

Geometrie

für L3 und Bachelor, SoSe 2008, überarbeitet für das SoSe 2017

JÜRGEN WOLFART

Literatur: Die Bücher von Bröcker und Fischer über Lineare Algebra und Analytische Geometrie, zur Geometrie im engeren Sinn das Skriptum von Jakob Stix, die Bücher von Scheid/Schwarz, Knörrer, Agricola/Friedrich und das Buch über Projektive Geometrie von Beutelspacher/Rosenbaum.

Die Herstellung der Bilder verdanke ich Claudia Baden, die Erstellung der Urfassung Cristina Sarti.

1 Euklidische Vektorräume

Definition 1.1 V sei ein K -Vektorraum. $B : V \times V \rightarrow K$ heißt „Bilinearform“ auf V , wenn für alle $v, w \in V$ die beiden Abbildungen

$$V \rightarrow K : x \mapsto B(x, v) \quad \text{und} \quad y \mapsto B(w, y)$$

linear sind. B heißt „symmetrisch“, wenn $B(x, y) = B(y, x)$ für alle $x, y \in V$.

Beispiele sind alle Abbildungen $V \times V : (x, y) \mapsto f(x)g(y)$, wenn f und g „Linearformen“ auf V sind, d.h. lineare Abbildungen von V nach K . Klar: mit $f = g$ erhält man eine symmetrische Bilinearform. Genau wie bei linearen Abbildungen zwischen Vektorräumen sind auch Bilinearformen eindeutig bestimmt durch ihre Werte $a_{ij} = B(e_i, e_j)$ auf einer Basis $\{e_i\}$ von V . i durchläuft dabei je nach Dimension eine endliche oder unendliche Indexmenge. Bei endlicher Dimension n fassen wir die a_{ij} wie üblich zu einer Matrix $A \in K^{n \times n}$ zusammen, identifizieren $y = y_1e_1 + \dots + y_n e_n$ mit dem Spaltenvektor aus seinen Koordinaten, $x = x_1e_1 + \dots + x_n e_n$ mit dem Zeilenvektor x^T seiner Koordinaten, dann schreibt sich die Bilinearform einfach als

$$B(x, y) = x^T A y .$$

Umgekehrt definiert jede $n \times n$ -Matrix mit Koeffizienten im Körper K in dieser Weise eine Bilinearform auf K^n . Symmetrisch ist diese Bilinearform genau dann, wenn die Matrix $A = A^T$ erfüllt, also symmetrisch ist.

Der für uns vorerst wichtigste Spezialfall sind die „Skalarprodukte“:

Definition 1.2 Ein \mathbf{R} -Vektorraum V heißt „euklidisch“, wenn er mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ versehen ist, das ist eine symmetrische Bilinearform auf V , die außerdem „positiv definit“ ist, d.h.

$$\langle x, x \rangle > 0$$

erfüllt für alle $x \in V$ außer für $x = 0$ (für den Nullvektor ist wegen der Linearität $\langle 0, 0 \rangle = 0$). Die (euklidische) „Länge“ von $x \in V$ ist dann definiert als die nicht-negative Wurzel in

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Beispiele sind alle Vektorräume \mathbf{R}^n mit dem „Standard-Skalarprodukt“

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n,$$

wenn die x_i, y_i die Koordinaten bezüglich der Standard-Einheitsvektoren bezeichnen. Unendlichdimensionale euklidische Vektorräume spielen in der (Funktional-)Analysis eine wichtige Rolle: Sei etwa V der Vektorraum $\mathbf{R}[t]$ aller Polynome in der Variablen t , versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle p, q \rangle := \int_0^1 p(t)q(t)dt.$$

Wir werden uns in der Geometrie auf die endlichen Dimensionen beschränken. Aus der elementaren Trigonometrie in der Schule dürfte bekannt sein, dass man aus der Längen- auch eine Winkelmessung ableiten kann, und das ist für euklidische Vektorräume allgemein richtig:

Definition 1.3 Seien $x, y \neq 0$ im euklidischen Vektorraum V . Der Winkel $\alpha \in [0, \pi]$ zwischen x und y ist dann bestimmt durch

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

Insbesondere heißen x, y „orthogonal“, geschrieben $x \perp y$, wenn $\langle x, y \rangle = 0$.

Diese Definition ist nur vernünftig, wenn der Quotient immer im Intervall $[-1, +1]$ liegt. In der Tat:

Satz 1.1 (Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung) Für alle x, y im euklidischen Vektorraum V gilt

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Beweis. Für $x = 0$ ist die Ungleichung trivial. Sei also $x \neq 0$; man betrachte für $t \in \mathbf{R}$

$$0 \leq \|tx - y\|^2 = \langle tx - y, tx - y \rangle = t^2\|x\|^2 - 2t\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

und schreibe die rechte Seite um in

$$\left(t\|x\| - \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|}\right)^2 + \|y\|^2 - \left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|}\right)^2.$$

Dieser Ausdruck nimmt für $t = \langle x, y \rangle / \|x\|^2$ sein Minimum an, und zwar den Wert

$$\|y\|^2 - \left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|} \right)^2, \quad \text{es ist also} \quad \langle x, y \rangle^2 \leq (\|x\| \cdot \|y\|)^2. \quad \square$$

Nebenbei folgt daraus die wohlbekannte **Dreiecksungleichung**:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \text{für alle} \quad x, y \in V,$$

denn

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 - 2(\|x\| \cdot \|y\| - \langle x, y \rangle) \leq (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Endlich-dimensionale euklidische Vektorräume kann man im wesentlichen identifizieren mit dem \mathbf{R}^n , versehen mit dem Standard-Skalarprodukt. Dazu muss man sie mit einer geeigneten Basis versehen:

Definition 1.4 $\mathcal{B} \subset V$ heißt „Orthonormalbasis“ des euklidischen Vektorraums V , wenn es sich um eine Basis von V handelt mit der zusätzlichen Eigenschaft

$$\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij} \quad \text{für alle} \quad b_i, b_j \in \mathcal{B}.$$

δ_{ij} bezeichnet hier wie üblich das Kroneckersymbol; gemeint ist also, dass alle b_i die Länge 1 haben und paarweise orthogonal sind. Eine solche Orthonormalbasis hat den Charme, dass vermöge der Bilinearität

$$x = \sum x_i b_i, \quad y = \sum y_j b_j \quad \Rightarrow \quad \langle x, y \rangle = \sum x_i y_i,$$

sich das Skalarprodukt bezüglich der Koordinaten wie das Standard-Skalarprodukt verhält. Kann man immer eine solche Orthonormalbasis finden? Dieses Problem wird im \mathbf{R}^n induktiv durch das *Orthogonalisierungsverfahren* von GRAM – SCHMIDT gelöst: Wenn man mit einer beliebigen Basis c_1, \dots, c_n beginnt und ersetzt c_1 durch $b_1 := \frac{1}{\|c_1\|} c_1$, normiert also den ersten Basisvektor auf die Länge 1, dann ersetzt man c_2 durch $c_2 - \langle c_2, b_1 \rangle b_1$; man überzeuge sich, dass dieser Vektor senkrecht auf b_1 steht und mit b_1 und den c_3, \dots, c_n immer noch eine Basis des \mathbf{R}^n bildet, dann normiert man ihn wieder auf Länge 1 und hat so b_2 erhalten. Hat man so (Induktionsannahme) bereits eine Basis $b_1, \dots, b_{k-1}, c_k, \dots, c_n$ mit orthonormalen b_1, \dots, b_{k-1} erhalten, ersetzt man c_k durch $c_k - \sum_{i < k} \langle c_k, b_i \rangle b_i$ (die Summe ist die Projektion von c_k auf den vorher schon behandelten Unterraum), normiert diesen Vektor auf die Länge 1 und erhält so b_k .

Aus der Elementargeometrie ist bekannt, wie wichtig Abbildungen sind, welche die euklidische Struktur (Längen, Winkel) erhalten; man denke hier z.B. an Drehungen, Spiegelungen, Translationen. Deswegen der folgende neue Begriff:

Definition 1.5 Eine lineare Abbildung f eines euklidischen Vektorraums V in sich heißt „orthogonale Transformation“, wenn das zugehörige Skalarprodukt invariant unter f ist, d.h. wenn für alle $x, y \in V$

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

gilt. Ist $V = \mathbf{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt versehen und wird f bezüglich der Standardbasis durch die Matrix $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ beschrieben, dann heißt die Matrix A „orthogonal“.

Klar: Mit dem Skalarprodukt bleiben automatisch auch alle Längen und Winkel unter f invariant. (In §3 werden wir sehen, dass umgekehrt aus $\|f(x)\| = \|x\| \forall x \in V$ bereits die Linearität und erst recht die Orthogonalität von f folgen.) Ferner ist f injektiv (warum?), und Orthonormalbasen endlich-dimensionaler V werden auf Orthonormalbasen abgebildet. In diesem Fall ist f also auch umkehrbar, orthogonale Matrizen also invertierbar. Woran erkennt man orthogonale Matrizen?

Satz 1.2 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ist genau dann orthogonal, wenn $A^T A = E$ die Einheitsmatrix ist.

Beweis (samt einigen nützlichen Ergänzungen). Bekanntlich sind die Spalten von A die f -Bilder der Einheitsvektoren, bilden also eine neue Orthonormalbasis a_1, \dots, a_n , erfüllen darum $\langle a_i, a_j \rangle = \delta_{ij}$ für alle i, j . Man lese nun einfach dieses Standard-Skalarprodukt als das Matrixprodukt des Zeilenvektors a_i^T mit dem Spaltenvektor a_j , dann hat man genau die Aussage $A^T A = E$ des Satzes. Umgekehrt: Wenn die lineare Abbildung f durch eine Matrix A mit $A^T A = E$ gegeben ist, dann gilt für beliebige Spaltenvektoren x, y und das Standard-Skalarprodukt

$$\langle Ay, Ax \rangle = (Ay)^T Ax = y^T A^T Ax = y^T Ex = \langle y, x \rangle,$$

A ist also orthogonal.

Die Eigenschaft lässt sich also auch als $A^T = A^{-1}$ formulieren; da A^{-1} ebenfalls eine orthogonale Transformation beschreibt, sind nicht nur die Spalten, sondern auch die Zeilen von A eine Orthonormalbasis des \mathbf{R}^n . Wegen $\det(A) = \det(A^T)$ folgt daraus außerdem $\det(A) = \pm 1$. \square

(Einzige) **Beispiele** in Dimension 2 sind Drehungen und Spiegelungen

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

mit Determinante 1 bzw. -1 ; man überzeuge sich davon, dass im ersten Fall α den Drehwinkel angibt und im zweiten Fall $\alpha/2$ den Winkel der Spiegelungsgeraden zur ersten Koordinatenachse.

(Reelle) Eigenwerte von orthogonalen Matrizen können nur ± 1 sein (warum?). Im \mathbf{R}^2 haben Drehungen keine Eigenwerte, ausgenommen wenn $\alpha \in \mathbf{Z}\pi$, Spiegelungen immer die zwei Eigenwerte ± 1 . Anders im \mathbf{R}^3 : Weil kubische reelle Polynome immer eine Nullstelle haben,

muss eine orthogonale Matrix A dort immer einen Eigenvektor d_1 besitzen. Normalisiert man diesen Eigenvektor auf Länge 1 und ergänzt ihn nach Gram-Schmidt zu einer neuen Orthonormalbasis $d_1, d_2, d_3 \in \mathbf{R}^3$, so operiert A auf dem von d_2, d_3 erzeugten und zu d_1 orthogonalen 2-dimensionalen euklidischen Raum wie oben als Spiegelung oder Drehung. In dieser neuen Basis schreibt sich A also in Kästchenform, z.B. als

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

wenn d_1 Eigenvektor zum Eigenwert -1 ist und A auf dem dazu orthogonalen 2-dimensionalen Raum als Drehung operiert. A ist also eine Drehung um die von d_1 erzeugte Achse, kombiniert mit einer Spiegelung an einer dazu senkrechten Ebene.

Da das Produkt zweier orthogonaler Matrizen wieder orthogonale Matrix ist, ebenso die Inversen orthogonaler Matrizen, ist das ein guter Moment für eine **Erinnerung** an den **Gruppenbegriff**. Eine „Gruppe“ G ist eine Menge G mit einer binären Verknüpfung

$$G \times G \rightarrow G : (a, b) \mapsto a \cdot b,$$

welche den folgenden Axiomen genügt:

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ für alle $a, b, c \in G$ (Assoziativgesetz)

$\exists e \in G$, so dass $a \cdot e = a \forall a \in G$ (Existenz des neutralen Elements)

$\forall a \in G \exists a^{-1} \in G$, so dass $a \cdot a^{-1} = e$ (Existenz des Inversen)

Man kann daraus ableiten, dass e und a^{-1} eindeutig bestimmt sind und jeweils auch $e \cdot a = a$ bzw. $a^{-1} \cdot a = e$ erfüllen. Wenn außerdem

$a \cdot b = b \cdot a \forall a, b \in G$ (Kommutativgesetz)

richtig ist, heißt G eine „kommutative“ oder „abelsche Gruppe“. In diesem Fall wird die Verknüpfung oft als „Addition“ und mit „+“ bezeichnet, das zu a inverse Element mit „ $-a$ “ und das neutrale Element mit „ 0 “. Bei multiplikativ geschriebenen Gruppen wird e oft als „ 1 “ geschrieben und der Multiplikationspunkt weggelassen.

Vertraute Beispiele kommutativer Gruppen sind alle Körper K oder K -Vektorräume oder Polynomringe $K[x]$ mit der Addition als Verknüpfung, aber auch die Menge \mathbf{Z} der ganzen Zahlen oder (multiplikativ geschrieben!) die multiplikativen Gruppen K^* (Körper ohne 0) der Körper. Typische nicht-kommutative Gruppen bilden die Bijektionen von $\{1, 2, \dots, n\}$ auf sich, also die Permutationsgruppen S_n für $n > 2$, oder ebenso für $n > 1$ die multiplikativen Gruppen $GL(n, K)$ aller invertierbaren $n \times n$ -Matrizen mit Koeffizienten in K .

Der Begriff „Untergruppe“ ist eigentlich selbsterklärend. Ineinander geschachtelte additive Gruppen sind z.B. $\mathbf{C} \supset \mathbf{R} \supset \mathbf{Q} \supset \mathbf{Z}$, Untergruppe von $GL(n, K)$ ist z.B. die „spezielle lineare Gruppe“ $SL(n, K)$ der Matrizen mit Determinante 1. Eine weitere interessante Untergruppe haben wir hier kennengelernt, die „orthogonale Gruppe“ O_n der orthogonalen Matrizen in $GL(n, \mathbf{R})$, die wiederum die „spezielle orthogonale Gruppe“ $SO_n := O_n \cap SL(n, \mathbf{R})$ als Untergruppe enthält, im Fall $n = 2$ also die (hier sogar kommutative) Drehgruppe.

Zu jeder Untergruppe U der Gruppe G gehört eine Äquivalenzrelation auf G

$$a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad ab^{-1} \in U \quad \Leftrightarrow \quad a \in Ub ,$$

durch die G in Äquivalenzklassen aufgeteilt wird, den „Rechtsrestklassen“ Ub . Ein Beispiel aus der linearen Algebra kommt hier in den Sinn: Für Untervektorräume U von Vektorräumen V bilden die Restklassen $U + b$ (hier natürlich additiv geschrieben) selbst wieder einen Vektorraum, den „Faktorraum“ V/U . Bei Gruppen ist die Situation komplizierter: Die Menge G/U aller Restklassen Ub ist genau dann wieder eine Gruppe – mit der naheliegenden Verknüpfung $Ub \cdot Uc := Ubc$ –, wenn jede Rechtsrestklasse gleichzeitig Linksrestklasse ist, d.h. wenn für alle $b \in G$

$$Ub = bU \quad \text{oder, anders gesagt, wenn} \quad b^{-1}Ub = U$$

gilt. In diesem Fall heißt U „Normalteiler“ in G . Klar, dass Untergruppen abelscher Gruppen immer Normalteiler sind. Ein anderes Beispiel ist $\text{SL}(2, K) \subset \text{GL}(2, K)$, dagegen ist O_2 kein Normalteiler in $\text{GL}(2, \mathbf{R})$.

2 Affine und euklidische Punkträume

Definition 2.1 Ein „affiner Punktraum“ $\mathbf{A}(\mathbf{R}^n)$ ist als Punktmenge $\{\text{Punkte}\} = \mathbf{R}^n$, affine Unterräume sind von der Form $U = P + L$, wobei $P \in \mathbf{R}^n$ Punkt auf U ist und L Untervektorraum des \mathbf{R}^n . Anders gesagt sind affine Unterräume also additive Restklassen von Untergruppen $L \subset (\mathbf{R}^n, +)$. U und U' heißen „parallel“, wenn sie zu Untervektorräumen $L = L'$ gehören (oder allgemeiner $L \subset L'$ bzw. $L \supset L'$). Insbesondere: U ist eine „Gerade“ in $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{R}^n)$, wenn $\dim L = 1$, „Ebene“ für $\dim L = 2$, „Hyperebene“ für $\dim L = n - 1$.

Soweit kann man affine Räume für beliebige Körper anstelle von \mathbf{R} einführen, nicht aber „Strecken“ $\overline{PQ} := P + \{x(Q - P) \mid x \in [0, 1]\} = \{xQ + yP \mid x, y \geq 0, x + y = 1\}$ (für $P \neq Q$), „Halbgeraden“ oder „konvexe Mengen“. Der \mathbf{R}^n beherbergt außerdem eine zusätzliche Struktur:

Definition 2.2 Der „euklidische Punktraum“ $\mathbf{E}(\mathbf{R}^n)$ ist als Punktraum identisch mit $\mathbf{A}(\mathbf{R}^n)$, zusätzlich aber mit Längen- und Winkelmessung: Wir fassen den \mathbf{R}^n auf als euklidischen Vektorraum, also mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, euklidischem Abstand

$$d(P, Q) := \|Q - P\| := \sqrt{\langle Q - P, Q - P \rangle} ,$$

Orthogonalität von Unterräumen

$$U \perp U' \Leftrightarrow \langle u, u' \rangle = 0 \quad \forall u \in L, u' \in L' ,$$

wo L und L' die zu U und U' gehörigen Unter(vektor)räume sind, Winkel

$$\angle(PQR) := \angle(P - Q, R - Q) := \arccos \left(\frac{\langle P - Q, R - Q \rangle}{\|P - Q\| \cdot \|R - Q\|} \right)$$

(natürlich nur für $P \neq Q \neq R$).

Anwendungen in der Elementargeometrie: 1. Winkel zwischen Diagonalen des Würfels. Zweckmäßigerweise verwendet man hier das Standard-Skalarprodukt und legt sich den Würfel in eine komfortable Lage mit Ecken $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Die Diagonalen verbinden gegenüberliegende Ecken e und $-e$ (0 ist der Mittelpunkt). Der Winkel α zwischen irgend zwei Diagonalen erfüllt also

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle e, e' \rangle}{\|e\| \cdot \|e'\|} = \frac{\pm 1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \pm \frac{1}{3}.$$

2. Entsprechend: Winkel zwischen den Diagonalen des vierdimensionalen Würfels. Hier hat man 16 Eckpunkte $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$, die acht inneren Diagonalen — die sich also in 0 schneiden — verbinden jeweils e mit $-e$, dabei sind alle $\|e\| = 2$. Die Berechnung des Schnittwinkels führt bis aufs Vorzeichen auf zwei typische Möglichkeiten

$$\langle e, e' \rangle = \langle (1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, -1) \rangle = 2 \quad \text{oder} \quad \langle (1, 1, 1, 1), (1, 1, -1, -1) \rangle = 0.$$

Die Winkel zwischen den Diagonalen sind also $\pi/2$ (wenn $\cos = 0$) oder $\pi/3$ (wenn $\cos = \pm \frac{1}{2}$).

3. Der Satz vom Höhenschnittpunkt im Dreieck. Der Schnittpunkt H der Höhenlinien h_a und h_c sei o.B.d.A. der Nullpunkt 0 , dann sind

$$\langle A, B - C \rangle = 0 = \langle C, A - B \rangle.$$

Mit Bilinearität und Symmetrie folgt daraus

$$\langle A, B \rangle = \langle B, C \rangle = \langle C, A \rangle, \quad \text{also auch} \quad \langle B, A - C \rangle = 0,$$

und das heißt: H liegt auch auf der Höhenlinie h_b .

4. Der Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck ABC mit Hypotenuse \overline{AB} : Sei 0 der Fußpunkt der Höhe auf der Hypotenuse. Die Höhe habe die Länge h , dann ist also $h^2 = \|C\|^2$ und

$$A \perp C \perp B \quad \Leftrightarrow \quad \langle A, C \rangle = 0 = \langle B, C \rangle.$$

Da das Dreieck in C einen rechten Winkel hat, haben wir außerdem

$$\langle A - C, B - C \rangle = 0, \quad \text{also} \quad \langle A, B \rangle + \|C\|^2 = 0.$$

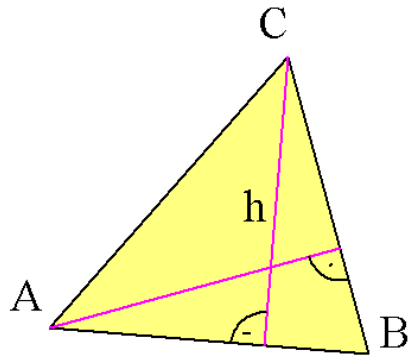


Abbildung 1: Höhenschnittpunkt

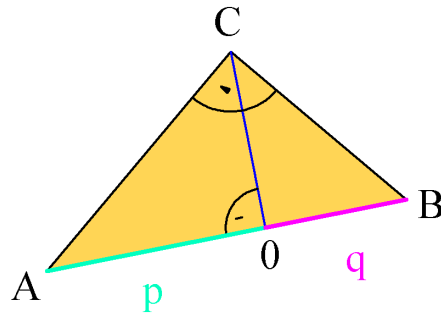


Abbildung 2: Höhensatz

Als Vektoren zeigen A und B in entgegengesetzte Richtungen und haben die Längen p bzw. q (Hypotenusenabschnitte). Dann ist die letzte Gleichung die gewohnte Form des Höhensatzes $h^2 = pq$.

Dieser Beweis ist strenggenommen eine Mogelpackung: Der Höhensatz ist äquivalent zum Satz des Pythagoras, und bei einer elementargeometrischen Interpretation des Standard-Skalarprodukts steckt man den Pythagoras bereits in die Definition hinein!

Satz 2.1 Eine Gerade in der euklidischen Ebene $\mathbf{E}(\mathbf{R}^2)$ bzw. eine Ebene im euklidischen Raum $\mathbf{E}(\mathbf{R}^3)$ mit Standard-Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wird stets beschrieben durch eine lineare Gleichung $\langle a, x \rangle = d$ mit einem $a \in \mathbf{R}^2$ bzw. \mathbf{R}^3 , $a \neq 0$. O.B.d.A. darf man $\|a\| = 1$ annehmen, dann heißt die Gleichung „HESSEsche Normalform“ der Geraden- bzw. Ebenengleichung. In der Hesseschen Normalform bedeutet $|d|$ den Abstand zum Nullpunkt, und für alle $Q \in \mathbf{R}^2$ bzw. \mathbf{R}^3 ist $|\langle a, Q \rangle - d|$ der Abstand von Q zur Geraden bzw. zur Ebene.

Beweis. $\langle a, x \rangle = 0$ beschreibt die Parallele durch den Nullpunkt, darum steht a senkrecht auf der Geraden g bzw. der Ebene. Der Punkt P auf g mit dem kürzesten Abstand zu 0

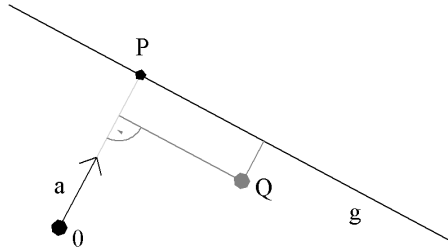


Abbildung 3: Hesse'sche Normalform

ist aber $\pm da$, denn jeder andere Punkt auf g ist von der Form $P + x$ mit $\langle a, x \rangle = 0$, also

$$\|P + x\|^2 = d^2\|a\|^2 + \|x\|^2 \pm 2d\langle a, x \rangle = d^2 + \|x\|^2 \geq d^2$$

mit „ $=$ “ nur für $x = 0$, also ist $|d|$ der Abstand zu 0 (für Ebenen geht's genauso).

Für jedes Q ist $\langle a, x \rangle = \langle a, Q \rangle$ die Gleichung der Parallelen zu $\langle a, x \rangle = d$ durch den Punkt Q , darum ist $\langle a, Q \rangle - d$ die Differenz der beiden Abstände zum Nullpunkt. \square

3 Bewegungsgruppen und Abbildungsgeometrie

Problem: Welche Bijektionen $f : \mathbf{E}(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{R}^n)$ erhalten euklidische Längen und Winkel? Klar: alle Translationen

$$t = t_v : P \mapsto P + v \quad (v \in \mathbf{R}^n).$$

Diese bilden eine kommutative Gruppe T , isomorph zur additiven Gruppe \mathbf{R}^n (Beliebte Motivation zur Einführung von Vektoren in der Linearen Algebra).

Definition 3.1 Die Längen-erhaltenden Bijektionen $f : \mathbf{E} := \mathbf{E}(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{R}^n)$ nennen wir „euklidische Bewegungen“. Bezüglich Hintereinanderausführung bilden sie offenbar eine Gruppe $\text{Aut } \mathbf{E} \supset T$.

Zur Beschreibung der Gesamtheit aller euklidischen Bewegungen empfiehlt sich der Begriffsapparat der Gruppentheorie: Die Gruppe G heißt „direktes Produkt“ der Gruppen U und N , geschrieben $G = U \times N$, wenn die Verknüpfung in G komponentenweise aus den Verknüpfungen in U und N ergibt. Beide kann man als Untergruppen von G ansehen – bestehend aus den Elementen $(u, 1)$ bzw. $(1, n)$ –, die sogar

- elementweise miteinander kommutieren,
- $U \cap N = \{e\}$ erfüllen
- sowie $UN = G$; jedes $g \in G$ besitzt also eine eindeutige Darstellung als Produkt un mit $u \in U$ und $n \in N$.

Verzichtet man nun auf die erste dieser drei Eigenschaften und verlangt nur, dass N ein Normalteiler von G ist, also $unu^{-1} \in N$ erfüllt für alle $u \in U, n \in N$, dann nennt man G ein „semidirektes Produkt“ von U und N und schreibt es als $U \rtimes N$.

Satz 3.1 *Aut \mathbf{E} ist das semidirekte Produkt $O_n \rtimes T$ aus dem Normalteiler T und der orthogonalen Gruppe O_n des euklidischen Vektorraums \mathbf{R}^n (mit Standard-Skalarprodukt).*

Beweis. 1. $\text{Aut } \mathbf{E}$ enthält außer T auch noch O_n als Untergruppe, denn alle $M \in O_n \subset \text{GL}_n \mathbf{R}$ erfüllen $\|M(v)\| = \|v\|$, also

$$d(M(P), M(Q)) = \|M(P) - M(Q)\| = \|M(P - Q)\| = \|P - Q\|$$

für alle Punktepaare P, Q . Anschaulich beschreibt O_n die Untergruppe der Bewegungen mit Fixpunkt 0 .

2. $\text{Aut } \mathbf{E} \subset O_n \cdot T$: Sei f eine euklidische Bewegung mit $f(P) = 0$ und wähle dazu die Translation $t = t_{-P}$ mit $t^{-1} = t_P : 0 \mapsto P$, dann wird $g := f \circ t^{-1} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ eine Vektorraum-Bijektion mit $\|g(u)\| = \|u\|$ für alle $u \in \mathbf{R}^n$. Daraus folgt bereits

3. $g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ erfüllt auch $\langle g(u), g(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ und die Linearität, also $g \in O_n$. Grund: Das Skalarprodukt ist durch die euklidischen Längen bereits eindeutig bestimmt, denn (nachrechnen!)

$$2\langle u, v \rangle = \|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2 = \|g(u + v)\|^2 - \|g(u)\|^2 - \|g(v)\|^2 = 2\langle g(u), g(v) \rangle \Rightarrow$$

g führt jede Orthonormalbasis v_1, \dots, v_n des \mathbf{R}^n in eine Orthonormalbasis über. Fehlt nur noch die Linearität: Für eine Orthonormalbasis sind die Koordinaten $\xi_i \in \mathbf{R}$ von $x = \sum \xi_i v_i$ bestimmt durch $\xi_i = \langle x, v_i \rangle$, also ist

$$g(x) = \sum \langle g(x), g(v_i) \rangle g(v_i) \quad \text{mit} \quad \langle g(x), g(v_i) \rangle = \langle x, v_i \rangle = \xi_i \Rightarrow$$

g linear.

4. Dass $O_n \cap T = \{\text{id}\}$ ist, sieht man an der Wirkung auf den Nullpunkt. Also sind in der Zerlegung $f = g \circ t \in \text{Aut } \mathbf{E}$ die Translation t und die orthogonale Abbildung g eindeutig bestimmt, als Menge ist darum $\text{Aut } \mathbf{E} = O_n \times T$; aber Vorsicht: Es gilt **nicht** $g_1 t_1 g_2 t_2 = g_1 g_2 t_1 t_2$, es handelt sich also nicht um ein *direktes Produkt* von Gruppen.

5. Immerhin ist die Untergruppe T aber ein *Normalteiler* von $\text{Aut } \mathbf{E}$, und das bedeutet

$$fTf^{-1} = T \quad \text{für alle} \quad f \in \text{Aut } \mathbf{E}.$$

Begründung: Sei $t' : P \mapsto P + v'$ für alle P , dann ist für alle $g \in O_n$ und alle Punkte Q

$$gt'g^{-1}(Q) = gt'(g^{-1}(Q)) = g(g^{-1}(Q) + v') = Q + g(v'),$$

somit auch $gt'g^{-1}$ wieder eine Translation, nur eben um $g(v')$, nicht um v' . Da sich jedes f als gt schreiben lässt mit $g \in O_n, t \in T$ und T kommutativ ist, gilt

$$ft'f^{-1} = gtt't^{-1}g^{-1} = gt'g^{-1} \in T,$$

also haben wir die Normalteilereigenschaft $fTf^{-1} = T$ und zusammen mit den anderen Punkten des Beweises die Behauptung des Satzes. \square

Aus §1 wissen wir noch:

$$M \in O_2 \text{ Drehung, wenn } M = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \in SO_2$$

(Eigenwerte $e^{i\varphi}, e^{-i\varphi} \in \mathbf{C}$),

$$M \in O_2 \text{ Spiegelung, wenn } M = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} \in O_2 \setminus SO_2$$

(Eigenwerte $+1, -1$).

Definition. $f \in \text{Aut } \mathbf{E}$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{R}^2)$ heißt *Drehung*, wenn $t \in T$ und $g \in SO_2$ existieren mit $f = tgt^{-1}$, m.a.W. wenn man vermöge einer Translation t den Nullpunkt des Koordinatensystems so legen kann, dass $f \in SO_2$. Entsprechend heißt f *Spiegelung*, wenn $t \in T$ und $g \in O_2 \setminus SO_2$ so existieren, dass $f = tgt^{-1}$.

Satz 3.2 *In der euklidischen Ebene wird $\text{Aut } \mathbf{E}$ von Spiegelungen erzeugt, genauer: jedes $f \in \text{Aut } \mathbf{E}$ ist Produkt von höchstens drei Spiegelungen — sogar von höchstens zwei, wenn f orientierungserhaltend ist.*

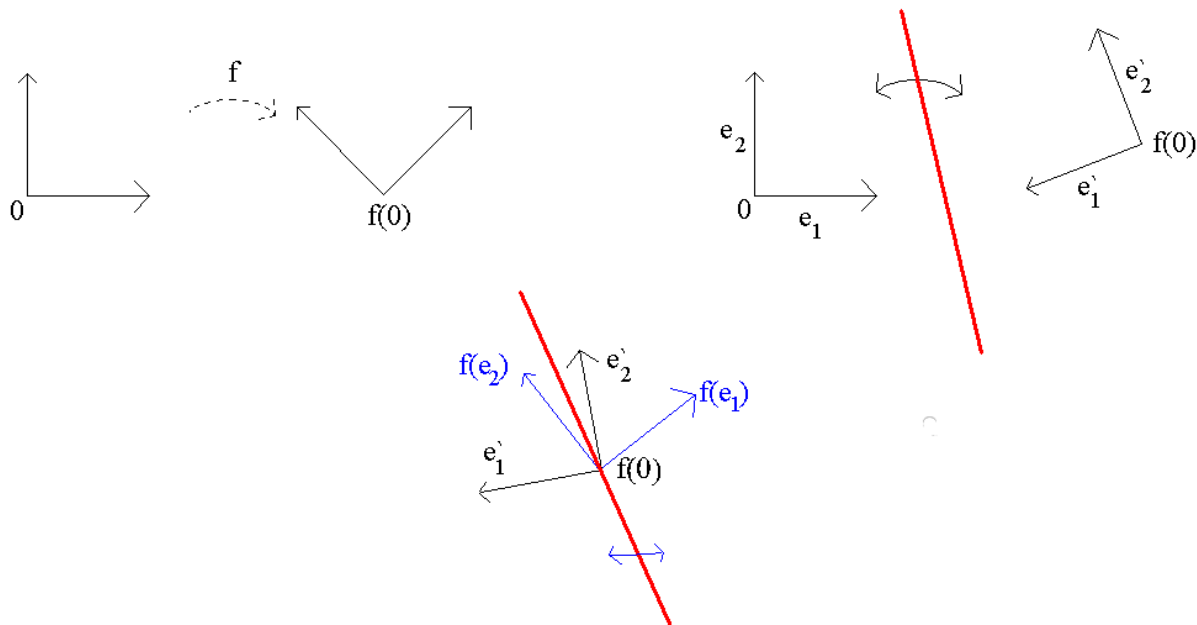


Abbildung 4: Dreispiegelungssatz

Beweis. f wird eindeutig bestimmt durch seine Wirkung auf 0 und ein Orthonormalsystem. Rezept: Man spiegele die Ebene zunächst an der Mittelsenkrechten von 0 und $f(0)$, dann

wird das so abgebildete Orthonormalsystem e_1, e_2 durch eine oder zwei Spiegelungen an Geraden durch $f(0)$ in $f(e_1), f(e_2)$ übergeführt. \square

Wichtige Bemerkung. Hintereinanderausführung zweier Spiegelungen an zwei Geraden durch den Punkt A mit Schnittwinkel α ergibt eine Drehung mit Fixpunkt A und Drehwinkel 2α . Spiegelung an zwei parallelen Geraden mit Abstand d gibt eine Translation um einen Vektor v orthogonal zu den beiden Geraden und mit Länge $2d$.

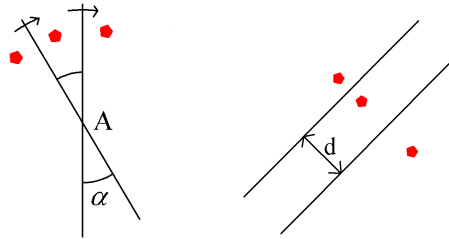


Abbildung 5:

Satz 3.3 Ebene Bewegungen f zerfallen in die folgenden Typen:

- a) Identität
- b) Translationen
- c) Drehungen
- d) Spiegelungen an Geraden
- e) Gleitspiegelungen (d.h. Kombination von einer Spiegelung an einer Geraden g und einer Translation um einen Vektor $v \neq 0$ parallel zu g)

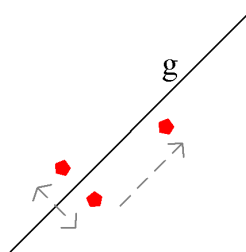


Abbildung 6: Gleitspiegelung

Beweis. Klar, dass diese Klassen von Bewegungen disjunkt sind. Die Klassifikation lässt sich nach Fixelementen folgendermaßen durchführen.

f lässt alle Punkte fest \Leftrightarrow a)

f lässt nur die Punkte einer Geraden fest \Leftrightarrow d)

f lässt die Geraden einer Parallelenschar fest, hat aber keine Fixpunkte \Leftrightarrow b)

f hat genau einen Fixpunkt \Leftrightarrow c)

f führt genau eine Gerade in sich über, hat aber keine Fixpunkte \Leftrightarrow e)

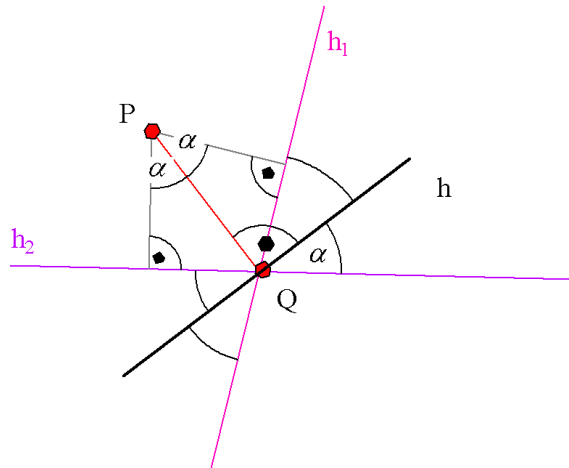


Abbildung 7:

Dass diese Äquivalenzen gelten, sieht man ein, wenn man bedenkt, dass Parallelität, Orthogonalität und Abstände unter f erhalten bleiben. \square

Bleibt zu zeigen, dass mindestens einer dieser Fälle eintritt. Dazu verwenden wir Satz 3.2 :

f ist Produkt von 0 Spiegelungen \Rightarrow a)

f ist Produkt von 1 Spiegelung \Rightarrow d)

f ist Produkt von 2 Spiegelungen \Rightarrow b) oder c)

Bleibt der Fall, dass f Produkt von drei Spiegelungen ist, o.B.d.A. an Geraden ohne gemeinsamen Punkt und nicht alle parallel zueinander. Dann kann man f als $f = \delta \circ s$ schreiben, wo s Spiegelung an einer Geraden h ist, δ Drehung um einen Punkt $P \notin h$ mit Drehwinkel 2α . Man kann zwei Geraden h_1, h_2 konstruieren mit der Eigenschaft

$$s(h_1) = h_2, \quad \delta(h_2) = h_1 \quad \Rightarrow \quad f(h_1) = h_1$$

(sie schneiden sich in einem Punkt $Q \in h$, dem Fußpunkt des Lots von P auf h , und schneiden beide die Gerade h unter dem Winkel α .) Wegen $f(Q) \neq Q$ ist aber zu sehen, dass f die Gerade h_1 nicht punktweise festlässt, genauer sogar keinen Fixpunkt auf h_1 hat. Da f nicht orientierungserhaltend ist, kommt „Translation“ nicht in Frage. Es bleibt also nur die Gleitspiegelung. \square

Warum ist das Studium von Abbildungen so wichtig? Ein erster Grund: Abbildungen und ihre Invarianten sind wichtige Werkzeuge für den Beweis elementargeometrischer Sätze. Ein kleines Beispiel dafür ist der folgende

Satz 3.4 (FERMAT) *Einem spitzwinkligen Dreieck ABC seien drei gleichseitige Dreiecke ABC' , ACB' , BCA' aufgesetzt. Dann schneiden sich die drei Verbindungsstrecken $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ in einem Punkt F unter dem Winkel $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$ und ihre Längen sind gleich.*

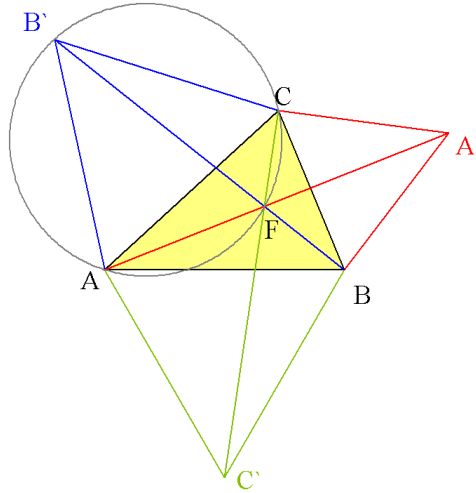


Abbildung 8: Sätze von Fermat und Napoléon

Beweis. Sei $F := AA' \cap BB'$. Eine $\pi/3$ -Drehung um den Punkt C bewirkt

$$B' \mapsto A, \quad B \mapsto A', \quad \overline{B'B} \mapsto \overline{AA'},$$

also sind die Längen gleich, außerdem $\angle B'FA = \angle A'FB = \pi/3$, und $\angle B'FA = \angle B'CA$ sind Peripheriewinkel eines Kreises über der Sehne $\overline{AB'}$. Für den gleichen Kreis ist auch $\angle B'FC$ Peripheriewinkel über der Sehne $\overline{B'C}$. Alle Winkel bei F sind somit $\pi/3$, also liegt F auch auf CC' . \square

Eine kleine Folgerung daraus ist

Satz 3.5 (NAPOLÉON) *Die Mittelpunkte der drei aufgesetzten Dreiecke ACB' , CBA' , ABC' bilden ein gleichseitiges Dreieck.*

Beweis. Mittelpunkte = Schwerpunkte = $\frac{1}{3}(A + C + B')$ bzw. $\frac{1}{3}(C + B + A')$ bzw. $\frac{1}{3}(A + B + C')$. Die Längenquadrate der Verbindungsstrecken sind darum

$$\frac{1}{9} \|A - A' - (B - B')\|^2 = \frac{1}{9} (\|A - A'\|^2 + \|B - B'\|^2 - 2\langle A - A', B - B' \rangle)$$

etc., nach Satz 3.4 also unabhängig von der Wahl der Verbindungsstrecke. \square

Über solche Beispiele hinaus haben Abbildungen und ihre Invarianten eine erhebliche systematische Bedeutung für den Aufbau der Geometrie. FELIX KLEIN hat in seinem *Erlanger Programm* sogar vorgeschlagen, Geometrie als die Wissenschaft von den Invarianten der verschiedenen möglichen Abbildungsgruppen zu betreiben. Davon mehr im letzten Kapitel der Vorlesung, einstweilen seien aber schon mal einige andere **wichtige Abbildungsgruppen** erwähnt, die auf dem \mathbf{R}^n operieren:

1) Die Gruppe $\mathbf{R}^*O_n \times T$ der *zentrischen Streckungen* auf \mathbf{E} , in der \mathbf{R}^* zu lesen ist als die

Matrizengruppe, welche aus den reellen Vielfachen $\neq 0$ der Einheitsmatrix besteht. Diese Matrizen kommutieren natürlich mit allen orthogonalen Matrizen und bewirken geometrisch Expansionen bzw. Kontraktionen der Ebene mit Zentrum (Fixpunkt) 0 , lassen auch alle Winkel fest; wichtig für alle Strahlensatz–Argumente!

2) *Volumenerhaltende Abbildungen* entstehen, wenn man O_n durch $SL_n \mathbf{R}$ ersetzt. Beispiele dafür sind *Scherungen*, welche eine $n - 1$ -dimensionale Hyperebene punktweise festlassen, ihre Parallelen aber (in sich) parallel verschieben. Man mache sich an Hand der geometrischen Wirkung einer Elementarmatrix klar, wie das zustande kommt. Man kann zeigen, dass alle volumenerhaltenden Abbildungen durch euklidische Bewegungen und Scherungen erzeugt werden können.

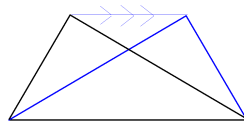


Abbildung 9: Scherung

3) *Affine Abbildungen* entstehen, wenn man in der euklidischen Bewegungsgruppe den Faktor O_n durch $GL_n \mathbf{R}$ ersetzt. Unter dieser Gruppe bleiben Längen, Winkel und Volumina nicht erhalten, wohl aber Parallelität und Streckenverhältnisse auf parallelen Geraden. Es gibt sogar Anwendungen geometrischer Abbildungen, welche nicht bijektiv sind. Die



Abbildung 10: Grund– und Aufriss; Kavalierprojektion

darstellende Geometrie befasst sich mit Projektionen räumlicher Gebilde auf Ebenen, z.B. in *Grund– und Aufriss* (senkrechte Projektionen auf zwei Koordinatenebenen) oder schrägen Parallelprojektionen wie der *Kavalierperspektive*, charakterisiert durch Maßstabverkürzung in bestimmten Richtungen. Fotografie und perspektivische Zeichnungen liefern die anschaulichsten Bilder, mathematisch beschrieben durch die *Zentralprojektion*. Davon wird noch in §7 über Projektive Geometrie die Rede sein.

4 Bilinearformen und Hauptachsentransformation

Zurück zu den *Bilinearformen* aus §1: Es sind bilineare Abbildungen $[,] : V \times V \rightarrow K$ von Vektorräumen V in ihren Grundkörper K . Wenn a_1, \dots, a_n Basis von V ist und $[a_i, a_j] = b_{ij} \in K$, so ist $[,]$ durch die Matrix $B := (b_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ eindeutig bestimmt, und

zwar — wenn wir $x \in V$ als Spaltenvektor $x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$ mit korrespondierender Zeile $x^T = (x_1, \dots, x_n)$ schreiben — in der Form

$$[x, y] = x^T B y .$$

Die Bilinearform ist *symmetrisch*, wenn $[x, y] = [y, x]$ für alle $x, y \in V$ ist. Symmetrie liegt genau dann vor, wenn die Matrix $B = B^T$ symmetrisch ist.

Voraussetzungen: Von nun an werden wir hier meistens $K = \mathbf{R}$, $V = \mathbf{R}^n$ voraussetzen und annehmen, dass $[,]$ symmetrische Bilinearform ist. Außerdem sei mit \langle , \rangle das euklidische Skalarprodukt in Standardform bezeichnet. Was haben B und das Skalarprodukt miteinander zu tun?

Satz 4.1 a) Zu $[,]$ existiert eine lineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow V$ mit

$$[x, y] = \langle x, \varphi(y) \rangle = \langle \varphi(x), y \rangle \quad \forall x, y \in V .$$

Ein $\varphi \in \text{End } V$ mit $\langle x, \varphi(y) \rangle = \langle \varphi(x), y \rangle$ heißt „selbstadjungiert“.

b) Umgekehrt definiert jede selbstadjungierte Abbildung $\varphi \in \text{End } V$ durch $[x, y] := \langle x, \varphi(y) \rangle$ eine symmetrische Bilinearform.

Beweis mit $\varphi(y) := B y$ und $\langle \varphi(x), y \rangle = (B x)^T y = x^T B^T y$. \square

Der nächste Satz ist unter den Namen *Hauptachsentransformation* bekannt (wird im nächsten Kapitel erklärt, warum) oder als *Spektralsatz* (wegen seiner Anwendungen in Funktionalanalysis und Quantenmechanik, aber „das ist ein weites Feld, Luise“).

Satz 4.2 a) Zu jedem selbstadjungierten $\varphi \in \text{End } V$ gibt es eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von φ . Insbesondere ist φ diagonalisierbar.

b) Zu jeder symmetrischen Bilinearform $[,]$ auf V gibt es eine Orthonormalbasis a_i ($i = 1, \dots, n$) von V mit $[a_i, a_j] = 0 \quad \forall i \neq j$.

c) Jede symmetrische reelle Matrix in $\mathbf{R}^{n \times n}$ ist diagonalisierbar und hat reelle Eigenwerte.

Beweis. a) \Rightarrow b), denn Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda \neq \mu$ sind orthogonal: $\varphi(a) = \lambda a$ und $\varphi(b) = \mu b \quad \Rightarrow$

$$\mu \langle a, b \rangle = \langle a, \varphi(b) \rangle = \langle \varphi(a), b \rangle = \lambda \langle a, b \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle a, b \rangle = 0 .$$

Zu jedem einzelnen Eigenraum liefert eine beliebige Basis eine Darstellung von φ durch eine Diagonalmatrix, also kann man auch eine Orthonormalbasis nehmen.

b) \Rightarrow c): Wechsel der Orthonormalbasis des \mathbf{R}^n heißt Übergang von $y \in \mathbf{R}^n$ zu $C y$ mit einem $C \in O_n$. Bekanntlich ist $C^T = C^{-1}$, also können wir mit $[x, y] = x^T B y$ die Aussage b) umformulieren in: Es existiert eine Diagonalmatrix D und ein $C \in O_n$ mit

$$(C x)^T B C y = x^T C^T B C y = x^T D y$$

für $D = C^{-1}BC$, also sind D und B *ähnlich*.

Der Beweis von a) ist klar für $n = 1$ und ebenso für $B = 0$ (Nullmatrix, also $[\cdot, \cdot] \equiv 0$). Hat man einen Eigenvektor v von φ gefunden, dann ist $[\cdot, \cdot]$ auch symmetrische Bilinearform auf dem Orthogonalraum

$$v^\perp := \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle v, x \rangle = 0\}$$

der Dimension $n - 1$. Es genügt also, für φ einen Eigenvektor zu finden und dann Induktion über die Dimension anzuwenden. Dazu lassen wir für einen Augenblick die reelle symmetrische Matrix B auf dem \mathbf{C}^n anstelle des \mathbf{R}^n operieren; dann wissen wir immerhin, dass ein (einstweilen leider) komplexer Eigenwert $\lambda = \xi + i\eta$ existiert (Fundamentalsatz der Algebra). Es genügt dann, $\eta = 0$ zu zeigen. Sei $x + iy$, $x, y \in \mathbf{R}^n$, ein zu λ gehöriger Eigenvektor, also

$$B(x + iy) = (\xi + i\eta)(x + iy) = \xi x - \eta y + i(\eta x + \xi y)$$

bzw.

$$Bx = \xi x - \eta y \quad \text{und} \quad By = \eta x + \xi y,$$

folglich

$$0 = \langle x, By \rangle - \langle Bx, y \rangle = \eta(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

und somit $\eta = 0$, $\lambda = \xi$ reell.

5 Quadratische Formen. Kegelschnitte

Definition 5.1 *und viele Bemerkungen.* Eine „Quadrik“ ist die Nullstellenmenge aller $x := (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n$ mit der Eigenschaft

$$p(x) := \sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c = 0.$$

Der \mathbf{R}^n wird also als affiner Punktraum betrachtet (wird in §7 verallgemeinert werden) und lässt sich für viele Fragen durch K^n ersetzen. für allgemeinere Polynome entsteht eine „algebraische Hyperfläche“, Objekt der „algebraischen Geometrie“. O.B.d.A. darf man für alle Indizes i, j voraussetzen, dass $a_{ij} = a_{ji}$ ist, also

$$p(x) = x^T A x + b^T x + c$$

schreiben mit einem Spaltenvektor $b \in \mathbf{R}^n$ und einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$. Ferner setzen wir $A \neq 0$ voraus, da man sonst eine affine Hyperebene erhielte. Der Hauptbestandteil von p ist also die „quadratische Form“ $[x, x]$, welche zu der durch A definierten symmetrischen Bilinearform $[\cdot, \cdot]$ gehört. Vermöge einer Hauptachsentransformation (Satz 4.2) durch eine orthogonale Matrix M dürfen wir darum annehmen, dass A eine Diagonalmatrix $[a_1, \dots, a_p, -a_{p+1}, \dots, -a_{p+q}, 0, \dots, 0]$ ist; Schreibweise: In der eckigen Klammer

stehen die Diagonalelemente der Matrix, außerhalb der Diagonalen stehen in der Matrix nur Nullen. Man darf also voraussetzen, dass das quadratische Polynom von der Form

$$p(x) = \sum_1^p a_i x_i^2 - \sum_{p+1}^{p+q} a_i x_i^2 + \sum b_i x_i + c$$

ist, dabei alle $a_i > 0$. Die Gestalt dieser Koeffizienten a_i, b_i, c hängt sehr vom gewählten Koordinatensystem ab (was wir gleich ausnutzen werden, um p noch weiter zu vereinfachen, nicht aber die Anzahlen p und q ; das sagt der „Trägheitssatz“ von SYLVESTER, den wir hier nicht beweisen). Für $i \leq p+q$ erreicht man sogar $b_i = 0$ durch eine geeignete Translation, elementarer: durch „quadratische Ergänzung“, für $a_i > 0$ probiere man $x_i = \tilde{x}_i - \frac{b_i}{2a_i}$.

Gewisse Entartungsfälle werden wir künftig ausschließen, nämlich

- 1) wenn $p(x) = 0$ keine Lösung hat, z.B. für $x^2 + y^2 + 1 = 0$,
- 2) wenn $p(x) = 0$ nur einen Lösungspunkt hat wie z.B. $x^2 + y^2 = 0$, oder
- 3) wenn $p(x) = l_1(x) \cdot l_2(x)$ für zwei lineare Polynome l_1, l_2 . Dann heißt die Quadrik *reduzibel* und ist Vereinigung der beiden affinen Hyperebenen $l_i(x) = 0$, $i = 1, 2$.

Lässt man über die euklidischen Bewegungen hinaus auch noch affine Transformationen zu, nämlich

$$x_i = \frac{\tilde{x}_i}{\sqrt{a_i}} \quad \text{für } i \leq p+q \quad \text{bzw.} \quad x_j = \frac{\tilde{x}_j}{b_j} \quad \text{für } j > p+q, b_j \neq 0,$$

so werden alle Koeffizienten der Gleichung $p(x) = 0$ zu 0 oder 1. für $p+q < n$, ein $b_j \neq 0$, kann man durch Translation auch noch $c = 0$ erreichen, sonst — via Multiplikation der Gleichung mit $1/c$ — immerhin noch $c = 1$. Bleiben für $n = 2$, also in der euklidischen Ebene, noch die folgenden Fälle übrig.

1. „Ellipse“ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, affines Bild des Kreises $x^2 + y^2 = 1$.
2. „Hyperbel“ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, affin normierbar auf $x^2 - y^2 = 1$.
3. Im Fall $p+q = 1 < n = 2$ oben erhält man die „Parabel“ $x^2 = y$.

Es handelt sich um die sogenannten „Kegelschnitte“; sie entstehen durch Schnitte des Kreiskegels $K : x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$ mit einer Ebene $E \subset \mathbf{R}^3$. Dabei kann $E \cap K$ entartet sein — wenn $0 \in E$ — oder aber genau eine Kurve der oben genannten Arten ergeben. In der hier gefundenen Normierung ist die y -Achse Symmetrieachse der Parabel und beide Koordinatenachsen Symmetrieachsen von Ellipse und Hyperbel, daher der Name „Hauptachsentransformation“ für das wichtigste Werkzeug dieser Normierung.

Kegelschnitte treten in der Natur auf als Bahnkurven von Himmelskörpern (1. KEPLERsches Gesetz) und haben viele geometrisch oder sogar technisch interessante Eigenschaften (z.B. Parabolspiegel). Wählt man die Zeichenebene senkrecht zur Schnittebene

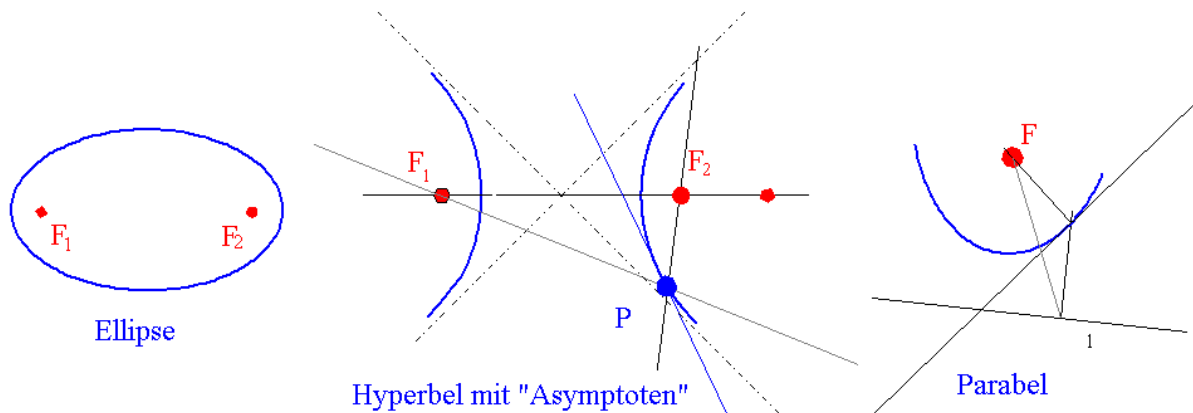


Abbildung 11: Kegelschnitte

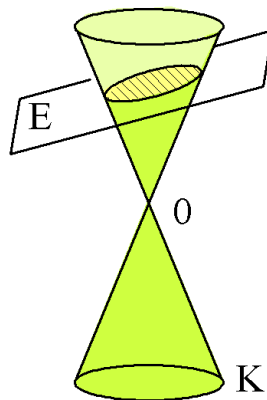


Abbildung 12: Kegel

E , so sieht man im Aufriss, dass es genau zwei Kugeln (die DANDELINSchen Kugeln) gibt, welche K in einer Kreislinie κ_i und die Ebene E in je einem „Brennpunkt“ F_1 bzw. F_2 berühren; bei der Parabel ist es nur eine Kugel und nur ein Punkt F . Dann gelten u.a. die folgenden Sätze.

Satz 5.1 Die Differenz der Abstände $|\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}|$ ist für jeden Hyperbelpunkt P dieselbe.

Satz 5.2 Die Summe der Abstände $|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}|$ ist für jeden Ellipsenpunkt P dieselbe.

Man nutzt dabei jeweils aus, dass $|\overline{PF_i}|$ = Distanz von P zum jeweiligen Berührkreis κ_i ist und dass die fragliche Differenz bzw. Summe gerade die Distanz von κ_1 zu κ_2 ist. \square

Satz 5.3 für alle Hyperbel- bzw. Ellipsenpunkte werden die Winkel zwischen den beiden Geraden F_1P und F_2P von der Tangente und der Normale durch P halbiert. \square

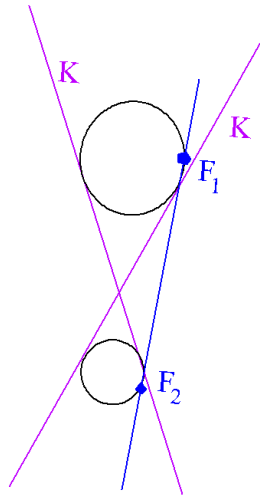


Abbildung 13: Dandelin'sche Kugeln

Satz 5.4 Zur Parabel gibt es eine „Leitlinie“ l mit der Eigenschaft, dass für alle Parabelpunkte P die Entfernungen zu l und zu F gleich sind. \square

Auch zu Satz 5.3 gibt es ein Analogon für die Parabel: Lichtstrahlen, die parallel zur Symmetrieachse in die Parabel einfallen, werden von der Parabel in den Brennpunkt F gespiegelt.

6 Der Dualraum

Erinnerung. V sei ein K -Vektorraum. Eine „Linearform“ $f : V \rightarrow K$ ist eine lineare Abbildung in den Grundkörper. Mit Wahl einer Basis v_1, \dots, v_n von V und der Basis 1 von K lässt sich f schreiben als

$$f(x) = f(x_1v_1 + \dots + x_nv_n) = x_1f(v_1) + \dots + x_nf(v_n) = \sum_i a_i x_i = (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

wenn die $a_i := f(v_i)$ bezeichnen und wir x mit dem Spaltenvektor $(x_1, \dots, x_n)^T$ seiner Koordinaten bezüglich der gewählten Basis identifizieren. Offensichtlich ist der

Satz 6.1 Die Linearformen auf V bilden bezüglich punktweiser Addition und Multiplikation mit Skalaren einen K -Vektorraum V^* . Wenn $\dim V = n < \infty$, kann man ihn durch Basiswahl in V mit dem Vektorraum $K^{1 \times n}$ der 1-zeiligen und n -spaltigen Matrizen identifizieren. Insbesondere ist

$$\dim V^* = \dim V \quad \Rightarrow \quad V^* \cong V.$$

Der Isomorphismus hängt allerdings von der Basiswahl ab. \square

Definition 6.1 V^* heißt der „Dualraum“ zu V , die Linearformen $v_i^* := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) : v_j \mapsto \delta_{ij}$ bilden die zu den v_j „duale Basis“.

Bemerkung. Klar, dass dann auch $V^{**} \cong V$ ist. Dieser Isomorphismus lässt sich aber sogar basisunabhängig wählen („kanonisch“), nämlich so: Jedes $x \in V$ definiert eine lineare Abbildung – ein Element von V^{**} – vermöge der Auswertungsabbildung

$$x : V^* \rightarrow K : f \mapsto f(x).$$

Für alle x betrachtet, ergibt sich dadurch eine Abbildung $V \rightarrow V^{**}$, von der man leicht zeigen kann, dass sie linear und injektiv ist. Surjektiv ist sie leider nur bei endlicher Dimension!

Für endlichdimensionale euklidische Vektorräume liefert auch das Skalarprodukt eine Identifikation von V mit V^* , nämlich jedes $y \in V$ ergibt eine lineare Abbildung

$$\langle y, \rangle : x \mapsto \langle y, x \rangle \in \mathbf{R},$$

und zwar genau eine, denn $\langle y_1, \rangle = \langle y_2, \rangle \Leftrightarrow y_1 = y_2$; warum wohl?

Satz 6.2 Sei $F : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung von K -Vektorräumen. Dann wird durch $f \mapsto f \circ F$ eine lineare Abbildung $F^* : W^* \rightarrow V^*$ definiert, die zu F „adjungierte Abbildung“ mit den Eigenschaften

- $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$ für alle linearen Abbildungen $G : U \rightarrow V$, und mit
- $F^{**} = F$, wenn $\dim V < \infty$.

Wird zu den Basen \mathcal{B}, \mathcal{C} von V bzw. W die entsprechende duale Basis von V^* und W^* gewählt, und wenn $M =_{\mathcal{B}} M_{\mathcal{C}}(F)$ die Matrix von F in diesen Basen ist, dann wird F^* in den dualen Basen durch M^T dargestellt.

Beweis von $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$ einfach durch Nachrechnen — oder bei geeigneter Basiswahl mit Hilfe von $(MN)^T = N^T M^T$, denn bei Verwendung der dualen Basis für V^* und W^* schreibt sich wie oben $f \in W^*$ als $f(x) = (a_1, \dots, a_m)x = a^T x$, d.h. mit $x = F(y) = My$ wird

$$F^*(f)(y) = f(F(y)) = a^T My = (M^T a)^T y \quad \Rightarrow$$

$f \mapsto F^*(f)$ wird beschrieben durch $a \mapsto M^T a$. Ebenso folgt $F^{**} = F$. \square

Definition 6.2 Sei U Untervektorraum des K -Vektorraums V . Dann sei

$$U_0 := \{ f \in V^* \mid f(v) = 0 \forall v \in U \}$$

(manchmal auch etwas irreführend mit U^\perp bezeichnet).

Satz 6.3 Sei V ein K -Vektorraum der Dimension n . Für alle Untervektorräume $U, U' \subset V$ sind U_0, U'_0 Untervektorräume von V^* mit

1. $\dim U_0 = n - \dim U$
2. $U_{00} = U \subset V^{**} = V$
3. $(U + U')_0 = U_0 \cap U'_0$
4. $(U \cap U')_0 = U_0 + U'_0$
5. $U \subset U' \Leftrightarrow U_0 \supset U'_0$.

Beweis. 5) ist evident. 1) folgt z.B. durch geschickte Basiswahl: Man ergänze eine Basis e_1, \dots, e_r von U durch e_{r+1}, \dots, e_n zu einer Basis von V , dann bilden e_{r+1}^*, \dots, e_n^* eine Basis von U_0 .

2) Entsprechend ist dann e_1, \dots, e_r wiederum eine Basis von U_{00} .

3) und 4) : Übungsaufgabe. \square

Durch Vertauschen von Vektorraum und Dualraum folgt darum eine wichtige „Meta-Aussage“, nämlich das „Dualitätsprinzip der linearen Algebra“

Satz 6.4 Aus jedem Satz über endlichdimensionale K -Vektorräume, der mit „+“, „ \subset “ und „ \cap “ und Dimensionen formuliert ist, folgt ein weiterer Satz durch Vertauschung von „+“ und „ \cap “, von „ \subset “ und „ \supset “ und Übergang zu den jeweiligen Codimensionen. \square

7 Projektive Geometrie

Definition 7.1 Sei V ein K -Vektorraum der Dimension $n + 1$. Auf $V \setminus \{0\}$ sei durch

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad \exists r \in K^* : x = ry$$

eine Äquivalenzrelation definiert. Die Menge der Äquivalenzklassen $[x] = K^*x$ bildet die Punktmenge des n -dimensionalen projektiven Raumes $\mathbf{P}^n(K) = \mathbf{P}(V)$. Geraden im $\mathbf{P}^n(K)$ sind die Mengen

$$g := \{ [x] \in \mathbf{P}(V) \mid x \in G \setminus \{0\} \},$$

wenn G ein 2-dimensionaler (!) Untervektorraum von V ist. Entsprechend bestehen projektive Unterräume der Dimension m aus den Punkten $[x]$ mit $x \in U$, $x \neq 0$, für die U ein Untervektorraum in V von Dimension $m + 1$ ist.

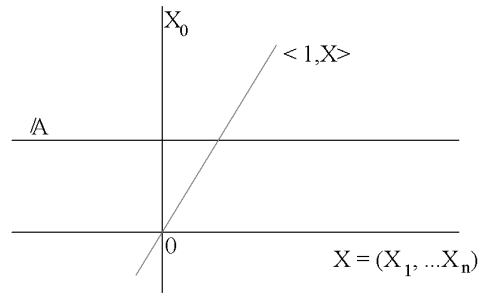


Abbildung 14: Affiner Unterraum eines projektiven Raums

Veranschaulichung. Sei $\mathbf{A} = \mathbf{A}(K^n)$ der n -dimensionale affine Raum, eingebettet in den K^{n+1} vermöge

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (1, x_1, \dots, x_n).$$

Dann besitzt jeder Punkt von \mathbf{A} genau einen Repräsentanten in \mathbf{P} , und alle $[x_0, x_1, \dots, x_n] \in \mathbf{P}$ liegen in \mathbf{A} , wenn sie nur $x_0 \neq 0$ erfüllen, denn dann sind sie ebenso repräsentiert von $(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0})$. Was zu \mathbf{A} neu hinzukommt, sind jene $[x]$ mit $x_0 = 0$, die Punkte am „Horizont“ von \mathbf{A} , auch „Fernpunkte“ oder „unendlich ferne Punkte“ genannt — von \mathbf{A} aus gesehen. Wir werden noch sehen, dass die neuen Punkte die Rolle von Schnittpunkten der bisherigen affinen Parallelen übernehmen. Parallelen gibt es nämlich nicht mehr in dieser neuen Geometrie:

Satz 7.1 1) Zu je zwei Punkten $A \neq B \in \mathbf{P}^n(K)$ gibt es genau eine Verbindungsgerade $A \vee B = g \subset \mathbf{P}$, d.h. mit $A \in g, B \in g$.

2) Zwei Geraden $g \neq h \subset \mathbf{P}^2(K)$ der projektiven Ebene haben genau einen Schnittpunkt.

Beweis. 1) Seien $\langle a \rangle, \langle b \rangle$ die beiden eindimensionalen Unterräume des K^{n+1} , die — nach Entfernung des Nullvektors — die Punkte A, B ergeben. Wegen $A \neq B$ sind a und b linear unabhängig, also ist $\langle a, b \rangle$ ein zweidimensionaler Unterraum des K^{n+1} (leider die gleiche Notation wie das Skalarprodukt, zu dumm), und zwar der einzige, welcher a und b enthält. Er definiert also eine eindeutig bestimmte Verbindungsgerade von A und B .

2) G und H seien die beiden 2-dimensionalen Unterräume des K^3 , welche die Geraden g und h definieren.

$$g \neq h \Rightarrow G \neq H \Rightarrow G + H = K^3 \Rightarrow \dim(G \cap H) = \dim G + \dim H - \dim K^3 = 1 \Rightarrow$$

$G \cap H$ definiert genau einen Punkt in $\mathbf{P}^2(K)$, natürlich in g und h gelegen. \square

Satz 7.2 Zu jeder projektiven Hyperebene $H \subset \mathbf{P}^n(K)$, also mit $\dim H = n - 1$, bildet $\mathbf{A} := \mathbf{P}^n(K) \setminus H$ einen affinen Raum der Dimension n .

Beweis am einfachsten durch einen geschickten Koordinatenwechsel: H wird durch eine *homogene lineare Gleichung*

$$\sum_0^n a_i x_i = a^T x = 0, \quad a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^{n+1},$$

definiert, $a \neq 0$. Man wähle also einfach eine lineare Abbildung $K^{n+1} \rightarrow K^{n+1} : x \mapsto Mx = y$, $y^T = (y_0, y_1, \dots)$, mit a^T als erster Zeile von M . Dann wird H durch $y_0 = 0$ definiert, auf $\mathbf{P}^n \setminus H$ darf man also wie oben die Normierung $y_0 = 1$ vornehmen.

Definition 7.2 Die x_i in $[x_0, \dots, x_n]$ heißen „homogene Koordinaten“. Sie sind nur bis auf gemeinsame Vielfache eindeutig durch den Punkt $[x]$ bestimmt. Jedes $M \in \text{GL}_{n+1}(K)$ definiert eine „projektive lineare Abbildung“. Diese hat genau dann die gleiche Wirkung wie $M' \in \text{GL}_{n+1}(K)$, wenn $M = rM'$ ist mit einem $r \in K^*$. Die Gruppe $\text{GL}_{n+1}(K)$ modulo dem Normalteiler der skalaren Vielfachen der Einheitsmatrix besitzt eine wohldefinierte Gruppenstruktur und wird darum als „projektive lineare Gruppe“ $\text{PGL}_{n+1}(K)$ für $\mathbf{P}^n(K)$ bezeichnet.

Satz 7.3 Die Wirkung einer projektiven linearen Abbildung auf den affinen Unterräumen kann als Kombination einer affinen Abbildung mit einer Zentralprojektion beschrieben werden.

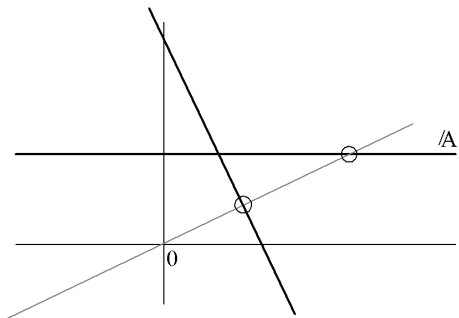


Abbildung 15: Zwei affine Unterräume im \mathbf{P}^n

Beweis. M bildet den affinen Teilraum \mathbf{A} in einen anderen affinen Teilraum $M(\mathbf{A})$ ab. Will man die Auswirkung auf \mathbf{A} selbst studieren, muss man dann alle Repräsentanten in $M(\mathbf{A})$ durch Repräsentanten in \mathbf{A} ersetzen (soweit möglich, s.u.); geometrisch ist das eine Zentralprojektion mit Zentrum 0 von $M(\mathbf{A})$ auf \mathbf{A} . \square

Vorsicht: Die Zentralprojektion ist keine Abbildung im üblichen Sinn, denn es gibt i.a. Punkte in $M(\mathbf{A})$, welche von \mathbf{A} aus gesehen am Horizont liegen, die also bei der Zentralprojektion keinen Bildpunkt haben, und ebenso kann es Punkte in \mathbf{A} geben, die kein Urbild in $M(\mathbf{A})$ haben, weil sie für $M(\mathbf{A})$ zu den Fernpunkten gehören.

Satz 7.4 Zentralprojektionen lassen selbst für $K = \mathbf{R}$ i.a. weder Längen noch Winkel noch Längenverhältnisse fest, wohl aber das „Doppelverhältnis“

$$\frac{|P_1P_3|}{|P_1P_4|} : \frac{|P_2P_3|}{|P_2P_4|}$$

von vier Punkten P_1, \dots, P_4 auf einer Geraden.

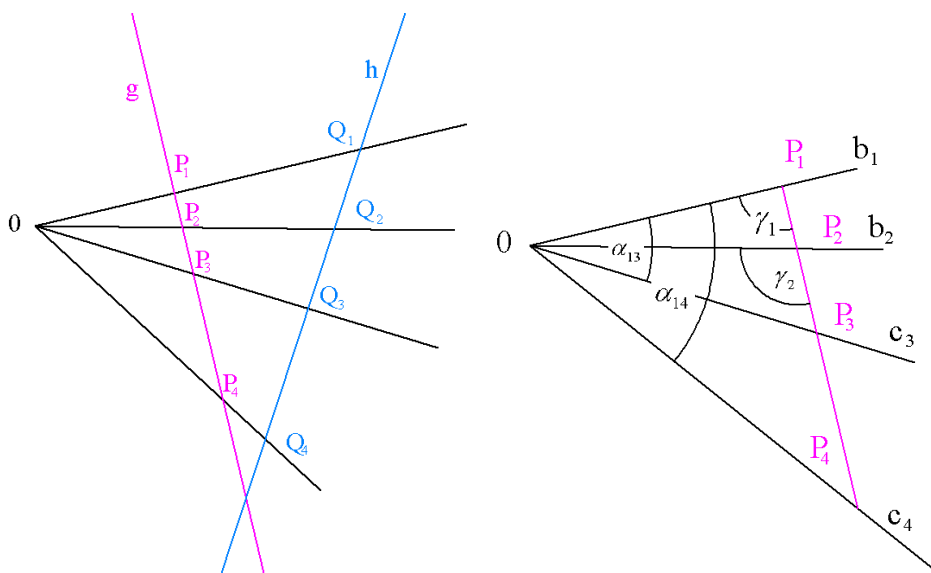


Abbildung 16: Invarianz des Doppelverhältnisses

In der Formulierung tun wir stillschweigend so, als wäre $K = \mathbf{R}$ und sowohl die Punkte wie die Bildpunkte auf dem affinen Teil einer Geraden gelegen, den wir dann in der üblichen Weise mit einer euklidischen Metrik versehen können. Beides lässt sich vermeiden, indem man etwa den Horizont so legt, dass kein P_i und keines seiner Bilder unendlich ferner Punkt wird, und die Längen mag man ersetzen, indem man den affinen Teil der Geraden mit K identifiziert und die Längen einfach durch Differenzen in K .

Für den *Beweis* beschränken wir uns auf den Fall $K = \mathbf{R}$ und nehmen an, dass die vier Punkte auf (dem endlichen Teil) einer Geraden g liegen, der das Zentrum 0 der Zentralprojektion natürlich nicht enthält. Mit α_{ij} sei der Winkel $\angle P_i 0 P_j$ bezeichnet, mit γ_i der Winkel $\angle 0 P_i P_j$, also der Winkel zwischen der Gerade g und dem Projektionsstrahl $0 P_i$. Längen und Winkel sind also gemeint in einer euklidischen Ebene, welche 0 und g enthält; in diesem Sinne sei auch $c_i := |0 P_i|$. Wir wenden jetzt auf alle Dreiecke $0 P_j P_i$ den Sinussatz der Elementargeometrie an und erhalten z.B.

$$\frac{|P_1 P_3|}{\sin(\alpha_{13})} = \frac{c_3}{\sin(\gamma_1)} \quad , \quad \frac{|P_1 P_4|}{\sin(\alpha_{14})} = \frac{c_4}{\sin(\gamma_1)} \quad .$$

In ihrem Quotient kürzt sich $\sin(\gamma_1)$ weg; macht man dasselbe für P_2 anstelle von P_1 und bildet das Doppelverhältnis, kürzen sich auch noch c_3, c_4 weg, das Doppelverhältnis wird

zu

$$\frac{\sin(\alpha_{13})}{\sin(\alpha_{14})} = \frac{\sin(\alpha_{23})}{\sin(\alpha_{24})},$$

hängt darum nur noch von den Richtungen der Projektionsstrahlen, nicht mehr von der Lage von g ab. Klar, dass dann die Bildpunkte auf der Geraden h das gleiche Doppelverhältnis besitzen. \square

Exkurs in die geometrische Axiomatik. Man kann affine Ebenen axiomatisch beschreiben durch Vorgabe einer Punktmenge \mathcal{P} , einer Menge \mathcal{G} von nichtleeren Geraden $g \subset \mathcal{P}$ und einer „Inzidenzrelation“ $P \in g$, welche die folgenden Axiome erfüllt.

1) Verbindungsaxiom: Zu je zwei $P \neq Q \in \mathcal{P}$ gibt es genau ein $P \vee Q =: g \in \mathcal{G}$ mit $P, Q \in g$.

2A) $\forall g \in \mathcal{G}, \forall P \in \mathcal{P}$ gibt es genau ein $h \in \mathcal{G}$ mit $P \in h$ und $h = g$ oder $h \cap g = \emptyset$, kurz $h \parallel g$ geschrieben („parallel“ zu g).

3) Reichhaltigkeitsaxiom: Es gibt vier Punkte „in allgemeiner Lage“, d.h. so dass keine drei unter ihnen auf einer Geraden liegen („kollinear“ sind).

Man überlege sich, dass schon auf Grund dieser Axiome die Parallelität eine Äquivalenzrelation auf der Geradenmenge definiert.

Um stattdessen projektive Ebenen zu beschreiben, ersetzen wir einfach nur das Parallelaxiom 2A) durch

2P) $\forall g \neq h \in \mathcal{G}$ gibt es genau einen *Schnittpunkt* $P \in g \cap h$.

Man beachte: 1), 2P) und 3) sind für alle $\mathbf{P}^2(K)$ erfüllt. 1) und 2P) sind in folgendem Sinne *dual* zueinander.

Satz 7.5 *Was man aus dem Axiomensystem 1), 2P), 3) für Punkte, Geraden und Inzidenz \in beweisen kann, bleibt gültig, wenn man diese Begriffe jeweils ersetzt durch Geraden, Punkte und Inzidenz \ni . Bei dieser Ersetzung werden die Begriffe „Verbindungsgerade“ und „Schnittpunkt“ vertauscht.*

Dies gilt nicht nur für die axiomatischen projektiven Ebenen, sondern ebenso für alle projektiven Ebenen $\mathbf{P}^2(K)$ über Körpern.

Der *Beweis* des ersten Teils folgt direkt aus der Formulierung der Axiome, der zweite Teil ist unmittelbare Konsequenz des Dualitätsprinzips der Linearen Algebra (Satz 6.4). Man beachte dazu, dass Punkte der projektiven Ebene im wesentlichen 1–dimensionale Unterräume von K^3 , Geraden im wesentlichen 2–dimensionale Unterräume sind. \square

Das nächste Kapitel wird den Nutzen dieses Dualitätssatzes verdeutlichen, zunächst soll der Zusammenhang zwischen projektiver und affiner Geometrie aber noch an zwei Punkten erläutert werden.

Satz 7.6 *a) Entfernt man aus der projektiven Ebene \mathbf{P} eine Gerade u , so entsteht eine affine Ebene. In dieser sind zwei Geraden g und h parallel, wenn sie ihren Schnittpunkt in einem Punkt $P \in u$ hatten.*

b) Gegeben eine affine Ebene \mathbf{A} . Zu jeder Äquivalenzklasse $[h]$ paralleler Geraden (also der Parallelenschar von h) definiert man sich einen neuen „unendlich fernen“ Punkt $[h]$ sowie eine neue Gerade $H := \{[h] \mid h \in \mathcal{G}\}$. Dann bilden

$$\mathcal{P} \cup \{[h] \mid h \in \mathcal{G}\} \quad \text{die Punktmenge und} \quad \mathcal{G} \cup \{H\} \quad \text{die Geradenmenge}$$

einer projektiven Ebene.

Der Beweis ergibt sich direkt durch Vergleich der Axiomensysteme. \square

Satz 7.7 Die Kegelschnitte Ellipse, Parabel, Hyperbel sind affine Teilkurven der gleichen projektiven Kurve im $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$. Sie entstehen durch Zentralprojektion auseinander.

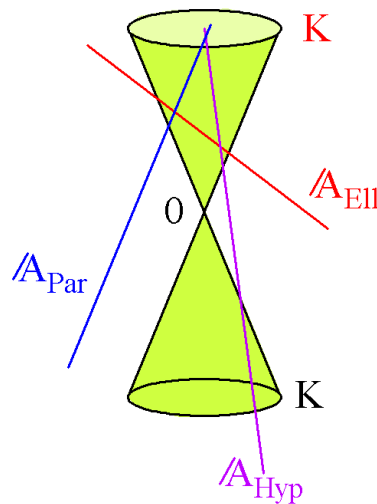


Abbildung 17: Drei affine Teilräume des \mathbf{P}^2

Zum Beweis kann man zunächst an die geometrische Einsicht appellieren: Der Kegel $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$ im \mathbf{R}^3 ist durch eine homogene Gleichung definiert und liefert darum eine wohldefinierte Punktmenge im $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ (Übungsaufgabe!), genauer eine *projektive Quadrik*. Affine Teilkurven dieser Quadrik sind einfach Schnitte mit affinen Ebenen, die man auf verschiedene Weise in den \mathbf{P}^2 legen kann, d.h. indem man zweidimensionale affine Unterräume im \mathbf{R}^3 auszeichnet, welche allerdings den Nullpunkt nicht enthalten dürfen. Mit anderen Worten hat man den Kegel zu schneiden mit Ebenen, die nicht durch 0 gehen, und genau das liefert bekanntlich alle Kegelschnitte. Diese verschiedenen affinen Teilkurven gehen — genau wie verschiedene affine Ebenen im \mathbf{P}^2 — auseinander hervor durch Zentralprojektion mit Zentrum 0. Dabei werden die verschiedenen Versionen der Kegelschnitte ineinander übergeführt. \square

Rechnerisch sieht man sofort, dass die affine Ebene mit $x_3 = 1$ auf einen Kreis führt und jene mit $x_1 = 1$ auf eine Hyperbel. Wie erhält man die Parabel?

Es ist ganz aufschlussreich, sich zu überlegen, welche Punkte der projektiven Quadrik für die jeweils gewählte affine Ebene „im unendlichen“ liegen. Die beiden *Asymptoten* $x_2 = \pm x_3$ der Hyperbel $x_3^2 - x_2^2 = 1$ werden zu Tangenten in den beiden Horizontpunkten $(0, \pm 1, 1)$, wie man etwa in der anderen affinen Ebene $x_3 = 1$ sieht, in der die Quadrik den Kreis $x_1^2 + x_2^2 = 1$ darstellt: Hier sind sie die Tangenten $x_2 = \pm 1$.

8 Die Sätze von Desargues und Pappos

Satz 8.1 („Großer Satz von DESARGUES“) Im $\mathbf{P}^2(K)$ seien zwei Dreiecke ABC , $A'B'C'$ in „perspektiver Lage“ gegeben, d.h. die Geraden AA' , BB' , CC' haben einen gemeinsamen Schnittpunkt P . Dann sind die drei Schnittpunkte $L := AB \cap A'B'$, $M := AC \cap A'C'$ und $N := BC \cap B'C'$ kollinear.

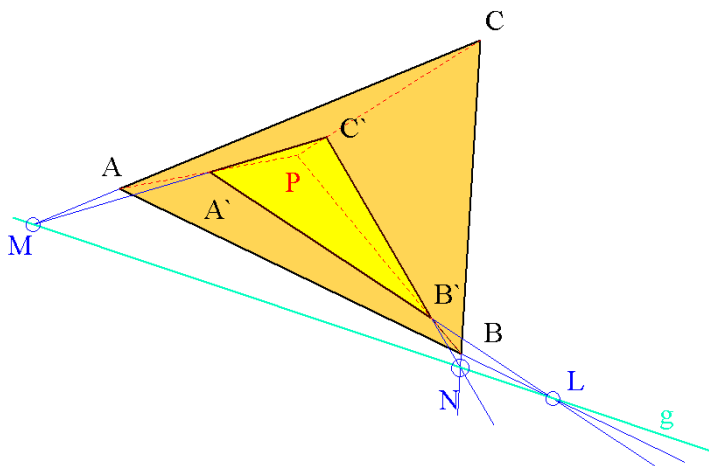


Abbildung 18: Großer Satz von Desargues

Beweis 1. Man wähle eine Horizontgerade u so aus, dass alle Punkte im endlichen $\mathbf{A} \subset \mathbf{P}^2(K)$ liegen, lese das Bild als Grundriss einer Dreieckspyramide mit Spitze P , die von zwei Ebenen E und E' in zwei Dreiecken geschnitten wird. $E \cap E'$ ist eine Gerade und muss die drei Schnittpunkte M , L , N enthalten.

Beweis 2. Die Aussage des Satzes ist invariant gegen *Projektivitäten*, d.h. inzidenzerhaltenden Abbildungen $\mathbf{P}^2 \rightarrow \mathbf{P}^2$, das sind insbesondere die schon besprochenen projektiv-linearen Abbildungen. Wir können eine Horizontgerade u also als Verbindungsgerade von M und L wählen; für $\mathbf{A} := \mathbf{P}^2(K) \setminus u$ bedeutet das $AC \parallel A'C'$ und $AB \parallel A'B'$. Zu zeigen bleibt $(B \vee C) \cap (B' \vee C') = N \in u$, in \mathbf{A} also $BC \parallel B'C'$. Diese Aussage folgt z.B. aus den Strahlensätzen oder vektoriell. \square

Folgerung. Legt man das Perspektiv-Zentrum P ins Unendliche, so ergibt sich im Affinen der „*kleine Satz von DESARGUES*“: Wenn $AA' \parallel BB' \parallel CC'$, dann sind die drei Schnittpunkte $L := AB \cap A'B'$, $M := AC \cap A'C'$ und $N := BC \cap B'C'$ kollinear.

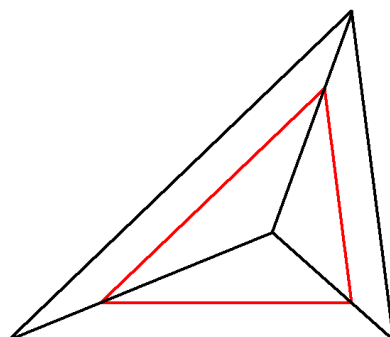


Abbildung 19: Beweis 2

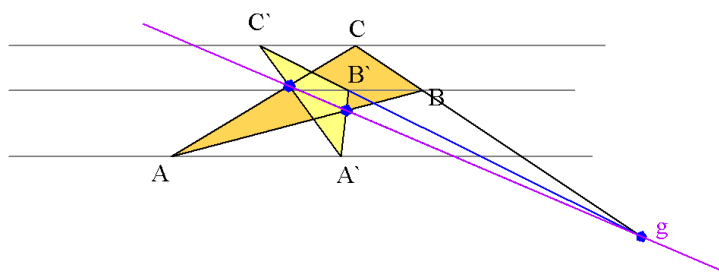


Abbildung 20: Kleiner Satz des Desargues

Dualisierung des großen Desargues vermöge Satz 7.5 ergibt die folgende Umkehrung.

Satz 8.2 Gegeben eine Gerade z , darauf drei Punkte, in denen sich jeweils die Geraden a, a' bzw. b, b' bzw. c, c' treffen. Dann treffen sich die drei Verbindungsgeraden

$$(a \cap b) \vee (a' \cap b') \quad , \quad (a \cap c) \vee (a' \cap c') \quad , \quad (b \cap c) \vee (b' \cap c')$$

in einem Punkt. \square

Satz 8.3 (PAPPUS) Auf den Geraden $g \neq g'$ des $\mathbf{P}^2(K)$ seien zwei Punktetripel ABC bzw. $A'B'C'$ gelegen. Dann sind die drei Schnittpunkte

$$AB' \cap A'B \quad , \quad BC' \cap B'C \quad , \quad AC' \cap A'C$$

kollinear.

Beweis. Sei u die Verbindungsgerade der beiden Schnittpunkte $AB' \cap A'B$ und $BC' \cap B'C$. Entfernen wir u aus der projektiven Ebene, bleibt eine affine Ebene \mathbf{A} übrig, in der

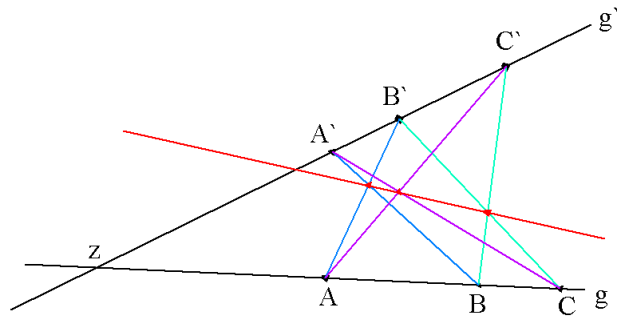


Abbildung 21: Satz des Pappos

$AB' \parallel A'B$, $BC' \parallel B'C$ ist; zu zeigen ist dann $AC' \parallel A'C$. Wenn in \mathbf{A} die beiden Geraden parallel sind, ist der Satz dann der *kleine Satz des Pappos*, leicht zu beweisen durch Translation längs der Richtung von g bzw. g' . Setzen wir also voraus, dass $g \cap g' \in \mathbf{A}$ liegt und identifizieren diesen Schnittpunkt mit dem Nullpunkt 0 des K^2 , A und C' mit den beiden Basisvektoren $v, w \in K^2$. Genauso identifizieren wir B mit tv und B' mit sw , dabei $t, s \in K$ und $\neq 0, 1$. Die Voraussetzung $AB' \parallel A'B$, $A' \in g'$ ist dann äquivalent zu $A' = tsw$ und die Voraussetzung $BC' \parallel B'C$, $C \in g$ bedeutet $C = stv$. Wegen $st = ts$ folgt daraus mit $C - A' = st(A - C')$ die gewünschte Parallelität. \square

Wie wir noch sehen werden, ist die unscheinbare Eigenschaft „Kommutativität“ tatsächlich ein Schlüssel zum Satz von Pappos. Der Satz des Desargues hingegen bleibt auch dann gültig, wenn K nur ein „Schiefkörper“ ist, in dem die Kommutativität der Multiplikation nicht notwendig richtig ist; Beispiel dafür sind die HAMILTONSchen Quaternionen. Zunächst aber noch zwei Ergänzungen zum Satz des Pappos. Die erste ist seine Dualisierung vermöge des Satzes 7.5, die zweite eine Verallgemeinerung auf Kegelschnitte, die wir hier allerdings nicht beweisen werden – man erinnere sich daran, dass zwei sich schneidende Geraden eigentlich ein entarteter Kegelschnitt sind.

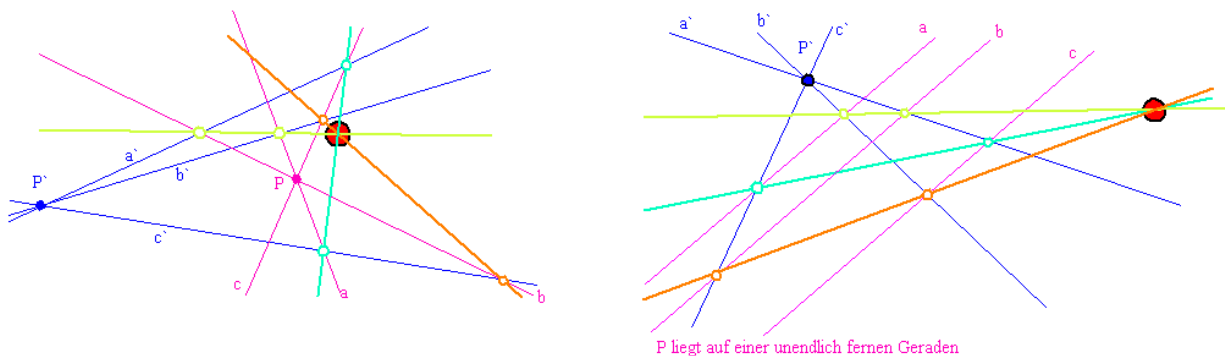


Abbildung 22: Satz von Brianchon

Satz 8.4 (BRIANCHON) Gegeben zwei Punkte $P, P' \in \mathbf{P}^2(K)$ und zwei Geradenbüschel a, b, c bzw. a', b', c' durch P bzw. P' . Dann verlaufen die drei Verbindungsgeraden

$$l := (a \cap b') \vee (a' \cap b) \quad , \quad m := (a \cap c') \vee (a' \cap c) \quad , \quad n := (b \cap c') \vee (b' \cap c)$$

durch einen Punkt. \square

Satz 8.5 (PASCAL) Die Aussage des Satzes von PAPPUS gilt ebenso für je sechs Punkte A, A', B, B', C, C' auf einem Kegelschnitt. \square

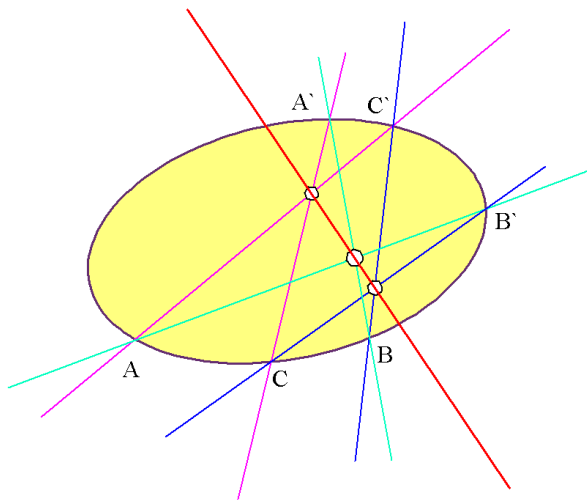


Abbildung 23: Satz von Pappos–Pascal

9 Axiomatik und Koordinateneinführung: ein Bericht

Die „**Grundlagen der Geometrie**“ behandeln das Problem, ein Axiomensystem für die Geometrie zu finden, aus dem sich alle geometrischen Aussagen ableiten lassen. Insbesondere möchte man daran erkennen können, dass man sich in der vertrauten Geometrie z.B. des $\mathbf{A}^2(K)$ befindet. M.a.W. sollte die Existenz und das genaue Aussehen eines Koordinatenkörpers aus den Axiomen der Geometrie folgen. Was lässt sich z.B. aus den Axiomen 1), 3), 2A) bzw. 2P) (vgl §7) für die Ebene herleiten? Beispiele einiger Aussagen für endliche Ebenen:

- Satz 9.1**
- 1) Alle Geraden besitzen gleich viele Punkte (n im affinen, $n + 1$ im projektiven Fall. n heißt in beiden Fällen die „Ordnung“ der Ebene).
 - 2) Jeder Punkt inzidiert mit $n + 1$ Geraden.
 - 3) Die affine Ebene besteht aus n^2 , die projektive aus $n^2 + n + 1$ Punkten.
 - 4) Im \mathbf{A}^2 besteht jede Parallelschar aus n Geraden.

Bemerkungen. a) Die endlichen Ebenen lösen ein Problem der Kombinatorik, nämlich die Konstruktion von $2 - (s, k, 1)$ -„Blockplänen“, d.h. von s -elementigen Mengen E mit einem System von k -elementigen Untermengen $g \subset E$, den „Blöcken“ (hier: Geraden), welche der folgenden Eigenschaft genügen: Je 2 Elemente $P \neq Q \in E$ liegen in genau einem Block $g \subset E$. Hier wäre also $s = n^2$, $k = n$ bzw. $s = n^2 + n + 1$, $k = n + 1$. Andere Anwendungen sind z.B. die Konstruktion „orthogonaler lateinischer Quadrate“ oder die Konstruktion irrtumskorrigierender Codes.

b) für welche $n \in \mathbf{N}$ gibt es also Ebenen der Ordnung n ? Jedenfalls für Primzahlpotenzen $n = p^e$, weil zu jedem solchen p^e ein endlicher Körper \mathbf{F} mit genau p^e Elementen existiert, bis auf Isomorphie sogar genau einer! (\Leftarrow Algebra). Gibt es also Ebenen anderer Ordnung $n \neq$ Primzahlpotenz? Bis heute ist keine bekannt, und man vermutet, dass es keine gibt, aber bewiesen ist das bisher nur für spezielle Klassen natürlicher Zahlen. Die Ordnungen $n = 6$ und 10 treten jedenfalls nicht auf, aber insbesondere für 10 ist das extrem schwer zu beweisen.

Problem: Aus den bisherigen Axiomen gelingt es nicht, einen Koordinatenkörper K zu erschließen, für den z.B. $E = \mathbf{A}^2(K)$ wäre.

Grund: In einer solchen Ebene würden die Sätze von DESARGUES und PAPPUS gelten, und diese kann man aus den bisherigen Axiomen nicht ableiten. Es gibt nämlich Modelle für diese Axiomensysteme, in denen DESARGUES und PAPPUS nicht richtig sind (die MOULTON-Ebene), und es ist darum kein Wunder, wenn DESARGUES und PAPPUS bei der Konstruktion von Koordinaten eine wesentliche Rolle spielen. Wir wollen im folgenden einige wenige wichtige Schritte dieser Konstruktion nachvollziehen.

1. Akt: Wie stellt man die additive Gruppe $(K, +)$ des Körpers aus der Geometrie der affinen Ebene \mathbf{A} her? Die Gruppe sollte isomorph zur Gruppe der Translationen von \mathbf{A} in einer Richtung werden, d.h. einer Bewegungsgruppe, welche die Geraden einer Parallelschar fixiert. Auf jeder dieser Geraden sollte eine Bijektion $\{ \text{Punkte} \} \leftrightarrow K$ existieren, o.B.d.A. dabei die 0 jeweils auf einer Geraden g_0 , welche die Parallelschar schneidet.

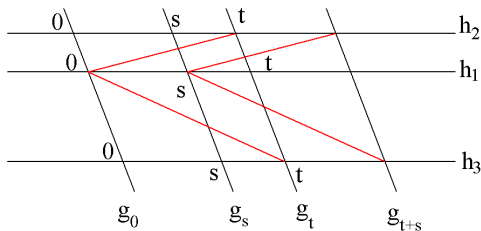


Abbildung 24: Kleiner Desargues: Translationsgruppe

Man bezeichne zunächst die Punktmenge einer Geraden h_1 der Parallelschar mit K , ziehe für jedes $s \in K$ dann eine Parallele g_s zu g_0 durch den richtigen Punkt auf h_1 , um eine Bijektion per Schnitt mit g_s mit den Punktmenge aller anderen Geraden der Parallelschar herzustellen. Eine wohldefinierte Addition $(s, t) \mapsto s + t$ ergibt sich durch

das in der Zeichnung skizzierte Verfahren: Sei $(g_0 \cap h_1) \vee (g_t \cap h_2) =: a$, wähle dazu die Parallele a' durch $g_s \cap h_1$ und schneide $a' \cap h_2$, dann müsste der Schnitt auf g_{s+t} liegen. Diese Konstruktion bestimmt g_{s+t} eindeutig nach Axiom 2A), ist aber nur dann wohldefiniert, wenn sie nicht von der Auswahl von h_2 abhängt. Testet man die Konstruktion an einer dritten Parallelen $h_3 \parallel h_2 \parallel h_1$, so sieht man, dass sie genau dann auf die gleiche Parallele von g_0 führt, wenn der kleine Satz von DESARGUES richtig ist.

2. Akt: Wie führt man eine Multiplikation auf K ein? Man zeichne zwei Koordinatenachsen aus, benutze die gefundene Bijektion auf beiden mit 0 im Schnittpunkt der beiden Achsen und einem Element $\neq 0$ aus K , das die Rolle der 1 übernehmen soll. Dann muss die Konstruktion der Multiplikation $(s, t) \mapsto st$ wie in der Skizze vorgenommen werden, die durch den Strahlensatz nahegelegt wird.

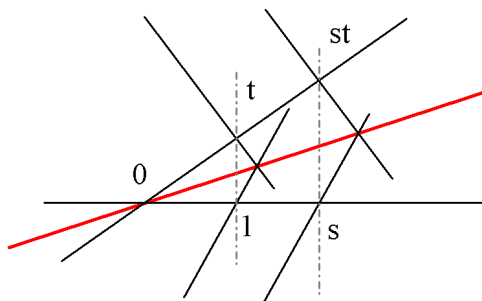


Abbildung 25: Großer Desargues: Existenz der Multiplikation

Diese Konstruktion darf aber nicht von der Auswahl der Achsen abhängen. Wie das Bild nahelegt, tut sie das genau dann nicht, wenn der große Satz von DESARGUES für die fragliche Geometrie richtig ist.

3. Akt: Ist die so konstruierte Multiplikation kommutativ? Offenbar dann, wenn in dieser Konstruktion die Umkehrung der Konstruktions-Reihenfolge das Resultat nicht verändert, wenn also im nächsten Bild $g \parallel g'$ wird.

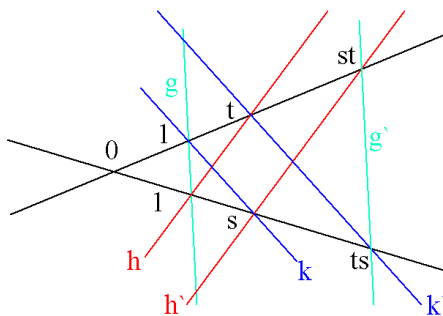


Abbildung 26: Pappos: Kommutativität der Multiplikation

Nach Konstruktion ist $h||h'$ und $k||k'$, also ist $g||g'$ genau dann richtig, wenn in unsere Geometrie der Satz von PAPPUS stimmt — was z.B. über echten Schiefkörpern wie den HAMILTONSchen Quaternionen nicht der Fall ist.

Diese drei Akte sind freilich nur Streiflichter auf dem sehr langen Weg von geometrisch-axiomatischen Forderungen zur Konstruktion geeigneter Koordinatenbereiche. Immerhin zeigen sie die interessante Wechselwirkung zwischen nichttrivialen geometrischen und starken algebraischen Eigenschaften.

Merkwürdigerweise ist geometrische Axiomatik in höheren Dimensionen wieder einfacher. Man erinnere sich an den ersten Beweis des großen Satzes von DESARGUES, der sich aus einem einfachen Projektionsargument ergab, weil die affine Ebene \mathbf{A} als Teil einer räumlichen Geometrie aufgefasst werden konnte — was eben nicht immer der Fall ist.

Die hier beschriebenen Konstruktionen machen deutlich, warum die Sätze von DESARGUES und PAPPUS manchmal *Schließungssätze* genannt werden. führt man die Konstruktionen Schritt für Schritt durch, so kommt es am Ende immer darauf an, dass sich eine bestimmte Figur wieder schließt, indem z.B. eine am Ende konstruierte Parallele einen bereits zuvor konstruierten Punkt trifft.

10 Nochmal Gruppen und Geometrien

Definition 10.1 und Bemerkungen. Eine „Projektivität“ ist eine Bijektion eines $\mathbf{P}^n(K)$ auf sich, die projektive Unterräume auf projektive Unterräume gleicher Dimension abbildet und Inzidenzen erhält. Die Projektivitäten bilden eine Gruppe, enthalten insbesondere die schon erwähnte „projektive lineare Gruppe“ $\text{PGL}_{n+1}(K) := \text{GL}_{n+1}/K^*E_{n+1}$. Manchmal enthält die $\text{PGL}_{n+1}(K)$ bereits alle Projektivitäten, aber nicht immer: Sie können z.B. mit echten Körperautomorphismen wie der komplexen Konjugation auf $K = \mathbf{C}$ kombiniert werden.

Wir beschränken uns im folgenden auf die $\text{PGL}_{n+1}(K)$.

Auf affinen Unterräumen operiert sie nicht „wohldefiniert“, sondern als „*gebrochen-lineare Abbildung*“. Sei etwa $K = \mathbf{R}$ und $M \in \text{GL}_{n+1}(\mathbf{R})$ besitze die Zeilen m_0, m_1, \dots, m_n , dann operiert sie auf $\mathbf{P}^n(\mathbf{R}) \supset \mathbf{A}^n(\mathbf{R})$ vermöge

$$Mx = M \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0x \\ m_1x \\ \vdots \\ m_nx \end{pmatrix} \Rightarrow M : \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ m_1x/m_0x \\ \vdots \\ m_nx/m_0x \end{pmatrix},$$

also nicht wohldefiniert auf den Punkten des \mathbf{A}^n , in denen $m_0x = 0$ ist; diese werden auf den Horizont abgebildet, das Phänomen haben wir schon bei der Zentralprojektion gesehen. Wie vermeidet man dieses Problem? Man beschränkt sich auf die „richtige“ Untergruppe, indem wir nur noch solche M zulassen, welche $m_0x = 0$ nur auf der „unendlich fernen Hyperebene“ $x_0 = 0$ zulassen.

Satz 10.1 (Affine Geometrie) Sei $[U] \subset \mathbf{P}^n(K)$ eine $n-1$ -dimensionale Hyperebene und $A_n(K) := \{M \in \text{PGL}_{n+1}(K) \mid M[U] = [U]\}$ die „affine Gruppe“ zu $\mathbf{A}^n(K) = \mathbf{P}^n(K) \setminus [U]$. Dann gilt

- a) $A_n(K) \cong \text{GL}_n(K) \ltimes K^n$, wobei K^n der Normalteiler der Translationen auf $\mathbf{A}^n \leftrightarrow K^n$ und GL_n die affinen Transformationen mit Fixpunkt 0 sind.
 b) Invariant unter $A_n(K)$ bleiben Streckenverhältnisse auf Geraden: Werden die Geraden jeweils mit K parametrisiert, dann ist für drei Punkte z_1, z_2, z_3 jeweils $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ unabhängig von der Parametrisierung und invariant unter der affinen Gruppe.

Beweis. $[U]$ sei o.B.d.A. durch $x_0 = 0$ definiert, $\mathbf{A}^n(K)$ wird dann also repräsentiert durch alle

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &\Rightarrow A_n(K) = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & \dots & 0 \\ & * & & \\ & & * & \\ & & & * \end{pmatrix} \bmod K^* E_{n+1} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & & & \\ \vdots & & M & \\ b_n & & & \end{pmatrix} \mid M \in \text{GL}_n(K), b_1, \dots, b_n \in K \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \mid M \in \text{GL}_n(K) \right\} \ltimes \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & & & \\ \vdots & & E_n & \\ b_n & & & \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in K^n \right\} \end{aligned}$$

operiert auf $\mathbf{A}^n(K)$ vermöge

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + b_1 \\ \vdots \\ x_n + b_n \end{pmatrix}.$$

Klar, dass beide Faktoren Untergruppen sind, als Schnitt nur die Einheitsmatrix haben (also das Einselement) und zusammen die ganze Gruppe erzeugen. Fehlt nur der Nachweis, dass der zweite Faktor ein Normalteiler ist. Das ergibt sich daraus, dass er Kern des Gruppenhomomorphismus

$$A_n(K) \rightarrow \text{GL}_n(K) : \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & & & \\ \vdots & & M & \\ b_n & & & \end{pmatrix} \mapsto M$$

ist. b) ist einfach nachzurechnen.

Ganz analog kann man verfahren, wenn man die affine Gruppe noch weiter einschränkt:

Satz 10.2 (Euklidische Geometrie) Sei nun $K = \mathbf{R}$ und für die (auf dem \mathbf{R}^{n+1} ausgeartete) Bilinearform $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ sei

$$\text{Eu}(n) := \text{Aut } \mathbf{E} = \{M \in A_n(\mathbf{R}) \subset \text{PGL}_{n+1}(\mathbf{R}) \mid \langle M(x), M(y) \rangle = \langle x, y \rangle, M[U] = [U]\}.$$

Dann ist $\text{Eu}(n) \cong O_n \times \mathbf{R}^n$ mit der üblichen orthogonalen Gruppe und dem Normalteiler $T = \mathbf{R}^n$ der Translationen.

Satz 10.3 (Elliptische Geometrie) Sei $K = \mathbf{R}$, $n + 1 = 3$ und $\langle x, y \rangle = x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2$ das Standard-Skalarprodukt. Dann ist

$$\text{Ell}(2) := \{M \in \text{PGL}_3(\mathbf{R}) \mid \langle M(x), M(y) \rangle = \langle x, y \rangle\} = O_3 / \pm E_3 =: PO_3$$

die Bewegungsgruppe der Einheitssphäre mit identifizierten Antipodenpunkten.

Geraden in dieser Geometrie sind Großkreise auf der Kugel, natürlich unter der gleichen Antipodenidentifikation. Die übliche sphärische Geometrie ist eine 2-fache Überlagerung der elliptischen Geometrie.

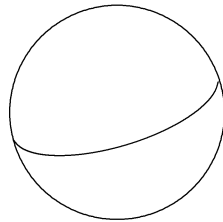


Abbildung 27: Elliptische Ebene

Satz 10.4 (Hyperbolische Geometrie, Klein–Beltrami–Modell) Im \mathbf{R}^3 sei die Bilinearform $[x, y] = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2$ gegeben (dabei $[x, x] = 0$ auf einem Kegel, < 0 in den beiden Komponenten seines Innern, > 0 außen). Das Kegelinere ergibt im $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ die „hyperbolische Ebene“ \mathbf{H} , repräsentiert durch die Punkte mit $x_0 = 1$ und $x_1^2 + x_2^2 < 1$, also dem Inneren des Einheitskreises, festgehalten durch die „hyperbolische Bewegungsgruppe“

$$\text{Hyp}(2) = \text{Aut } \mathbf{H} = \{M \in \text{PGL}_3(\mathbf{R}) \mid [Mx, My] = [x, y]\}.$$

Geraden sind dafür die Geradenabschnitte im Einheitskreis.

Das Parallelenaxiom gilt in dieser Geometrie nicht! Zur Einführung einer hyperbolischen Metrik bedenke man, dass das Doppelverhältnis von vier Punkten invariant ist und dass die hyperbolische Bewegungsgruppe die Kreislinie in sich überführt. Es bietet sich also an, die durch zwei Punkte $z_1, z_2 \in \mathbf{H}$ definierte Gerade bis zu ihren Schnittpunkten z_0, z_3 mit der Kreislinie zu verlängern und als Abstand

$$d(z_1, z_2) := \left| \log \left(\frac{z_1 - z_0}{z_1 - z_3} : \frac{z_2 - z_0}{z_2 - z_3} \right) \right|$$

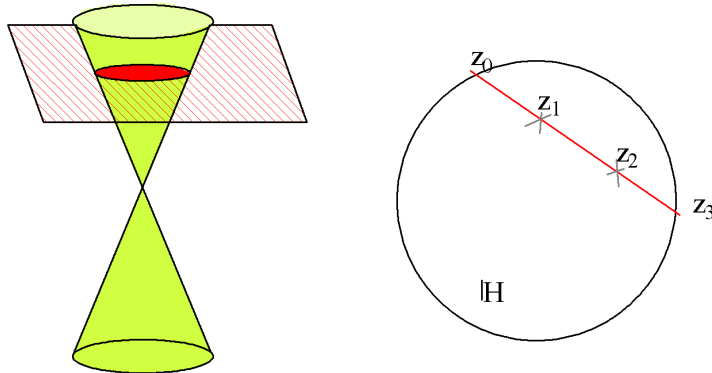


Abbildung 28: Hyperbolische Ebene, Klein-Beltrami-Modell

zu definieren mit irgendeiner vernünftigen Parametrisierung der Geraden durch reelle Zahlen, z.B. mit Hilfe euklidischer Abstände. Den Logarithmus nimmt man, damit der Abstand beim Aneinandersetzen von Strecken additiv wird, denn die Doppelverhältnisse multiplizieren sich (ausprobieren!).

Es gibt noch ein anderes Modell für die hyperbolischen Ebenen, das auf POINCARÉ zurückgeht, welches ebenfalls die Kreisscheibe benutzt (oder als Alternative die obere Halbebene, manchmal noch praktischer), in dem sich auch die Winkel bequem definieren lassen. Da es sich weniger direkt aus der projektiven Geometrie ergibt und einige Erfahrung im Umgang mit gebrochen-linearen Transformationen auf den komplexen Zahlen erfordert, sei es hier ausgespart.