Übungen zur Vorlesung Algebra I

Übungsblatt 10

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya 18.12.2015

Übungen: M. Nickel

Übung 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$v : K(X) \to Z$$
$$v(\frac{f}{g})) \mapsto \deg(g) - \deg(f)$$

eine diskrete Bewertung auf K(X) definiert. Diese Bewertung wird die Gradbewertung genannt. Beschreiben Sie die Bewertung, welche aus der Gradbewertung durch Vorschalten des K-Automorphismus von $K(X)$, der durch $X \mapsto X^{-1}$ festgelegt wird, entsteht. Finden Sie einen Hauptidealring in K, so dass die Gradbewertung eine zu einem Primelement gehörige diskrete Bewertung ist.

Übung 2 (4 Punkte)

Sei R der Bewertungsring einer diskreten Bewertung v auf einem Körper K. Man zeige, das für jedes $x \in K$ gilt: $x \in R$ oder $1/x \in R$.

Übung 3 (4+4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass folgende Polynome in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel sind:

- $3X^5 + 14X^4 - 21X^2 + 49X - 7$
- $X^{12} + 27X + 1002$
- $X^4 + 1$.

(b) Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl $f = \sum_{i=0}^{2n+1} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom vom Grad $2n+1$. Angenommen p teilt nicht a_{2n+1} aber $p \mid a_i$ für alle $i \leq 2n$ und ausserdem $p^2 \mid a_i$ für alle $i \leq n$ wobei $p \nmid a_0$. Zeigen Sie, dass f dann irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist.

Präsenzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 4

Zeigen Sie mithilfe des Eisensteinkriteriums: Sei F ein Körper und $K = F((X))$. Dann ist $T^n - X \in K[T]$ irreduzibel für alle $n > 0$.

Übung 5
Sei R der Bewertungsring einer diskreten Bewertung v auf dem Körper K. Zeigen Sie, dass die Sequenz von abelschen Gruppen

$$0 \to R \xrightarrow{i} K \xrightarrow{v} \mathbb{Z} \to 0$$

mit der Inklusion i und der Bewertung v exakt ist. Überlegen Sie sich, wie sie die Bewertung v definieren können, wenn Sie nur den diskreten Bewertungsring als Unterring $R \subset K$ gegeben haben.

Zusatzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 6 (Skalierungstrick)
Sei $f = \sum_{i=0}^{d} a_i T^i \in K[T]$ und $0 \neq \lambda \in K$. Betrachten Sie

$$F = \lambda^d f(\lambda^{-1}T) = \sum_{i=0}^{d} \lambda^{d-i} a_i T^i$$

und zeigen Sie

$$f \text{ irreduzibel in } K[T] \Leftrightarrow F \text{ irreduzibel in } K[T].$$

Sei nun K ein Körper mit einer diskreten Bewertung und mit Bewertungsring R. Überlegen Sie sich, dass man durch geeingete Wahl von λ erreichen kann, dass $F \in R[T]$. Dann kann man versuchen das Eisenteinkriterium anzuwenden. Finden Sie ein Beispiel hierfür.

Dieses Blatt kann bis spätestens **12:00 Uhr** am **Montag, den 11.01.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Schnellhefter, zusammen zu halten.