) \coloneqq \begin{cases} 1, & \text{falls } x = y, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\big[\{\delta_x \mid x \in M\}\big] = \mathrm{Abb}(M, K)$ genau dann, wenn $|M| < \infty$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Sei $V := \mathbb{R}_{>0}$. Für $x, y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ definieren wir die “Addition” $x \boxplus y = xy$ und die Skalarmultiplikation $\lambda \boxdot x = x^\lambda$. Zeigen Sie, dass V mit diesen Verknüpfungen eine $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur erhält.

(b) Wir erinnern an den Körper $\mathbb{Q}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Für $a + bi \in \mathbb{Q}[i]$ und $\lambda \in \mathbb{Q}$ definieren wir die Skalarmultiplikation $\lambda * (a + bi) = \lambda a$. Überprüfen Sie, welche Axiome eines $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}[i]$ zusammen mit der üblichen Addition und der Skalarmultiplikation $*$ erfüllt.

Abgabe bis **10:15** am **Montag, den 29. November** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.