(Ganz kurze) Einführung in die Topologie

Jürgen Wolfart, Sommersemester 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Metrische Räume

1.1 Metriken

Definition 1.1 *Sei X eine Menge, $d : X \times X \to \mathbf{R}$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften.*

- $d(y, y) = 0$ *für alle* $y \in X$ *und* $d(x, y) > 0$ *für alle* $x \neq y \in X$ *.*
- $d(x, y) = d(y, x)$ *für alle* $x, y \in X$ *(***Symmetrie***)*
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *für alle* $x, y, z \in X$ *(***Dreiecksungleichung***)*

Dann heißt X ein **metrischer Raum** *mit* **Metrik** *(= Abstandsfunktion) d, ausführlicher manchmal mit (X, d) bezeichnet.*

Beispiel 1.1 *Sei X der $\mathbf{R}^n$ und $||x|| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ die* euklidische Norm *auf dem $\mathbf{R}^n$, wobei wie immer $x = (x_1, \ldots, x_n)$ zu lesen ist. Dann definiert für alle $x, y \in \mathbf{R}^n$ die Vorschrift $d(x, y) := ||x - y||$ die* **euklidische Metrik** *auf X.*

Dass es sich dabei wirklich um eine Metrik handelt, ist für die ersten beiden Metrik–Axiome ganz leicht einzusehen. Die Dreiecksungleichung folgt letztlich aus der Cauchy–Schwarz'schen Ungleichung, aus der man die *Dreiecksungleichung für die Norm*

$$||x + y|| \ \leq \ ||x|| + ||y||$$

ableitet. Alles funktioniert übrigens genauso für den komplexen Vektorraum $\mathbf{C}^n$, wenn man nur in der Norm–Definition die Quadratsumme $x_1^2 + \ldots + x_n^2$ ersetzt durch die Summe $z_1\overline{z_1} + \ldots + z_n\overline{z_n} = |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2$ der Betragsqudrate. Da die Dreiecksungleichung keineswegs nur hier gilt, führt man zweckmäßigerweise einen neuen Begriff ein.

1.2 Normen

Definition 1.2 *Ein* $\mathbf{R}$*– oder* $\mathbf{C}$*–Vektorraum V (nicht notwendig endlichdimensional!) heißt* **normiert***, wenn eine* **Norm***–Funktion $|| \quad || : V \to \mathbf{R}$ existiert, die für alle $x, y \in V$ und alle λ aus dem Grundkörper die Bedingungen*

- $||x|| \geq 0$ *mit „$= 0$" genau für den Nullvektor $x = 0$,*
- $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$ *und*
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ *erfüllt.*

Klar, dass jeder normierte Vektorraum ein metrischer Raum ist mit einer Abstandsfunktion, die analog zur oben definierten euklidischen Metrik durch $d(x, y) := ||x - y||$ eingeführt wird. Zwei andere gelegentlich in der Analysis gebrauchte Beispiele:

Beispiel 1.2 *Auf dem* $\mathbf{R}^n$ *und dem* $\mathbf{C}^n$ *sind die* **Maximumsnorm** *und die* **Summennorm** *durch*

$$||x||_m := \max_{1,\ldots,n} |x_i| \qquad \textit{bzw.} \qquad ||x||_s := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

definiert, jeweils für $x := (x_1, \ldots, x_n)$ *.*

Für $n = 1$ stimmen alle diese Normen mit dem wohlbekannten Betrag überein. Für $n > 1$ sind sie zwar verschieden, *induzieren aber die gleiche Topologie.* Was soll das heißen?

1.3 Topologische Grundbegriffe

Definition 1.3 *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum. Für* $M \in X$ *und* $r \in \mathbf{R}$ *,* $r > 0$ *, heißt* $K(M, r) := \{x \in X \mid d(M, x) < r\}$ *eine* **Kugel** *mit Mittelpunkt* M *und Radius* r *.*
$U = U(M) \subset X$ *heißt eine* **Umgebung** *von* M *, wenn* U *eine Kugel mit Mittelpunkt* M *enthält.*
$O \subset X$ *heißt* **offen***, wenn zu jedem Punkt* $M \in O$ *eine Umgebung* $U(M) \subset O$ *existiert.*
$A \subset X$ *heißt* **abgeschlossen***, wenn das Komplement* $X \backslash A$ *offen ist.*

Bemerkungen dazu: 0. In diesem Skriptum ist in der Schreibweise „$\subset$" bzw. „$\supset$" die Gleichheit zugelassen.
1. Man überzeuge sich, dass offene Intervalle in $\mathbf{R}$ auch im Sinne dieser Definition offen sind, wenn man die Metrik verwendet, welche durch den üblichen Betrag bestimmt wird.
2. Man beachte, dass auch die leere Menge und der Gesamtraum X nach Definition offen sind.
3. Man überlege sich, dass die hier definierten Kugeln offen sind, dass sie also insbesondere Umgebungen ihres Mittelpunkts sind, genauer sogar aller ihrer Punkte.
4. *Kugeln* im $\mathbf{R}^3$ sind wirklich Kugeln unserer Anschauung, wenn wir die euklidische Metrik benutzen — allerdings ohne Rand; im $\mathbf{R}^2$ bzw. in $\mathbf{R}$ natürlich Kreise bzw. offene Intervalle $]M - r, M + r[$. Ganz anders aber für jene Metriken d_m , d_s , welche von der Maximums– bzw. der Summennorm abstammen: Kugeln im $\mathbf{R}^3$ bezüglich d_m sind achsenparallele Würfel, bezüglich d_s sind es Oktaeder, beides aber nach wie vor mit Mittelpunkt M . Trotzdem gilt

Satz 1.1 *Sei* $X = \mathbf{R}^n \supset O$ *. Dann gelten folgende Äquivalenzen:*
O offen in (X, d) $\quad\Leftrightarrow\quad$ *O offen in (X, d_m)* $\quad\Leftrightarrow\quad$ *O offen in (X, d_s) .*

Zum *Beweis* genügt es zu zeigen, dass jede d–Kugel um den Punkt M eine d_m–Kugel, diese wiederum eine d_s–Kugel und diese schließlich wieder eine d–Kugel enthält — jeweils natürlich mit kleineren Radien. Das ist geometrisch leicht einzusehen und muss nur in Ungleichungen umgesetzt werden. □

Die gleiche Aussage gilt auch dann, wenn wir zu gewissen Metriken übergehen, welche nicht von Normen abstammen wie jene, die sich uns bisher vorgestellt haben.

Satz 1.2 *Sei* (X,d) *ein metrischer Raum. Dann wird durch die Vorschrift*

$$d_1(x,y) := \min\{d(x,y), 1\} \qquad \textit{für alle} \quad x,y \in X$$

eine neue Metrik auf X *definiert. Es gilt aber auch hier:* O *ist offen in* (X,d) *genau dann, wenn* O *offen in* (X,d_1) *ist.*

Der Grund liegt einfach darin, dass es für *offen* genügt, sehr kleine Kugeln (also mit kleinem Radius) zu betrachten, und diese stimmen für beide Metriken überein; dass es sich tatsächlich bei d_1 um eine Metrik handelt, sei der Beweisfindigkeit des Lesers überlassen. □

1.4 Noch mehr Metriken und Normen

Die Metrik d_1 hat nicht nur Bedeutung als Kuriosität — jede Kugel vom Radius > 1 ist bereits der ganze Raum X —, sondern ist sehr praktisch bei der Konstruktion neuer metrischer Räume, wie wir gleich sehen werden. Zuvor jedoch

Beispiel 1.3 (X_i, d_i), $i = 1, \ldots, n$, *seien metrische Räume. Dann ist der Produktraum* $\Pi_{i=1}^n X_i$ *ebenfalls ein metrischer Raum, nämlich z.B. mit der Metrik*

$$d\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) := \sqrt{\sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i)^2}$$

(Sozusagen eine weitreichende Verallgemeinerung der euklidischen Metrik) Man hätte ebensogut auch die Idee der Maximumsmetrik oder der Summenmetrik verwenden können. Geht so eine Konstruktion auch für unendliche Produkte? Offenbar nicht so ohne weiteres, denn die Summe unter der Wurzel muss ja nicht konvergieren. Man kann sich aber behelfen, indem man die beteiligten Metriken alle gemäß Satz 1.2 modifiziert:

Beispiel 1.4 (X_i, d_i), $i \in \mathbf{N}$, *seien metrische Räume, dabei seien alle Metriken* $d_i \leq 1$. *Dann ist der Folgenraum* $X = \prod_{i \in \mathbf{N}} X_i$ *metrisch z.B. mit der Metrik*

$$d(x,y) := \sum_{i \in \mathbf{N}} \frac{1}{i^2} d_i(x_i, y_i) \quad \textit{für alle} \quad x = (x_i)_{i \in \mathbf{N}}, \ y = (y_i)_{i \in \mathbf{N}} .$$

Achtung: Die 0 wird in diesem Skriptum nicht zu $\mathbf{N}$ hinzugerechnet.
Bedenken Sie, dass $\sum \frac{1}{i^2}$ konvergiert, wenn Sie beweisen wollen, dass d eine Metrik ist!

Noch eine Möglichkeit, Metriken auf unendlichdimensionalen Vektorräumen zu definieren:

Beispiel 1.5 *Sei* $D \subset \mathbf{R}$ *und* V *der* $\mathbf{R}$*–Vektorraum aller beschränkten Funktionen* $f : D \to \mathbf{R}$. *Dann wird durch*

$$|f|_s := \sup\{\, |f(x)| \mid x \in D \,\}$$

die **Supremumsnorm** *auf* V *definiert, die* V *zum metrischen Raum macht (vgl. Def. 1.2 und die darauffolgende Bemerkung).*

Bereits bei der Einführung der beschränkten Metrik d_1 haben wir gesehen, dass keineswegs alle Metriken von Normen abstammen. Hier ein extremes und ziemlich exotisches Beispiel:

Beispiel 1.6 *Sei X eine beliebige Menge und $d : X \times X \to \mathbf{R}$ definiert durch*

$$d(x,x) := 0 \quad \textit{und} \quad d(x,y) = 1 \quad \textit{für alle} \quad x \neq y \in X\ .$$

In dieser **diskreten Metrik** *bestehen alle Kugeln vom Radius ≤ 1 nur aus dem Mittelpunkt und alle Kugeln vom Radius > 1 aus dem Gesamtraum X . Alle Untermengen von X sind sowohl offen als auch abgeschlossen.*

Zum Schluss dieses Abschnitts ein Beispiel, das erhebliche Bedeutung für die Zahlentheorie hat. Es sei daran erinnert, dass im Ring $\mathbf{Z}$ der ganzen Zahlen der *Satz von der eindeutigen Primfaktorzerlegung* gilt. Aus diesem folgt, dass man — gegeben eine Primzahl p — jede rationale Zahl $r \in \mathbf{Q}$, $r \neq 0$, in der Form $\pm p^{v_p(r)} \cdot \frac{m}{n}$ schreiben kann mit nicht durch p teilbaren natürlichen Zahlen m, n . Den (eindeutig bestimmten) Exponenten $v_p(r) \in \mathbf{Z}$ nennt man die *p–Ordnung* oder *Exponentenbewertung* von r .

Beispiel 1.7 *Auf $\mathbf{Q}$ sei für jede Primzahl p ein p–***adischer Betrag** *definiert durch*

$$|0|_p := 0 \quad \textit{und} \quad |r|_p := p^{-v_p(r)} \quad \textit{für alle} \quad r \neq 0\,.$$

Dieser Betrag erfüllt insbesondere $|rs|_p = |r|_p \cdot |s|_p$ und eine
verschärfte Dreiecksungleichung

$$|x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\} \qquad (\ \leq |x|_p + |y|_p\ )$$

*und dient darum genau wie die Vektorraumnormen zur Definition einer p–***adischen Metrik** *$d_p(r,s) := |r-s|_p$. Offene Mengen bezüglich dieser Metrik sehen ganz anders aus als offene Mengen bezüglich der gewöhnlichen Betragsmetrik und sind auch je nach Wahl von p völlig verschieden: Man mache sich klar, dass die Kugel $K(0, p^{-v})$ aus 0 und allen rationalen r vom Typ $\pm p^k \cdot \frac{m}{n}$ besteht mit $k > v$ und nicht durch p teilbaren natürlichen Zahlen m, n . Also: je größer die p–Potenz, desto näher an 0 (!).*

Nebenbei haben wir hier noch einen anderen Trick zur Erzeugung neuer metrischer Räume kennengelernt: den Übergang zu Untermengen und die Einschränkung von d auf diese Untermengen, hier also bei der Restriktion der Metrik von $\mathbf{R}$ auf die (ebenso vom gewöhnlichen Betrag induzierten) Metrik auf $\mathbf{Q}$. Vorsicht: Die rationalen Zahlen > 0 und < 1 bilden eine offene Menge in $\mathbf{Q}$, aber natürlich nicht in $\mathbf{R}$, es kommt also sehr darauf an, in welchem Gesamtraum man sich befindet.

1.5 Eine Trennungseigenschaft

Damit neben den vielen Beispielen dieser Abschnitt wenigstens noch ein winziges, aber wichtiges Resultat enthält, schließen wir mit einem kleinen Satz ab.

Satz 1.3 *(X, d) sei ein metrischer Raum. Dann gilt die folgende* **Trennungseigenschaft***: Zu je zwei verschiedenen Punkten $x \neq y \in X$ gibt es Umgebungen $U(x)$ und $V(y)$ mit leerem Schnitt $U(x) \cap V(y) = \emptyset$.*

Beweis. Es genügt, Kugelumgebungen von x und y mit dieser Eigenschaft zu finden. Der Abstand der beiden Punkte sei $2r := d(x, y)$. Dann haben die beiden Kugeln $K(x, r)$ und $K(y, r)$ keine gemeinsamen Punkte, denn für jeden Punkt z im Schnitt würde gelten

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < r + r = 2r \ , \quad \text{Widerspruch.}$$

2 Topologische Räume und stetige Abbildungen

2.1 Axiome und Beispiele

Definition 2.1 *Eine Menge X , zusammen mit einem System $\mathcal{O}$ von Untermengen $O \subset X$, den* **offenen Mengen** *in X , heißt* **topologischer Raum***, wenn $\mathcal{O}$ das folgende Axiomensystem erfüllt:*

- *X und $\emptyset$ sind offen,*
- *beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen,*
- *endliche Durchschnitte offener Mengen sind offen.*

In einem topologischen Raum heißt eine Menge $A \subset X$ **abgeschlossen***, wenn ihr Komplement $X \backslash A$ offen ist. $U = U(x) \subset X$ heißt* **Umgebung des Punktes** *$x \in X$, wenn es eine offene Menge O gibt mit $x \in O \subset U$.*

Beispiel 2.1 *Alle metrischen Räume sind topologische Räume. Wie wir gesehen haben, gibt es soger Fälle, in denen verschiedene Metriken die gleiche Topologie erzeugen, will sagen: das gleiche System $\mathcal{O}$ offener Mengen erzeugen.*
Die diskrete Metrik aus Beispiel 1.6 erzeugt übrigens die **diskrete Topologie***, in der $\mathcal{O}$ einfach die Menge aller Untermengen von X ist (in der Sprache der Mengenlehre die* **Potenzmenge** *$\mathcal{P}(X)$ von X).*

Beispiel 2.2 *Eine ganz andere Topologie ist die gröbstmögliche Topologie auf X , deren offene Mengen nur X und $\emptyset$ sind. Sie wird gewiss nicht von einer Metrik erzeugt, denn die Trennungseigenschaft aus Satz 1.3 ist nicht erfüllt — ausgenommen in dem Fall, dass X weniger als zwei Punkte besitzt.*

Beispiel 2.3 *Weniger trivial, aber aus dem gleichen Grund nicht von einer Metrik erzeugt ist die* **Zariski–Topologie** *auf dem Vektorraum $\mathbf{C}^n$ (funktioniert genauso für jeden anderen Körper). Hier nennt man eine Menge O offen, wenn endlich viele Polynome $p_1, \ldots, p_m \in \mathbf{C}[z_1, \ldots, z_n]$ existieren, so dass*

$$O = \mathbf{C}^n \setminus \{ \, z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n \ | \ p_1(z) = \ldots = p_m(z) = 0 \, \} \ .$$

Die leere Menge erhält man hier, indem man nur das Nullpolynom nimmt, den Gesamtraum, indem man ein konstantes Polynom $p \neq 0$ verwendet. In diesem Fall ist es einfacher, anstelle der offenen Mengen die abgeschlossenen zu charakterisieren, nämlich als gemeinsame Nullstellen endlich vieler p_j. Dass Durchschnitte von zwei offenen Mengen — etwa charakterisiert durch die Polynome p_j bzw. q_i — wieder offen sind, kann man z.B. dadurch einsehen, dass man alle Produkte (wieder endlich viele) $p_j q_i$ zur Charakterisierung heranzieht. Daraus folgt natürlich induktiv, dass auch beliebige endliche Schnitte offener Mengen wieder offen sind. Die Vereinigung von zwei offenen Mengen ist offen, weil man dafür nur die Vereinigung der beiden endlichen Polynommengen betrachten muss. Dass das sogar für unendliche Vereinigungen funktioniert, liegt an nichttrivialen Fakten der Algebra (Polynomringe über Körpern sind sogenannte Noethersche Ringe), die garantieren, dass man hier immer mit der Berücksichtigung endlich vieler Polynome auskommt. Die abgeschlossenen Mengen dieses Beispiels heißen **algebraische Varietäten** *und spielen in der algebraischen Geometrie eine zentrale Rolle.*

Bemerkung: Hier deutet sich schon an, dass es praktisch sein mag, mit abgeschlossenen anstelle von offenen Mengen zu arbeiten. Auch mit diesen lässt sich das Axiomensystem für topologische Räume formulieren: X und $\emptyset$ sind abgeschlossen, endliche Vereinigungen und beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.
Auch der Umgebungsbegriff eignet sich für eine Umformulierung des Axiomensystems, dazu überlege man sich zunächst, wie man den Begriff *offen* definiert, wenn man den Umgebungsbegriff zur Verfügung hat. Und wie geht's dann weiter?

Beispiel 2.4 *Genau wie man einen metrischen Raum durch Restriktion der Metrik zu einem neuen metrischen Raum auf einer Untermenge machen kann, lässt sich jede Untermenge Y eines topologischen Raums $(X, \mathcal{O})$ zu einem neuen topologischen Raum machen mit der* **Relativtopologie***, welche durch das System $\mathcal{O}_Y$ offener Mengen $O \cap Y$, $O \in \mathcal{O}$ definiert ist.*

Vorsicht: Das halboffene Intervall $[0,1[= \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leq x < 1\}$ ist keineswegs offen in $X = \mathbf{R}$, wohl aber in der Halbgeraden Y aller reellen Zahlen ≥ 0.

Beispiel 2.5 *In der gewöhnlichen, von der Betragsmetrik induzierten Topologie auf den rationalen Zahlen $\mathbf{Q}$ erhält die Untermenge $\mathbf{Z}$ der ganzen Zahlen als Relativtopologie die diskrete Topologie. Insbesondere bestehen ,,kleine" Umgebungen der 0 nur aus der 0 selbst. Ganz anders in der p–adischen Topologie, welche durch die Metrik d_p aus Beispiel 1.7 induziert wird: Hier gibt es zu jeder Umgebung U von 0 ein $n \in \mathbf{N}$, so dass U alle ganzen Vielfachen von p^{n+1} enthält, das ist nämlich die p–adische Kugel um 0 mit Radius p^{-n}, geschnitten mit $\mathbf{Z}$.*
Die gleiche Überlegung zeigt, dass verschiedene Primzahlen auf verschiedene Topologien führen, d.h. zu unterschiedlichen Systemen offener Mengen.

Definition 2.2 *Wenn auf einer Menge X zwei Topologien existieren mit Systemen offener Mengen $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$, so heißt $\mathcal{O}_2$* **feiner** *als $\mathcal{O}_1$ und entsprechend heißt $\mathcal{O}_1$* **gröber** *als $\mathcal{O}_2$.*

In diesem Sinne ist die diskrete Topologie die feinste mögliche Topologie auf X und die triviale Topologie aus Beispiel 2.2 die gröbste Topologie.
Ein System $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt **Subbasis** *der Topologie $\mathcal{O}$, wenn $\mathcal{O}$ die gröbste Topologie auf X definiert, welche $\mathcal{S}$ enthält. Die offenen Mengen aus $\mathcal{O}$ bestehen dann gerade aus allen (beliebig großen) Vereinigungen endlicher Durchschnitte aus $\mathcal{S}$. Man sagt auch: $\mathcal{O}$ wird von $\mathcal{S}$* **erzeugt**.
Entsprechend heißt $\mathcal{B}$ eine **Basis** *einer Topologie, wenn zu je endlich vielen $B_i \in \mathcal{B}$ auch ihr Durchschnitt $\bigcap B_i$ eine Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist. Dann ist die Menge aller Vereinigungen aus $\mathcal{B}$ eine (davon erzeugte) Topologie $\mathcal{O}$.*

Beispielsweise ist eine Basis der Topologie in einem metrischen Raum die Menge aller Kugeln, und eine Subbasis der Topologie von $\mathbf{R}$ besteht aus allen Intervallen $]-\infty, b[$ und $]a, \infty[$.

2.2 Stetigkeit

Definition 2.3 *Seien $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ zwei topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. f heißt* **stetig**, *wenn für alle offenen $O \in \mathcal{O}_Y$ auch das Urbild $f^{-1}O$ offen in X ist.*

Was hat diese Definition mit der gewohnten ε–δ–Definition der Analysis zu tun?

Satz 2.1 *1) Eine Abbildung $f : X \to Y$ topologischer Räume ist genau dann stetig, wenn für jede abgeschlossene Menge $A \subset Y$ das Urbild $f^{-1}A$ abgeschlossen in X ist.*
2) Eine Abbildung $f : X \to Y$ topologischer Räume ist genau dann stetig, wenn für eine Basis $\mathcal{B}$ der Topologie auf Y das Urbild $f^{-1}(O)$ jeder offenen Menge $O \in \mathcal{B}$ wieder offen in X ist.
3) Eine Abbildung $f : X \to Y$ topologischer Räume ist genau dann stetig, wenn für jedes $x_0 \in X$ und jede Umgebung $U' = U'(y_0)$ des Bildpunkts $y_0 = f(x_0)$ eine Umgebung $U = U(x_0)$ existiert mit $f(U) \subset U'$, oder einfacher: wenn $f^{-1}U'$ Umgebung von x_0 ist.
4) Wenn es sich bei X und Y darüber hinaus um metrische Räume mit Metriken d bzw. d' handelt, ist f genau dann stetig, wenn zu jedem $\delta > 0$ und zu jedem $x_0 \in X$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass für alle $x \in X$ mit $d(x, x_0) < \varepsilon$ gilt: $d'(f(x), f(x_0)) < \delta$.

Beweis. 1) folgt daraus, dass $f^{-1}(Y \backslash A) = X \backslash f^{-1}A$ genau dann offen ist, wenn $f^{-1}A$ abgeschlossen ist.
2) folgt daraus, dass jedes offene O in Y Vereinigung offener Mengen aus dem System $\mathcal{B}$ ist.
3) Sei zunächst f stetig und U' eine Umgebung von y_0. Nach Definition dürfen wir (per Verkleinerung der Umgebung) annehmen, dass U' offen ist. Dann ist nach Voraussetzung auch $U := f^{-1}U'$ offen und enthält x_0, ist also eine Umgebung von x_0.
Nun sei umgekehrt die angegebene Umgebungseigenschaft für f erfüllt und O eine offene Menge in Y. Wenn $f^{-1}O = \emptyset$ ist, brauchen wir nichts zu zeigen. Zu jedem $x_0 \in f^{-1}O$ wähle man eine Umgebung $U' = U'(f(x_0))$, o.B.d.A. offen und in O enthalten, dann

enthält $f^{-1}U' \subset f^{-1}O$ eine offene Umgebung $u(x_0)$ von x_0, und nach den Topologie–Axiomen ist

$$f^{-1}O = \bigcup_{x_o \in f^{-1}O} u(x_0) \qquad \text{offen.}$$

4) Für den Fall metrischer Räume lässt sich der Beweis ganz genauso führen; man verkleinere jeweils U' zu einer Kugelumgebung von y_0 vom Radius δ und U zu einer Kugelumgebung vom Radius ε. □

Bemerkungen: 1) Zusammensetzungen stetiger Abbildungen sind wieder stetig, also $g \circ f : X \to Z$, wenn $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetige Abbildungen topologischer Räume sind.
2) Die identische Abbildung $i : X \to X \ : x \mapsto x$ ist genau dann eine stetige Abbildung des topologischen Raums $(X, \mathcal{O}_1)$ auf den topologischen Raum $(X, \mathcal{O}_2)$, wenn $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$, wenn man also im Bild eine gröbere Topologie benutzt. (N.b.: Im Sinne unserer Definition ist auch die gleiche Topologie „gröber".)
3) Aber selbst wenn man die gleiche Topologie verwendet und f stetig und bijektiv ist, darf man nicht erwarten, dass die Umkehrabbildung f^{-1} auch stetig ist! Dies erfordert wieder zusätzliche Eigenschaften:

Definition 2.4 *Eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ eines topologischen Raums $(X, \mathcal{O}_X)$ auf einen topologischen Raum $(Y, \mathcal{O}_Y)$ heißt ein* **Homöomorphismus***, wenn sowohl f wie seine Umkehrabbildung f^{-1} stetig sind. Wenn eine solche Abbildung existiert, heißen X und Y* **homöomorph***.*

Zum Nachweis der Homöomorphie genügt es also, einen Homöomorphismus anzugeben. Z.B. sind eine offene Kreisscheibe $K(0,1)$ des $\mathbf{R}^2$ und der $\mathbf{R}^2$ selbst homöomorph: Man führe Polarkoordinaten (r, φ) auf $\mathbf{R}^2$ ein und definiere f als die Abbildung $(r, \varphi) \mapsto (\frac{r}{1-r}, \varphi)$ und weise nach, dass diese Abbildung stetig und umkehrbar stetig ist. Viel schwerer ist es, zu zeigen, dass zwei Räume *nicht* homöomorph sind. Das ist z.B. für $X = \mathbf{R}$ und $Y = \mathbf{R}^2$ höchst plausibel, den Beweis werden wir aber erst mit mehr Grundkenntnissen führen können.

2.3 Konstruktion neuer Topologien

Abbildungen lassen sich nicht nur daraufhin untersuchen, in wie weit sie mit der Topologie verträglich sind, sondern umgekehrt kann man mit Abbildungen auch neue Topologien konstruieren.

Definition 2.5 *Sei $f : X \to Y$ surjektive Abbildung eines topologischen Raums $(X, \mathcal{O}_X)$ auf eine Menge Y. Dann heißt $\mathcal{O}_Y$* **finale** *oder* **Quotienten–Topologie** *für f, wenn sie die feinste Topologie ist, für welche f stetig wird.*
Ganz entsprechend heißt $\mathcal{O}_X$ die **initiale Topologie** *für die Abbildung $g : X \to Y$ einer*

Menge X auf den topologischen Raum $(Y, \mathcal{O}_Y)$, wenn sie die gröbste Topologie auf X ist, für die g stetig wird.
Beide Definitionen kann man entsprechend auf Familien von Abbildungen $f_i : X_i \to Y$ bzw. $g_i : X \to Y_i$ ausdehnen, wenn i irgendeine Indexmenge I durchläuft.

Sehr nützlich und leicht zu beweisen ist

Satz 2.2 *In der finalen Topologie auf Y für die Abbildung $f : X \to Y$ gehören genau jene $O \subset Y$ zu $\mathcal{O}_Y$, für welche $f^{-1}O \in \mathcal{O}_X$ ist.*
Die initiale Topologie auf X für die Abbildungen $g_i : X \to Y_i$ hat die Urbilder $g_i^{-1}O_{i,j}$ der offenen Mengen $O_{i,j} \subset Y_i$ als Subbasis. $\Box$

Beispiel 2.6 *Sei auf dem topologischen Raum X eine Äquivalenzrelation „$\sim$" gegeben. Dann definiert die kanonische Abbildung $f : X \to Y := X/\sim : x \mapsto [x]$ eine Quotiententopologie auf der Menge Y aller Äquivalenzklassen. In dieser Topologie ist O genau dann offen, wenn $\{x \in X \mid [x] \in O\}$ offen ist.*

Beispiel 2.7 *Man nehme z.B. $X = \mathbf{R}^2$, $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbf{Z}^2$, dann wird $Y := \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ ein **Torus** mit einer Topologie, die im Kleinen genau so aussieht wie die in $\mathbf{R}^2$, weil die kanonische Projektion $X \to Y : x \mapsto [x]$ auf genügend kleinen Umgebungen in $\mathbf{R}^2$ bijektiv ist.*

Beispiel 2.8 *Als Beispiel einer initialen Topologie nehme man ein Produkt $X := \prod_{i\in I} X_i$ topologischer Räume, wobei I eine beliebige Indexmenge bezeichne. Als Abbildungen g_i betrachte man die Projektionen $X \to X_i$ auf die i–te Komponente. Offene Mengen von X in der **Produkttopologie** sind dann zunächst die Mengen aller $x = (x_i)_{i\in I}$, für die fast alle x_i ihren ganzen Raum X_i durchlaufen und für endlich viele $j \in J \subset I$ die x_j offene Mengen $O_j \subset X_j$ durchlaufen, die Punkte x also endliche Schnitte von g_j–Urbildern offener Mengen. Diese Mengen sind demnach vom Typ*

$$\prod_{i\notin J} X_i \times \prod_{j\in J} O_j \,,$$

jeweils für endliche Teilmengen J der Indexmenge I, im Fall endlicher Produkte also einfach beliebige Produkte offener Mengen aus den Komponentenräumen. Hinzu kommen dann noch beliebige Vereinigungen von Mengen dieses Typs.

Man mache sich klar, dass die Produkttopologie auf dem $\mathbf{R}^n$ exakt von dieser Bauart ist: Betrachtet man offene Intervalle O_j in $\mathbf{R}$, dann sind die hier eingeführten Produkte offene Quader des $\mathbf{R}^n$, und beliebige offene Mengen lassen sich als Vereinigung solcher offener Quader schreiben.

2.4 Hülle, Kern und Rand

Definition 2.6 *M sei eine Untermenge des topologischen Raums X. Dann ist der* **offene Kern** $\mathring{M}$ *von M die Menge aller $x \in M$, für die eine Umgebung $U(x) \subset M$ existiert.*
Die **abgeschlossene Hülle** $\overline{M}$ *von M besteht aus allen Punkten $x \in X$ mit der Eigenschaft, dass $U \cap M \neq \emptyset$ für jede Umgebung U von x.*
Ein Punkt $x \in X$ heißt **Randpunkt** *von M, wenn in jeder Umgebung von x sowohl Punkte aus M wie aus dem Komplement $X \backslash M$ liegen. Die Menge aller Randpunkte von M heißt der* **Rand** ∂M *von M.*

Satz 2.3 *Unter den gleichen Annahmen gilt: $\mathring{M}$ ist die Vereinigung aller offenen Mengen, die in M enthalten sind. $\overline{M}$ ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, die M enthalten.*
M ist offen genau dann, wenn $M = \mathring{M}$, und abgeschlossen genau dann, wenn $M = \overline{M}$.
Der Rand ∂M von M ist genau die Differenzmenge $\overline{M} \backslash \mathring{M}$.

Der *Beweis* ist leicht und soll nur exemplarisch für die neue Charakterisierung von $\overline{M}$ durchgeführt werden: Sei $x \notin \overline{M}$. Dann existiert eine (o.B.d.A. offene) Umgebung $U = U(x)$ mit $U \cap M = \emptyset$, also ist $X \backslash \overline{M}$ eine offene Menge, $\overline{M}$ somit abgeschlossen; M ist trivialerweise darin enthalten. Bleibt noch zu zeigen, dass jede abgeschlossene Menge A, welche M enthält, sogar auch $\overline{M}$ enthält. Dazu erinnere man sich daran, dass $O := X \backslash A$ offen ist und keinen Punkt von M enthält; O ist also Umgebung jedes seiner Punkte, schneidet M nicht und liegt daher komplett außerhalb von $\overline{M}$. Übergang zum Komplement zeigt also $\overline{M} \subset A$. □

Beispiel 2.9 *Sei $M := K(0, 1)$ die (offene) Einheitskreisscheibe im $\mathbf{R}^2$, versehen mit der euklidischen Metrik. Dann ist $\mathring{M} = M$ und $\overline{M} = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid ||x|| \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskreisscheibe, $\partial M = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid ||x|| = 1\}$ die Kreislinie des Einheitskreises.*

Beispiel 2.10 *Sei p eine Primzahl und $M := \{p^n \mid n \in \mathbf{N}\} \subset \mathbf{Q}$, zunächst in der üblichen Topologie. Dann ist $\mathring{M} = \emptyset$ und M ist selbst seine abgeschlossene Hülle und sein eigener Rand. Etwas anders in der p–adischen Topologie: Da ist auch noch $0 \in \partial M = \overline{M}$.*

3 Kompakte Mengen. Hausdorffräume

3.1 Quasikompakte Räume

Definition 3.1 *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt* **quasikompakt**, *wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Ausführlicher und formaler:*

$$\forall \{O_i \in \mathcal{O} \mid i \in I\} \quad \textit{mit} \quad \bigcup_{i \in I} O_i = X \qquad \exists \textit{ ein endliches } J \subset I \quad \textit{mit} \quad \bigcup_{i \in J} O_i = X .$$

Eine Untermenge $K \subset X$ heißt quasikompakt, wenn sie in der von X induzierten Relativtopologie quasikompakt ist, wenn also $K \subset \bigcup_I O_i$ zu einer endlichen Vereinigung (genauer: aus endlich vielen der O_i) verkleinert werden kann.

Vorsicht: ,,Quasikompakt" heißt also *nicht*, dass eine endliche Überdeckung existiert — diese existiert immer, wenn man X zu den offenen Mengen hinzunimmt —, sondern dass aus jeder gegebenen offenen Überdeckung eine endliche Überdeckung ausgewählt werden kann, die's auch schon tut. Eine komplizierte Bedingung, und es ist vorerst nicht so leicht, dazu Beispiele anzugeben! Endliche topologische Räume sind natürlich quasikompakt und ebenso der triviale topologische Raum aus Beispiel 2.2. Das erste nichttriviale Beispiel wäre die Zariski–Topologie aus 2.3, was man sich am einfachsten Beispiel $n = 1$ klarmachen sollte: Die nichtleeren offenen Mengen sind genau die Komplemente endlicher Mengen in $\mathbf{C}$, weil die Polynome $\not\equiv 0$ nur an endlich vielen Punkten verschwinden. Mit einer offenen Menge hat man also bereits fast alle Punkte in $\mathbf{C}$ überdeckt, es genügen endlich viele weitere offene Mengen, um ganz $\mathbf{C}$ zu überdecken.

Leichter ist es, Beispiele *nicht* quasikompakter Mengen anzugeben. Man nehme etwa die offene Einheitskreisscheibe $X := K(0, 1) \subset \mathbf{R}^2$ in der euklidischen Metrik und überdecke diese mit den offenen Kreisscheiben $O_n := K(0, 1 - \frac{1}{n})$, $n > 1$, dann ist klar, dass endlich viele davon nicht ausreichen, um X zu überdecken.

Wie rechtfertigt man einen so komplizierten Begriff? Man sollte einfachere Kriterien zur Hand haben, ,,quasikompakt" zu überprüfen, und quasikompakte Mengen sollten schöne (?) Eigenschaften haben. Hier eine bunte Mischung:

Satz 3.1 *1) Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ ist quasikompakt genau dann, wenn in jeder Familie A_i, $i \in I$, abgeschlossener Mengen mit der Eigenschaft $\bigcap_I A_i = \emptyset$ bereits endlich viele enthalten sind, deren Schnitt leer ist.*
2) Jede abgeschlossene Teilmenge eines quasikompakten Raums ist quasikompakt.
3) Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ ist quasikompakt genau dann, wenn eine Basis $\mathcal{B}$ der Topologie existiert, so dass jede Überdeckung von X durch Mengen aus $\mathcal{B}$ durch eine endliche Teilüberdeckung ersetzt werden kann.
4) Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ topologischer Räume bildet quasikompakte Mengen auf quasikompakte Mengen ab.
5) (Tychonoff) *Produkte $\prod_{i \in I} X_i$ quasikompakter Räume X_i sind wieder quasikompakt.*

Beweis. 1) folgt direkt aus der Überdeckungseigenschaft durch offene Mengen und Übergang zum Komplement.
2) Sei X quasikompakt und $A \subset X$ abgeschlossen, dazu seien die O_i, $i \in I$, offen in X und eine Überdeckung von A. Nimmt man noch die offene Menge $X \backslash A$ hinzu, so hat man eine offene Überdeckung von ganz X. Davon existiert eine endliche Teilüberdeckung, da X quasikompakt ist. Selbst wenn man aus dieser Teilüberdeckung $X \backslash A$ wieder entfernt, hat man immer noch eine endliche offene Überdeckung von A, und zwar jetzt Teilüberdeckung der O_i, somit ist A quasikompakt.
Vorsicht: Man mache sich am Beispiel der Zariski–Topologie auf $\mathbf{C}$ klar, dass die Umkehrung nicht stimmt: die Einheitskreislinie ist (wie jede Untermenge von $\mathbf{C}$) quasikompakt,

aber eben nicht abgeschlossen. Wir werden weiter unten auf dieses Thema zurückkommen.
3) Wenn X quasikompakt ist, kann man per definitionem jede Überdeckung durch Mengen aus $\mathcal{B}$ durch eine endliche Teilüberdeckung ersetzen. Wenn umgekehrt eine Basis mit dieser Eigenschaft existiert und eine beliebige Überdeckung durch offene O_i gegeben ist, ersetze man jedes O_i durch eine Vereinigung offener B_{ij} aus der Basis. Da von diesen endlich viele bereits als Überdeckung ausreichen, braucht man sie nur noch durch die zugehörigen endliche vielen Obermengen O_i zu ersetzen.
4) Sei $K \subset X$ quasikompakt und $f(K) \subset Y$ werde von den offenen Mengen O_i , $i \in I$, überdeckt. Dann wird K von den offenen Mengen $f^{-1}O_i$ überdeckt, und dazu genügen endlich viele (mit $i \in J \subset I$) davon, denn K ist quasikompakt. Dann wird $f(K)$ bereits von den O_i , $i \in J$, überdeckt, also ist auch $f(K)$ quasikompakt.
5) Die Umkehrung der Aussage (jedenfalls wenn alle $X_i \neq \emptyset$ sind) folgt direkt aus Teil 4), weil alle Projektionen auf die Komponenten nach Voraussetzung stetig sind. Die eigentliche Aussage gilt für beliebige Produkte, wir werden sie hier aber aus Bequemlichkeit nur für zwei Faktoren (somit für endlich viele) beweisen und dabei Teil 3) des Satzes benutzen. Wir kennen aus Beispiel 2.8 eine Basis der Produkttopologie, nämlich die offenen „Kästen" $O_{1i} \times O_{2i}$, dabei O_{ji} offen in X_j , $j = 1, 2$. Seien diese mit $i \in I$ so gegeben, dass sie $X_1 \times X_2$ überdecken. Für jedes feste $y \in X_2$ ist $X_1 \times \{y\}$ per Projektion homöomorph zu X_1 , also quasikompakt, wird somit von nur endlich vielen $O_{1i} \times O_{2i}$ überdeckt, etwa mit $i = 1, \dots, n$. O.B.d.A. nehmen wir nur solche O_{2i} , die y enthalten, dann ist der Schnitt $\bigcap_1^n O_{2i}$ in der zweiten Projektion offene Umgebung $U(y)$ von y . Für diese ist $X_1 \times U(y)$ also endlich überdeckt durch die $O_{1i} \times O_{2i}$, $i = 1, \dots, n$. Diese Konstruktion kann man natürlich für jedes der $y \in X_2$ durchführen, somit bilden die $U(y)$, $y \in X_2$, eine offene Überdeckung von X_2 . Wieder genügt eine endliche Teilüberdeckung, d.h. man braucht die Konstruktion nur für $y_1, \dots, y_m$ durchzuführen, benötigt also insgesamt nur endlich viele $O_{1i} \times O_{2i}$. $\square$

3.2 Das Hausdorffaxiom

Definition 3.2 *Ein topologischer Raum X heißt* **Hausdorffraum** *(oder* **separiert***, oder man sagt auch: erfüllt das* **Trennungsaxiom** *T_2), wenn zu je zwei verschiedenen Punkten $x \neq y \in X$ Umgebungen $U(x)$ und $V(y)$ mit $U \cap V = \emptyset$ existieren, welche also die beiden Punkte „trennen".*

Wir haben bereits in Satz 1.3 gelernt, dass metrische Räume immer hausdorffsch sind. Auf der anderen Seite stehen eher grobe Topologien wie die triviale Topologie aus Beispiel 2.2 oder die Zariski–Topologie aus Beispiel 2.3, welche dieses Trennungsaxiom nicht erfüllen. Die Hausdorffeigenschaft wird sich als besonders wichtig für die Konvergenz von Folgen erweisen, erleichtert aber auch das Arbeiten mit quasikompakten Räumen. Wir beginnen mit einer sehr einfachen Eigenschaft.

Satz 3.2 *Produkte von Hausdorffräumen sind wieder Hausdorffräume.*

Zum *Beweis* seien $x = (x_i) \neq (y_i) = y$ zwei verschiedene Punkte des Produkts. Dann unterscheiden sie sich in mindestens einer Komponente $x_j \neq y_j$. Man nehme nun zwei trennende Umgebungen $U(x_j)$ und $V(y_j)$ in der j–ten Komponente des Produkts, dann sind

$$U(x_j) \times \prod_{i \neq j} X_i \quad \text{und} \quad V(y_j) \times \prod_{i \neq j} X_i$$

trennende Umgebungen für x und y. $\square$

3.3 Kompakte Räume

Definition 3.3 *Ein quasikompakter Hausdorffraum X heißt* **kompakt**. *Entsprechend heißt wieder eine Untermenge K eines topologischen Raums kompakt, wenn sie in der von X induzierten Relativtopologie kompakt ist.*

Beispiel 3.1 *In der üblichen Topologie auf $\mathbf{R}$ sind abgeschlossene endliche Intervalle $[a, b]$ kompakt.*

Nach Satz 3.1.3) genügt es nämlich, Überdeckungen aus Basismengen zu testen, und als Basis der Topologie auf $\mathbf{R}$ können wir alle offenen Intervalle $]c, d[$ nehmen. Angenommen, unser Intervall $[a, b]$ sei in der Vereinigung der $]c_i, d_i[$, $i \in I$, enthalten. Eines dieser offenen Intervalle muss a enthalten, darum gibt es ein Supremum β aller $B > a$, für die sich das Intervall $[a, B]$, $B \leq b$, durch endlich viele unter den $]c_i, d_i[$ überdecken lässt. Klar: $\beta \leq b$ liegt auch in einem der $]c_i, d_i[$, dabei ist $c_i < \beta$, man könnte also dieses Intervall zu der endlichen Menge hinzunehmen und das Supremum noch weiter nach oben verlegen im Widerspruch zur Definition, wenn nicht sowieso $\beta = b$ ist und das ganze Intervall in einer endlichen Vereinigung der offenen $]c_i, d_i[$ liegt.

Satz 3.3 *Kompakte Untermengen von Hausdorffräumen sind abgeschlossen.*

Hier in Hausdorffräumen ist also Satz 3.1.2) umkehrbar, und das wird sich noch als sehr praktisch erweisen! Zum *Beweis* sei K ein Kompaktum in einem Hausdorffraum, x bezeichne stets einen Punkt von K und y einen Punkt in $X \backslash K$. Wegen „Hausdorff" gibt es offene trennende Umgebungen $U(x)$ und $V_x(y)$. Wird y festgelassen, ist offenbar $\bigcup_{x \in K} U(x)$ eine offene Überdeckung von K, somit genügen endlich viele: Es gibt demnach $x_1, \ldots, x_n \in K$ mit

$$K \subset \bigcup_1^n U(x_i) \quad \Rightarrow \quad y \in \bigcap_1^n V_{x_i}(y) \text{ offen } \subset X \backslash K\,,$$

jedes $y \notin K$ hat also eine Umgebung, die K nicht trifft; damit ist das Komplement von K offen und K selbst abgeschlossen. $\square$

Satz 3.4 (Heine–Borel) *In der üblichen Topologie des $\mathbf{R}^n$ ist eine Menge K genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis. Sei K kompakt, dann ist K abgeschlossen, s.o. Wäre K unbeschränkt, dann gäbe es eine offene Überdeckung durch die (euklidischen) Kugeln $K(0,n)$, $n \in \mathbf{N}$, für die keine endliche Teilüberdeckung ausreichend wäre, Widerspruch.
Nun sei umgekehrt K abgeschlossen und beschränkt. Dann ist K abgeschlossene Teilmenge eines genügend großen Produkts $[-M,+M]^n$ abgeschlossener Intervalle. Aus Beispiel 3.1 wissen wir, dass diese Intervalle kompakt sind, und aus Satz 3.1.5), dass das Produkt kompakt ist. Als abgeschlossene Untermenge eines Kompaktums ist darum auch K kompakt. □

Damit haben wir ein griffiges Kriterium für Kompaktheit. Eine weitere unerfreuliche Lücke lässt sich ebenfalls schließen: Wir hatten in den Bemerkungen zu Satz 2.1 bereits angekündigt, dass stetige Bijektionen keineswegs stetig umkehrbar sein müssen; jetzt lässt sich erstens ein einfaches und natürliches Beispiel dazu angeben, nämlich die Bijektion

$$[0,2\pi[\to \{x \in \mathbf{R}^2 \mid ||x|| = 1\} \quad : \varphi \mapsto (\cos\varphi, \sin\varphi)$$

eines halboffenen Intervalls (nicht kompakt!) auf die Kreislinie des Einheitskreises. Diese ist kompakt, die beiden Räume können also nicht homöomorph sein; in der Tat ist die Umkehrabbildung im Punkt $(1,0)$ unstetig. Durch eine kleine Verschärfung der Voraussetzungen kann man nun aber zweitens dafür sorgen, dass bijektive stetige Abbildungen in beiden Richtungen stetig werden:

Satz 3.5 *Sei $f : K \to Y$ stetige und bijektive Abbildung von Hausdorffräumen, dabei K kompakt. Dann ist auch die Umkehrabbildung f^{-1} stetig, f also ein Homöomorphismus.*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass f–Bilder offener Mengen offen sind; da f bijektiv ist, mag man zum Komplement übergehen und zeigen, dass Bilder abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen sind. Nun sind aber abgeschlossene Mengen in K kompakt (Satz 3.1.2), ihre stetigen Bilder ebenso (Satz 3.1.4), folglich abgeschlossen (Satz 3.3). □

Noch eine angenehme Folge aus dem Satz von Heine–Borel und dem Satz 3.1.4 ist ein alter Bekannter aus der Analysis:

Satz 3.6 *Stetige Funktionen $f : K \to \mathbf{R}$ auf kompakten Räumen K sind beschränkt und nehmen ihr Maximum und ihr Minimum an.* □

3.4 Kompaktifizierung

Kompaktheit ist praktisch, und oft lohnt es sich, einen Hausdorffraum in einen größeren einzubetten, wenn dieser dafür den Vorteil bietet, kompakt zu sein. Es gibt dafür raffinierte Möglichkeiten; wir diskutieren hier nur eine recht einfache Methode, der jede(r) zumindest in der Funktionentheorie beim Übergang von der Gauss'schen Zahlenebene zur *Riemannschen Zahlenkugel* einmal begegnen sollte. Das Verfahren funktioniert unter einer kleinen Extra–Voraussetzung:

Definition 3.4 *Ein Hausdorffraum X heißt* **lokalkompakt***, wenn jeder Punkt eine* **Umgebungsbasis** *aus kompakten Mengen besitzt, will sagen: Für alle $x \in X$ und alle Umgebungen $U = U(x)$ gibt eine kompakte Umgebung $K(x) \subset U$.*

Satz 3.7 (Alexandroff) *Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum. Dann gibt es einen kompakten Raum $\overline{X}$ und darin einen Punkt ∞ , so dass $\overline{X} \setminus \{\infty\}$ homöomorph zu X ist. Durch diese Eigenschaften ist $\overline{X}$ eindeutig bestimmt bis auf Homöomorphie.*

$\overline{X}$ heißt auch die **Ein–Punkt–Kompaktifizierung**, denn man darf sich vorstellen, dass $\overline{X}$ aus X durch Hinzunahme des einen neuen Punktes ∞ entsteht.
Genau so wird $\overline{X}$ auch konstruiert, nämlich als $X \cup \{\infty\}$ mit einem „neuen" Punkt $\infty \notin X$. Die offenen Mengen dieser Kompaktifizierung sind außer $\overline{X}$ selbst 1. die offenen Mengen $O \subset X$ der alten Topologie, 2. alle $O_K := \overline{X} \setminus K$, wobei K ein beliebiges Kompaktum in X bezeichnet. Nun ist natürlich einiges nachzuweisen.
a) Diese offenen Mengen bilden zusammen eine Topologie auf $\overline{X}$. Das ist einfach durch Fallunterscheidungen nach den beiden Typen offener Mengen nachzuweisen; man beachte, dass die Vereinigung endlich vieler Kompakta in X wieder kompakt ist und dass beliebige Durchschnitte von Kompakta wieder kompakt sind, weil abgeschlossene Untermengen von Kompakta, und ebenso Durchschnitte von Kompakta und abgeschlossenen Mengen.
(Durchschnitte über eine leere Indexmenge sind dabei allerdings auszuschließen, da diese deinitionsgemäßden Gesamtraum X ergeben!)
Ebenso wichtig: Die $O_K \cap X$ sind auch offen in X , weil X hausdorffsch und somit K abgeschlossen ist.
b) $\overline{X}$ wird dabei zum Hausdorffraum. Dass man Punkte $x \neq y \in X$ durch offene Umgebungen trennen kann, gelingt schon mit offenen Mengen vom Typ 1. Wie findet man disjunkte Umgebungen von $x \in X$ und ∞ ? Man nehme eine kompakte Umgebung $K = K(x)$ (gibt es, weil X lokalkompakt), darin eine offene Umgebung $U(x)$, und als offene Umgebung von ∞ einfach $\overline{X} \setminus K$.
c) $\overline{X}$ ist kompakt: Jede offene Überdeckung überdeckt auch ∞, enthält also eine offene Menge O_K vom Typ 2. Dann fehlt zur offenen Überdeckung von $\overline{X}$ nur noch die Überdeckung von K , und dazu genügt wegen der Kompaktheit bereits eine endliche Teilüberdeckung.
d) X ist homöomorph zu $\overline{X} \setminus \{\infty\}$ nach Konstruktion; man beachte wieder, dass auch die $O_K \cap X$ offen in X sind.
e) Eindeutigkeit bis auf Homöomorphie: Auf X ist der Homöomorphismus schon nach Voraussetzung gegeben, auf den einzigen fehlenden Punkt kann man ihn nur auf eine Weise fortsetzen, und das liefert bereits eine Bijektion. In jeder Konstruktion von $\overline{X}$ muss es außer den offenen Mengen vom Typ 1 noch jene vom Typ 2 geben, weil alle Kompakta abgeschlossen sind; und weil der Homöomorphismus auf X Kompakta in Kompakta überführt, bildet die konstruierte Bijektion auch die offenen Mengen vom Typ 2 aufeinander ab, wird also auf ganz $\overline{X}$ zum Homöomorphismus. □

4 Konvergenz und Vollständigkeit

4.1 Limites und Häufungspunkte

Definition 4.1 *Sei $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine Folge von Punkten in einem topologischen Raum X. Der Punkt $x := \lim_{n\to\infty} x_n$ heißt* **Limes** *oder* **Grenzwert** *der Folge, wenn in jeder Umgebung $U = U(x)$ fast alle, d.h. alle bis auf endlich viele Folgenglieder liegen. Existiert ein solcher Grenzwert, heißt die Folge* **konvergent***. x heißt* **Häufungspunkt** *der Folge, wenn in jeder Umgebung von x unendlich viele Folgenglieder liegen.*

Klar, dass jeder Limes ein Häufungspunkt ist. Aus der Analysis sind Beispiele wohlbekannt, allerdings sollte man aus den Erfahrungen in $\mathbf{R}$ nicht vorschnell auf allgemeinere Räume schließen. Was für zusätzliche Voraussetzungen nötig sein können, um vertraute Sätze wiederzufinden, mag die folgende Aussage zeigen.

Satz 4.1 *Wenn X ein Hausdorffraum ist, besitzt eine konvergente Folge höchstens einen Grenzwert.* □

Schon das Beispiel $X = \mathbf{Q}$ der rationalen Zahlen zeigt, dass selbst beschränkte Folgen keinen Häufungspunkt besitzen müssen: Man nehme etwa die Folge x_n der endlichen Anfänge (bis zur n–ten Stelle nach dem Komma) der Dezimalbruchentwicklung von $\sqrt{2}$, ein eindeutig bestimmter Grenzwert existiert zwar in $\mathbf{R}$, aber eben nicht in $\mathbf{Q}$. Was macht den Unterschied aus?

4.2 Cauchyfolgen. Vollständigkeit

Definition 4.2 *Sei $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum (X, d). Sie heißt* **Cauchyfolge***, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbf{N}$ existiert, so dass für alle $n, m \geq N$ gilt: $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.*

Anschaulich heißt das ebenso wie in der Analysis I, dass die Folge mit wachsenden Indizes immer ,,dichter" wird. Und genauso wie dort zeigt man auch in allgemeinen metrischen Räumen, dass konvergente Folgen Cauchyfolgen sind. Da alle metrischen Räume hausdorffsch sind, kann es für Cauchyfolgen auch nur einen Häufungspunkt = Grenzwert geben — wenn es einen gibt.

Definition 4.3 *Ein metrischer Raum heißt* **vollständig***, wenn in ihm jede Cauchyfolge konvergiert.*

4.3 Vervollständigung

Genau wie man den *nicht vollständigen* Körper $\mathbf{Q}$ zum vollständigen Körper $\mathbf{R}$ erweitert, kann man jeden metrischen Raum in einen vollständigen metrischen Raum einbetten. Bei den Zahlbereichserweiterungen gibt es dafür verschiedene Verfahren (Dezimalbrüche, Dedekindsche Schnitte, Intervallschachtelungen); für die allgemeinen metrischen Räume eignet sich allerdings nur eines, nämlich die Betrachtung von Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen.

Satz 4.2 *Zu jedem metrischen Raum* (X, d) *gibt es eine* **Vervollständigung** $(\widetilde{X}, D)$, *d.h.*

- *einen vollständigen metrischen Raum* $\widetilde{X}$,
- *der* X *als Unterraum enthält,*
- *dessen Metrik* D, *restringiert auf* X, *gerade* d *ergibt,*
- *in dem jede Cauchyfolge konvergiert,*
- *und der in folgendem Sinn ,,kleinstmöglich" ist: Er besteht genau aus den Limites der Cauchyfolgen aus* X.

Beweis. 1. Auf der Menge C aller Cauchyfolgen aus X führt man folgende Äquivalenzrelation ein:

$$(x_n) \sim (y_n) \quad \Leftrightarrow \quad lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$$

X lässt sich in C als Menge der konstanten Folgen vermöge der Vorschrift $x \mapsto (x_n)_n$, alle $x_n = x$, einbetten. Dabei werden $x \neq y$ auf inäquivalente Cauchyfolgen abgebildet.
2. Als Punktmenge definiert man nun $\widetilde{X}$ als die Menge der Äquivalenzklassen aus C. Die unter 1. definierte Einbettung definiert darum eine injektive Abbildung $X \to \widetilde{X}$.
3. Nun ist die Metrik D einzuführen. Seien dazu zwei Punkte durch (x_n) und (y_n) repräsentiert, dann soll der Abstand ihrer Äquivalenzklassen $D([x_n], [y_n]) := \lim d(x_n, y_n)$ sein. Damit dieses eine Metrik wird, ist verschiedenes nachzuweisen:
4. Die reelle Folge $(d(x_n, y_n))_n$ konvergiert, denn sie ist eine Cauchyfolge wegen der Dreiecksungleichungen in $\mathbf{R}$ und X:

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| = |d(x_n, y_n) - d(x_n, y_m) + d(x_n, y_m) - d(x_m, y_m)| \leq d(y_n, y_m) + d(x_n, x_m)$$

5. Ihr Limes hängt nur von der Äquivalenzklasse ab, d.h. für $(x_n) \sim (x'_n)$ ist $d(x_n, y_n) - d(x'_n, y_n)$ eine Nullfolge (und entsprechend natürlich auch für Äquivalenz der y–Folge), weil wieder nach der Dreiecksungleichung $|d(x_n, y_n) - d(x'_n, y_n)| \leq d(x_n, x'_n)$.
6. D ist eine Metrik. Z.B. ist $D([x_n], [y_n]) = 0$ nach Definition nur für $(x_n) \sim (y_n)$, wenn also die Äquivalenzklassen übereinstimmen. Symmetrie und Dreiecksungleichung für D folgen durch Limesbildung direkt aus den gleichen Eigenschaften für d.
7. Auf X, d.h. auf den Äquivalenzklassen der konstanten Folgen $(x)_n$ stimmen D und d überein.
8. Vollständigkeit von $\widetilde{X}$: Hierzu ist eine Vorüberlegung zweckmäßig: Man kann in jeder Äquivalenzklasse ,,schnell verdichtende" Repräsentanten finden — etwa durch Auswahl einer Teilfolge mit der Eigenschaft $d(x_n, x_m) < N^{-1}$ für alle $n, m \geq N$. Das wollen wir im Folgenden voraussetzen. Wenn nun eine Folge $([x_{in}])_{i\in\mathbf{N}}$ von Äquivalenzklassen in $\widetilde{X}$ gegeben ist, die im Sinne der D–Metrik eine Cauchyfolge ist, dann heißt das: Für alle $\varepsilon > 0$ und alle $i, j > M = M(\varepsilon)$ ist

$$D([x_{in}], [x_{jn}]) < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} d(x_{in}, x_{jn}) < \varepsilon\ .$$

Wie bereits erwähnt, können Cauchyfolgen ohnehin höchstens einen Häufungspunkt haben, darum dürfen wir zu Teilfolgen übergehen, die sehr schnell ,,verdichten" in dem Sinne, dass $D([x_{in}],[x_{jn}]) < N^{-1}$ für alle $i,j \geq N$, also $d(x_{in},x_{jn}) < 2N^{-1}$ für alle genügend großen n.
9. Daraus folgt per Dreiecksungleichung, dass die ,,Diagonalfolge" $(x_{ii})_{i\in\mathbf{N}}$ selbst eine Cauchyfolge ist, denn für alle $i,j \geq N$ und genügend große n erhalten wir

$$d(x_{ii},x_{jj}) \leq d(x_{ii},x_{in}) + d(x_{in},x_{jn}) + d(x_{jn},x_{jj}) \leq \frac{4}{N}\,.$$

10. Nun lautet die Behauptung: Die Cauchyfolge aller $([x_{in}])_{i\in\mathbf{N}}$ konvergiert im Sinne der D–Metrik auf $\widetilde{X}$ gegen die Äquivalenzklasse der Diagonalfolge $(x_{nn})_{n\in\mathbf{N}}$. Das bedeutet $\lim_{i\to\infty} D([x_{in}],[x_{nn}]) = 0$, und das ist erfüllt, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ und alle genügend großen i der $\lim_{n\to\infty} d(x_{in},x_{nn}) < \varepsilon$ ist. Auch das folgt mit der Dreiecksungleichung, Punkt 9. des Beweises und unseren Annahmen aus

$$d(x_{in},x_{nn}) \leq d(x_{in},x_{ii}) + d(x_{ii},x_{nn})\,.$$

11. Dass $\widetilde{X}$ aus den Limites von Cauchyfolgen in X besteht, ist dabei nebenbei klar geworden, denn das sind genau die eben konstruierten Diagonalfolgen. □

Die letzte Eigenschaft lässt sich auch so formulieren, dass $\widetilde{X}$ gerade die abgeschlossene Hülle des in ihn eingebetteten Raumes X ist. In der Tat: Wenn X Teilmenge eines vollständigen metrischen Raums ist, ergibt die Vervollständigung nichts anderes als $\overline{X}$.

4.4 Banachräume

Definition 4.4 *Sei V ebenso wie in Definition 1.2 ein normierter $\mathbf{R}$– oder $\mathbf{C}$–Vektorraum. Er wird* **Banachraum** *genannt, wenn er bezüglich der von der Norm induzierten Metrik vollständig ist.*

Beispiel 4.1 *Sei $\emptyset \neq K \subset \mathbf{R}$ kompakt und V der Vektorraum der stetigen beschränkten reellen (oder komplexen) Funktionen auf K, versehen mit der* **Supremumsnorm**

$$|f|_s \;:=\; \sup_K |f(x)|\,.$$

Dann ist V ein Banachraum, denn Cauchyfolgen bezüglich der Supremumsnorm sind gleichmäßig konvergent auf K und haben darum auch stetige Grenzfunktionen. Diese sind, weil stetig auf einem Kompaktum, außerdem beschränkt und gehören darum wieder zu V.

Wie praktisch der Begriff für die Analysis ist, mag man sich anhand des Fixpunktsatzes von Banach ausmalen:

Satz 4.3 *Sei* $F : V \to V$ *eine* **kontrahierende Abbildung** *auf dem Banachraum* V *, d.h. es existiere eine Konstante* $k < 1$ *, so dass für alle* $x, y \in V$

$$||F(x) - F(y)|| \leq k||x - y|| \; .$$

Dann besitzt F genau einen **Fixpunkt***, d.h. ein* $v \in V$ *mit* $F(v) = v$ *.*

Der *Beweis* der Eindeutigkeit ist sehr einfach: Gäbe es zwei Fixpunkte v, w , dann wäre

$$||v - w|| = ||F(v) - F(w)|| \leq k||v - w|| \; ,$$

was nur für $v = w$ möglich ist. Die Existenz folgt durch die iterative Konstruktion einer Cauchyfolge: Sei $x_1 \in V$ beliebig gewählt und $x_{n+1} := F(x_n)$ für alle $n \in \mathbf{N}$, dann ist

$$||x_{n+1} - x_n|| = ||F(x_n) - F(x_{n-1})|| \leq k||x_n - x_{n-1}|| \leq k^2||x_{n-1} - x_{n-2}|| \leq \; \ldots$$

mit Limes 0 für $n \to \infty$, für alle $n > m$ also

$$||x_{n+1} - x_m|| \leq ||x_{n+1} - x_n|| + ||x_n - x_{n-1}|| + \ldots + ||x_{m+1} - x_m|| \leq$$

$$\leq ||x_{m+1} - x_m|| \, (1 + k + k^2 + \ldots k^{n-m}) \leq ||x_{m+1} - x_m|| \, \frac{1}{1-k} \; .$$

Für hinreichend großes m wird dies beliebig klein, wir haben also eine Cauchyfolge mit Limes v (Vollständigkeit!), und nun ist $F(v) = v$ — warum? □

4.5 Hilberträume

Die prominentesten Beispiele von Banachräumen erhält man aus der folgenden

Definition 4.5 *Sei* V *ein* $\mathbf{C}$*–Vektorraum mit einer* **Hermiteschen Form** *(auch* **Skalarprodukt** *genannt, Verallgemeinerung des Skalarprodukts in den euklidischen* $\mathbf{R}$*–Vektorräumen)* $\langle \quad , \quad \rangle : V \times V \to \mathbf{C}$ *mit den folgenden Eigenschaften:*

- $\langle v, w \rangle$ *ist linear in* v *für alle* $w \in V$ *,*
- $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ *(komplex konjugiert) für alle* $v, w \in V$ *(insbesondere also* $\langle v, v \rangle \in \mathbf{R}$ *für alle* v *),*
- $\langle v, v \rangle > 0$ *für alle* $v \neq 0$ *(natürlich* $= 0$ *für* $v = 0$ *wegen der Linearität).*

V *wird dann* **unitärer Raum** *genannt, und* $||v|| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ *definiert eine Norm auf* V *. Ist* V *bezüglich dieser Norm bzw. der dadurch induzierten Metrik vollständig, heißt* V *ein* **Hilbertraum***.*

Beispiel 4.2 *Endlichdimensionale unitäre Räume sind immer Hilberträume. Man kann* $\mathbf{C}^n$ *mit der Definition*

$$\langle\,(a_1,\ldots,a_n),(b_1,\ldots,b_n)\,\rangle := \sum_{i=1}^{n} a_i\overline{b_i}$$

zum unitären und sogar zum Hilbertraum machen. Man mache sich klar, dass $||(z_1,\ldots,z_n)||^2 = \sum |z_i|^2$ *ist und dass Folgen darum genau dann Cauchyfolgen sind, wenn sie in jeder Komponente Cauchyfolgen sind.*

Das Beispiel lässt sich auf unendlichdimensionale Hilberträume verallgemeinern:

Beispiel 4.3 V *sei der* $\mathbf{C}$*–Vektorraum der quadratsummierbaren Folgen* $(z_1, z_2, \ldots)$ *mit der Eigenschaft* $||(z_n)_{n\in\mathbf{N}}||^2 := \sum_n |z_n|^2 < \infty$ *und der Hermiteschen Form*

$$\langle\,(a_1,a_2,\ldots),(b_1,b_2,\ldots)\,\rangle := \sum_{i=1}^{\infty} a_i\overline{b_i}\ .$$

Dann ist V *ein Hilbertraum.*

Natürlich ist hier einiges zu zeigen: Zunächst ist die Hermitesche Form wohldefiniert, weil die Summation auf eine konvergente unendliche Reihe führt — z.B. via Grenzübergang $n \to \infty$ mit der n–dimensionalen Cauchy–Schwarz'schen Ungleichung $|\langle a,b\rangle|^2 \leq ||a||^2||b||^2$ — und natürlich die Vollständigkeit, am besten auch wieder durch Betrachtung der Komponentenfolgen.

5 Zusammenhang

5.1 Zusammenhängende Räume

Definition 5.1 *Ein topologischer Raum* X *heißt* **zusammenhängend***, wenn es nicht möglich ist,* X *als disjunkte Vereinigung von zwei nichtleeren offenen Teilmengen zu schreiben.*

Beispiel 5.1 *Die rationalen Zahlen* $\mathbf{Q}$ *sind kein zusammenhängender topologischer Raum, denn sie sind die disjunkte Vereinigung der beiden offenen Teilmengen*

$$\{x \in \mathbf{Q} \mid x^2 < 2\} \quad \text{und} \quad \{x \in \mathbf{Q} \mid x^2 > 2\}\ .$$

Genauso ist z.B. der Teilraum $X := [0,1] \cup [2,3] \subset \mathbf{R}$ nicht zusammenhängend, weil disjunkte Vereinigung der beiden Teilintervalle, und diese sind offen in X: Man beachte, dass man hier mit der Relativtopologie arbeiten muss, und in dieser ist z.B. $[0,1]$ offen, weil Durchschnitt von X mit dem offenen Intervall $]-1,\frac{3}{2}[$.
Dies alles ist natürlich in der gewöhnlichen Topologie von $\mathbf{R}$ zu verstehen. In exotischeren

Topologien muss man Extra–Überlegungen anstellen: Ein diskreter topologischer Raum (Beispiel 2.1) ist nur dann zusammenhängend, wenn er weniger als zwei Punkte enthält, in der trivialen gröbsten Topologie (Beispiel 2.2) ist jedes X zusammenhängend. Kehren wir lieber wieder zur gewöhnlichen Topologie auf $\mathbf{R}$ zurück, um endlich nichttriviale Beispiele zusammenhängender Räume zu finden:

Satz 5.1 *Intervalle in* $\mathbf{R}$ *sind zusammenhängend.*

Beweis. Sei X das offene Intervall $]a,b[$, $a < b$, (für abgeschlossene oder halboffene Intervalle geht der Beweis entsprechend). Angenommen, X wäre disjunkte Vereinigung der beiden nichtleeren offenen Untermengen U und V. Dann gibt es $u \in U$, $v \in V$, o.B.d.A. mit $u < v$, also auch ein Infimum $\inf\{x \in V \mid u < x\} =: s$, das nach Definition des Infimums in jeder Umgebung sowohl Punkte aus U wie aus V enthält. Wegen $s \in X$ muss es zu einer der beiden Mengen gehören, diese kann dann aber nicht offen sein, Widerspruch. □

Wenn wir die leere Menge, einpunktige Mengen, ganz $\mathbf{R}$ und Halbgeraden zu den Intervallen hinzurechnen, gilt auch die Umkehrung:

Satz 5.2 *Zusammenhängende Untermengen* X *von* $\mathbf{R}$ *sind Intervalle.*

Andernfalls gibt es nämlich $a < b < c \in \mathbf{R}$, $a, c \in X$, $b \notin X$, und die Punktmengen $< b$ bzw. $> b$ liefern genau eine disjunkte Zerlegung von X in zwei nichtleere offene Teilmengen. □

Zum Schluss dieses Abschnitts noch eine manchmal nützliche und evidente Umformulierung des Begriffs:

Satz 5.3 *Der topologische Raum* X *ist zusammenhängend genau denn, wenn* X *und* $\emptyset$ *die einzigen Untermengen sind, welche gleichzeitig offen und abgeschlossen sind.* □

5.2 Zusammenhang und Stetigkeit

Satz 5.4 *Sei* $f : X \to Y$ *stetige Abbildung eines zusammenhängenden topologischen Raums in einen anderen topologischen Raum* Y. *Dann ist die Bildmenge* $f(X)$ *ebenfalls zusammenhängend.*

Beweis. Andernfalls gäbe es zwei offene Mengen $U, V \subset Y$ mit $f(X) \subset U \cup V$ und $U \cap V \cap f(X) = \emptyset$, aber $U \cap f(X)$, $V \cap f(X) \neq \emptyset$. Dann wäre $f^{-1}U \cup f^{-1}V$ eine disjunkte Zerlegung von X in nichtleere offene Mengen (f stetig!) im Widerspruch zum Zusammenhang von X. □

Daraus folgt mit Satz 5.1 und 5.2 ein alter Bekannter aus der Analysis I, der *Zwischenwertsatz.*

Satz 5.5 *Sei* $f : I \to \mathbf{R}$ *stetige Funktion auf einem reellen Intervall* I. *Zu je zwei Argumenten* $a, b \in I$ *und jedem Wert* y *zwischen* $f(a)$ *und* $f(b)$ *gibt es ein* x *zwischen* a *und* b *(Randpunkte jeweils zugelassen), so dass* $f(x) = y$. □

5.3 Wegzusammenhang

Aus Satz 5.1 folgt ferner, dass alle stetigen Bilder von Intervallen zusammenhängend sind, wichtiges Hilfsmittel für einen wichtigen Spezialfall von Zusammenhang.

Definition 5.2 *Der topologische Raum X heißt* **wegzusammenhängend**, *wenn je zwei Punkte in X durch einen* **Weg** *verbunden werden können, genauer: Für alle $a, b \in X$ gibt es eine stetige Abbildung $f : [0,1] \to X$ mit $f(0) = a$ und $f(1) = b$.*

Satz 5.6 *Wegzusammenhängende Räume sind zusammenhängend.*

Beweis. Angenommen, der wegzusammenhängende Raum X wäre nicht zusammenhängend. Dann gäbe es eine nichttriviale Zerlegung von X in disjunkte offene U, V; man wähle $a \in U$ und $b \in V$, dazu einen Weg in X von a nach b, also eine stetige Abbildung $f : [0,1] \to X$ mit $f(0) = a$ und $f(1) = b$. Dann wäre $f^{-1}U \cup f^{-1}V$ eine disjunkte Zerlegung des Intervalls $[0,1]$ in offene nichtleere Untermengen, Widerspruch. □

Beispiel 5.2 *Im $\mathbf{R}^n$ sind alle konvexen Untermengen zusammenhängend, ebenso alle sternförmigen Untermengen, d.h. alle X mit einem „Zentrum" z, so dass alle $x \in X$ mit z durch eine Strecke in X verbunden werden können.*

Natürlich muss eine wegzusammenhängende Menge im $\mathbf{R}^n$ nicht unbedingt konvex oder sternförmig sein, der (auch mehrfach) „gelochte" Raum $\mathbf{R}^n$, $n > 1$, d.h. nach Entfernen von einzelnen Punkten, ist immer noch wegzusammenhängend: Die Wege muss man nur um die „Löcher" herumführen.

Klar, dass Zusammenhang unter Homöomorphismen erhalten bleibt. Das erlaubt uns, endlich den schon erwähnten folgenden sehr anschaulichen Sachverhalt zu beweisen.

Satz 5.7 $\mathbf{R}$ *und* $\mathbf{R}^2$ *sind nicht homöomorph.*

(Gemeint ist selbstredend die gewöhnliche Topologie.) *Beweis.* Gäbe es einen Homöomorphismus $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, dann bliebe das auch ein Homöomorphismus, wenn man aus $\mathbf{R}$ einen Punkt und aus $\mathbf{R}^2$ seinen Bildpunkt entfernt. Dann wäre aber das Urbild unzusammenhängend und das Bild zusammenhängend, Widerspruch. □

Für die Analysis wichtig ist eine teilweise Umkehrung von Satz 5.6:

Satz 5.8 *Offene zusammenhängende Mengen $X \neq \emptyset$ im $\mathbf{R}^n$ sind wegzusammenhängend.*

Zum *Beweis* genügt es, zu einem festen Ausgangspunkt $a \in X$ und jedem $b \in X$ einen Weg von a nach b zu konstruieren, der innerhalb von X verläuft. Sei $U \subset X$ die Menge aller b, für die so ein Weg existiert, dann ist U nichtleer ($a \in U$, konstanter Weg $f \equiv a$) und offen: Sei $K(b, r) \subset X$ (gibt es, weil X offen) eine z.B. euklidische Kugel um b, dann gibt es natürlich von b aus zu jedem $b' \in K(b, r)$ eine Strecke, die ganz in K verläuft, und um die man den Weg von a nach b einfach verlängern muss; also gilt $K \subset U$, somit ist

U offen. Die gleich Schlussweise kann man auch auf das Komplement $X \setminus U$ anwenden: Zu jedem c in diesem Komplement gibt es *keinen* Weg von a nach c, aber eine offene Kugel $K(c,r) \subset X$, und auch die Punkte $c' \in K(c,r)$ können nicht zu U gehören, sonst könnte man einen Weg von a nach c' durch eine Strecke von c' nach c zu einem Weg von a nach c verlängern. Somit wäre $X = U \cup (X \setminus U)$ eine disjunkte Zerlegung in offene Mengen; wegen des Zusammenhangs von X kann diese nur trivial sein, also $U = X$. □

Für allgemeinere Untermengen des $\mathbf{R}^n$ ist nicht so ohne weiteres Zusammenhang = Wegzusammenhang, wie der ,,SIERPINSKI–Kamm" zeigt.

Beispiel 5.3 *Sei* $X := \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \quad (x = 0$ *und* $0 < y \leq 1)$ *oder* $(x = \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}$ *und* $0 \leq y \leq 1)$ *oder* $(0 < x \leq 1$ *und* $y = 0) \}$.
Dann ist X *zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.*

Die in der zweiten Zeile beschriebene Untermenge ist nämlich wegzusammenhängend, also auch zusammenhängend. Allerdings ist das Komplement nicht offen, denn jeder Punkt $(0,y)$ der ersten Zeile besitzt in jeder noch so kleinen Umgebung Punkte der zweiten Zeile, somit hat X keine disjunkte Zerlegung in nichtleere offene Teilmengen. Andererseits müsste jeder Weg $f : [0,1] \to X$, $f(t) = (f_x(t), f_y(t))$, der z.B. die Punkte $(1,0)$ und $(0,1)$ verbindet, wegen Stetigkeit (auch der Komponentenfunktionen) durch die Punkte $(\varepsilon, 0)$ verlaufen mit beliebig kleinen irrationalen ε. Als stetige Abbildung des Kompaktums $[0,1]$ hätte f ein kompaktes ($\Rightarrow$ abgeschlossenes) Bild, also müsste dann auch $(0,0)$ zum Bild von f gehören, und dieser Punkt gehört nicht zu X, Widerspruch.

6 Homotopie

6.1 Stetige Deformation von Wegen

Definition 6.1 *Seien durch die beiden Abbildungen* f_0, $f_1 : [0,1] \to X$ *zwei Wege mit gleichem Anfangspunkt* $f_0(0) = f_1(0) = a$ *und gleichem Endpunkt* $f_0(1) = f_1(1) = b$ *gegeben. Sie heißen* **homotop** *zueinander, geschrieben* $f_0 \sim f_1$, *wenn sie in* X *stetig ineinander deformiert werden können, genauer: wenn eine stetige*
Homotopie $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ *existiert mit den Eigenschaften*

$$H(0,t) = f_0(t)\ ,\ H(1,t) = f_1(t)\ ,\ H(s,0) \equiv a\ , H(s,1) \equiv b \quad \textit{für alle} \quad s,t \in [0,1]\ .$$

Man sollte sich dabei vorstellen, dass für festes s die Abbildung $f_s := H(s, \quad) : [0,1] \to X$ einen Weg zwischen a und b definiert und dass die Wege f_s den Weg f_0 stetig in f_1 deformieren. Vielfältige Verallgemeinerungen dieses Begriffs sind denkbar; man braucht sich nicht auf Wege beschränken, man muss nicht unbedingt die Endpunkte bei der Deformation festhalten u.s.w., wir wollen uns aber mit diesem bescheidenen Spezialfall begnügen.— Die Schreibweise suggeriert, dass es sich bei der Homotopie von Wegen um eine Äquivalenzrelation handelt; so ist es auch: Als Beispiel machen wir uns die Transitivität klar.

Seien f, g, h Wege in X von a nach b, dabei $f \sim g$, $g \sim h$. Es gibt also Homotopien $H, G : [0,1]^2 \to X$ mit den Eigenschaften

$$H(0,t) = f(t)\,,\; H(1,t) = g(t) = G(0,t) \quad \text{und} \quad G(1,t) = h(t)$$

und natürlich $H(s,0) = G(s,0) = a$, $H(s,1) = G(s,1) = b$. Wir definieren eine Homotopie $F : [0,1]^2 \to X$ zwischen f und h durch „Zusammensetzen"

$$F(s,t) := H(2s,t) \quad \text{für} \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad F(s,t) := G(2s-1,t) \quad \text{für} \quad \frac{1}{2} \leq s \leq 1\,.$$

Man überzeuge sich, dass die Definitionen an der Schnittstelle $s = 1/2$ übereinstimmen und dass alle deformierten Wege zwischen a und b verlaufen!

Beispiel 6.1 *Je zwei Wege f, g zwischen a und b im $X = \mathbf{R}^n$ sind homotop, man definiere die Homotopie einfach durch Ausnutzen der Konvexität als*

$$H(s,t) \;:=\; (1-s)\,f(t) \;+\; s\,g(t)\,.$$

Aus dem gleichen Grund haben alle konvexen Untermengen des $\mathbf{R}^n$ diese Eigenschaft, ja sogar alle sternförmigen Untermengen: In diesem Fall führe man per Homotopie zunächst alle Wege in die Zusammensetzung von zwei Strecken von a zum Mittelpunkt und vom Mittelpunkt nach b über.

Topologische Räume mit dieser Eigenschaft haben u.a. für die Analysis sehr nützliche Eigenschaften und verdienen darum einen eigenen Namen.

Definition 6.2 *Ein topologischer Raum X heißt* **einfach zusammenhängend***, wenn er zusammenhängend ist und je zwei Wege zwischen beliebigen Punkten $a, b \in X$ homotop sind.*

Beispiele für wegzusammenhängende, aber nicht einfach zusammenhängende Räume sind etwa die Kreislinie $||x|| = 1$ im $\mathbf{R}^2$ oder der „gelochte" $\mathbf{R}^2$, aus dem man also einzelne Punkte entfernt hat, oder der Torus aus Beispiel 2.7. Dass diese Räume nicht einfach zusammenhängend sind, ist zwar anschaulich sehr plausibel, aber erst mit etwas mehr Maschinerie leicht zu beweisen. Wir kommen darauf zurück.

6.2 Die Fundamentalgruppe

Im Folgenden sei X stets ein wegzusammenhängender topologischer Raum und $x_0 \in X$ fest gewählt. Wie oben erwähnt, ist die Homotopie eine Äquivalenzrelation, darum dürfen wir definieren:

Definition 6.3 *$\pi_1(X, x_0)$ sei die Menge der Äquivalenzklassen geschlossener Wege in X mit Anfangs– und Endpunkt x_0. Sie wird die* **Fundamentalgruppe** *von X (zum Basispunkt x_0) genannt.*

Was soll hier die Gruppenoperation sein? Wir können zwei geschlossene Wege f, g nacheinander durchlaufen vermöge der gleichen Idee, die wir schon beim Zusammensetzen von Homotopien verwendet haben: Der zusammengesetzte Weg $h := fg : [0,1] \to X$ entsteht durch

$$h(t) := g(2s) \quad \text{für} \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad := f(2s-1) \quad \text{für} \quad \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \ ,$$

und wenn man f und g durch homotope Wege ersetzt, wird auch die Zusammensetzung homotop zu fg, man erhält also eine wohldefinierte Operation auf den Homotopieklassen der geschlossenen Wege.

Satz 6.1 *Die Zusammensetzung von Wegen definiert eine Gruppenstruktur auf $\pi_1(X, x_0)$. Bei anderer Wahl des Anfangspunkts entsteht eine dazu isomorphe Gruppe.*

Die Assoziativität der Produktbildung ist klar; zum *Beweis* fehlen noch neutrales Element und Konstruktion des Inversen. Als Einselement nehme man die Homotopieklasse des konstanten Wegs $e(t) \equiv x_0$, und als Inverses für den Weg f dient der umgekehrt durchlaufene Weg $f^{-1} : [0,1] \to X : t \mapsto f(1-t)$ (nicht verwechseln mit der inversen Abbildung!). Die Zusammensetzung $f^{-1}f$ ist nämlich homotop zum konstanten Weg e vermöge der Homotopie

$$H(s,t) := f(2st) \quad \text{für} \quad t \leq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad := f(2s(1-t)) \quad \text{für} \quad t \geq \frac{1}{2} \ .$$

Dass sich die Fundamentalgruppe nur um einen Isomorphismus ändert, wenn man den Basispunkt ändert, kann man folgendermaßen einsehen: Sei etwa w ein Weg von x_1 nach x_0, dann induziert die Wege–Abbildung $f \to w^{-1}fw$ einen Isomorphismus

$$\pi_1(x_0, X) \to \pi_1(x_1, X) \ . \ \square$$

Man beachte allerdings, dass dieser Isomorphismus von der Wahl von w abhängt — zumindest von seiner Homotopieklasse — und dass er deswegen nicht eindeutig bestimmt ist. Wenn es nur auf die Fundamentalgruppe bis auf Isomorphie ankommt, macht das natürlich nichts aus; in diesem Fall wird die Angabe des Basispunkts häufig weggelassen.

Man überlegt sich leicht, dass zwei wegzusammenhängende homöomorphe Räume isomorphe Fundamentalgruppen besitzen (die Umkehrung gilt nicht!), dass also die Fundamentalgruppen eine wichtige **algebraische Invariante** für die Topologie sind.— Die Fundamentalgruppe ist offenbar dann die triviale Gruppe, wenn man jeden geschlossenen Weg homotop auf den Basispunkt zusammenziehen kann. Äquivalent dazu ist die Eigenschaft, dass man je zwei Wege zwischen zwei Punkten a und b homotop ineinander deformieren kann, denn man kann den einen als Rückweg des anderen benutzen in einem insgesamt geschlossenen und dann zusammenziehbaren Weg. Fazit:

Satz 6.2 *Ein wegzusammenhängender topologischer Raum X ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn seine Fundamentalgruppe $\pi_1(X) = \{e\}$ ist.* $\square$