Übungen zur Vorlesung Algebra I

Übungsblatt 13

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya 25.01.2016

Übungen: M. Nickel

Übung 1 (4 Punkte)
Seien p, q zwei verschiedene Primzahlen. Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung pq einen Normalteiler hat.

Übung 2 (4 Punkte)
Seien $p < q$ zwei Primzahlen mit $p \nmid q - 1$. Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung pq zyklisch ist.

Übung 3 (4+4 Punkte)
Die Fittinguntergruppe $\Phi(G)$ einer Gruppe G besteht aus

$$\Phi(G) = \bigcap_{M \subset G} M\,,$$

wobei M durch alle maximalen echten Untergruppen $M \subset G$ läuft. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $\Phi(G)$ ist ein Normalteiler.

(b) Eine Menge von Elementen $S \subset G$ erzeugt die Gruppe G genau dann, wenn das Bild von S in $\overline{G} = G/\Phi(G)$ diesen Quotienten $\overline{G}$ erzeugt.

(c) Sei G eine p-Gruppe. Zeigen Sie, dass $G/\Phi(G)$ eine abelsche Gruppe vom Exponenten p ist (also natürlich als $\mathbb{F}_p$-Vektorraum verstanden werden kann).

(d) Eine Teilmenge $S \subset G$ einer p-Gruppe ist genau dann ein minimales Erzeugendensystem, wenn die Bilder der Elemente von S in $G/\Phi(G)$ eine $\mathbb{F}_p$-Basis bilden.

Präsenzaufgaben

Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.

Übung 4

(a) Sei G eine Gruppe und $G/Z(G)$ zyklisch. Zeigen Sie, dass dann $G = Z(G)$ abelsch ist.

(b) Bestimmen Sie für eine Primzahl p alle Gruppen der Ordnung p^2 bis auf Isomorphie.

Übung 5
Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung 15 zyklisch ist.

Zusatzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 6
Eine Zentralreihe (oder zentrale Filtrierung) einer Gruppe G ist eine normale Filtrierung $F^\bullet(G)$, so dass für alle i der i-te Filtrationsquotient $F^i(G)/F^{i+1}(G)$ im Zentrum von $G/F^{i+1}(G)$ liegt. Eine nilpotente Gruppe ist eine Gruppe mit einer endlichen Zentralreihe.
Zeigen Sie, dass eine p-Gruppe nilpotent ist.

Dieses Blatt kann bis spätestens **12:00 Uhr** am **Montag, den 01.02.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Schnellhefter, zusammen zu halten.