

Fuchssche Gruppen

Jürgen Wolfart, Sommersemester 2018

Inhaltsverzeichnis

1	Der Werkzeugkasten	2
1.1	Riemannsche Zahlenkugel und Möbiustransformationen	2
1.2	Erzeugende und Invarianten der Möbiusgruppe	4
1.3	Hyperbolische Geometrie	6
1.4	Hyperbolische Metrik	8
1.5	Der Satz von Gauß–Bonnet	10
1.6	Dynamik	11
2	Diskrete Gruppen, diskontinuierliche Operationen	14
3	Das Dirichletpolygon	16
4	Parkettierung und Präsentation	19
5	Geometrische Konstruktion von Polyongruppen	24
6	Riemannsche Flächen	27
6.1	Der Bahnenraum der Fuchsschen Gruppen	27
6.2	Überlagerungen und Automorphismen	30
6.3	Automorphe Funktionen	33
7	Dreiecksgruppen und Belyĭfunktionen	36
7.1	Riemannsche Flächen und algebraische Kurven	36
7.2	Belyĭfunktionen und Uniformisierung	39
7.3	Dessins d'enfants	41

1 Der Werkzeugkasten

1.1 Riemannsche Zahlenkugel und Möbiustransformationen

Dieser Abschnitt ist im wesentlichen dem Skriptum [MW] entnommen, sollte also eine Wiederholung aus dem 3. Semester sein.

Als Menge ist die *Riemannsche Zahlenkugel* die Gaußsche Zahlenebene, vereinigt mit einem neuen Punkt namens ∞ , geschrieben $\bar{\mathbb{C}}$ oder $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Um auf $\hat{\mathbb{C}}$ Funktionentheorie zu betreiben, braucht man zunächst eine Topologie: Umgebungen von endlichen Punkten, d.h. von Punkten $z \in \mathbb{C}$, sind alle Teilmengen von $\hat{\mathbb{C}}$, welche eine offene Kreisscheibe $B_r(z)$ enthalten, also alle bisherigen Umgebungen. Diesen darf man aber noch den Punkt ∞ hinzufügen.

Umgebungen $U(\infty)$ sind alle Teilmengen von $\hat{\mathbb{C}}$, die außer ∞ noch eine unbeschränkte Menge vom Typ

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > C\}$$

enthalten, also den Außenraum einer abgeschlossenen Kreisscheibe vom Radius $C > 0$ in \mathbb{C} enthalten (es kommt nicht darauf an, dass 0 der Mittelpunkt dieser Kreisscheibe ist). Man überlegt sich leicht, dass mit dieser Definition eine vernünftige Topologie auf $\hat{\mathbb{C}}$ entsteht, die auf \mathbb{C} mit der bisher verwendeten Topologie übereinstimmt: Alle bisher konvergenten Folgen bleiben konvergent, alle bisher stetigen Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ bleiben stetig. Zusätzlich werden jetzt Folgen $z_n \in \mathbb{C}$ konvergent mit $\lim z_n = \infty$, welche die Eigenschaft

$$\text{für jedes } C \in \mathbb{R}, C > 0, \quad \text{sind fast alle } |z_n| > C$$

erfüllen. Meromorphe Funktionen f bleiben also stetig (als Abbildungen $D \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$) in ihren Polen z_j , wenn wir sie durch die Definition $f(z_j) := \infty$ ergänzen.

Konvention: Diese stetige Ergänzung wollen wir im folgenden überall vornehmen, z.B. vereinbaren wir für *Möbiustransformationen*

$$M\left(-\frac{d}{c}\right) := \infty, \quad \text{wenn } M(z) := \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit } c \neq 0,$$

$$M(\infty) := \infty, \quad \text{wenn } c = 0.$$

Für die Topologie ist $\hat{\mathbb{C}}$ die *Alexandroff-* oder *Ein-Punkt-Kompaktifizierung* von \mathbb{C} , für die algebraische Geometrie ist $\hat{\mathbb{C}}$ die *projektive Gerade* $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ über dem Körper der komplexen Zahlen. Der Grund, warum man von einer *Zahlenkugel* spricht, ist folgende Veranschaulichung: Man stelle sich eine Sphäre S^2 im \mathbb{R}^3 vor und identifiziere die Äquatorebene mit der Gaußschen Ebene \mathbb{C} . Den Nordpol der Sphäre bezeichne man mit ∞ ; dann schneidet jede \mathbb{R}^3 -Verbindungsgerade von ∞ zu den Punkten $z \in \mathbb{C}$ die Sphäre in genau einem Punkt $\neq \infty$, und jeder Punkt aus $S^2 \setminus \{\infty\}$ tritt für genau ein z als ein solcher Schnittpunkt auf, man erhält also eine (in beiden Richtungen stetige) Bijektion

$$\mathbb{C} \longleftrightarrow S^2 \setminus \{\infty\},$$

die *stereographische Projektion*. Verwendet man diese als Identifikation, erhält S^2 genau die Topologie, die wir oben auf $\hat{\mathbb{C}}$ eingeführt haben. Man kann zeigen, dass diese stereographische Projektion vorzügliche geometrische Eigenschaften hat: Es handelt sich um eine konforme Abbildung, Kreise auf \mathbb{C} werden zu Kreisen auf $S^2 \setminus \{\infty\}$, Geraden auf \mathbb{C} zu Kreisen auf S^2 , die nun allerdings durch den Nordpol ∞ laufen (vgl. z.B. Ch. 3 von [St]). Wir werden deswegen Kreise in \mathbb{C} und Geraden in \mathbb{C} , vereinigt mit ∞ , als $\hat{\mathbb{C}}$ -Kreise bezeichnen. Umgekehrt entspricht auch jedem Kreis auf der Sphäre ein $\hat{\mathbb{C}}$ -Kreis. Mittels der geometrischen Interpretation von $\hat{\mathbb{C}}$ als Sphäre können wir auch eine natürliche Metrik auf $\hat{\mathbb{C}}$ einführen, welche die Topologie induziert; diese stimmt auf \mathbb{C} allerdings nicht mit der sonst verwendeten euklidischen Metrik überein.

Wir brauchen mehr als nur Topologie, um Funktionen nicht nur stetig nach ∞ fortzusetzen, sondern dort auch komplexe Differenzierbarkeit einzuführen. Dazu wird $\hat{\mathbb{C}}$ mit der Struktur einer *Riemannschen Fläche* versehen, (komplex) eindimensionale Version einer *komplexen Mannigfaltigkeit*. Neben $\mathbb{C} \subset \hat{\mathbb{C}}$, wo komplexe Differenzierbarkeit wie bisher definiert ist, brauchen wir eine weitere *Karte*, d.h. eine offene Menge, die zusammen mit \mathbb{C} die Riemannsche Zahlenkugel überdeckt, zusammen mit einer Bijektion (*Kartenabbildung*) auf eine Teilmenge von \mathbb{C} : Wir nehmen dazu $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ und als Kartenabbildung

$$w : \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{1}{z} \quad \text{für } z \neq \infty$$

und (natürlich) $w(\infty) := 0$. Eine auf einem Gebiet in $\hat{\mathbb{C}}$ definierte \mathbb{C} -wertige Funktion heißt nun *holomorph*, wenn sie in ihrem Definitionsgebiet nach z und/oder nach w komplex differenzierbar ist. Dieser Begriff ist wohldefiniert, weil im gemeinsamen Durchschnitt \mathbb{C}^* beider Karten die Bijektion $z \leftrightarrow w = \frac{1}{z}$ sogar biholomorph ist. Ganz analog lässt sich der Begriff *meromorph* auf $\hat{\mathbb{C}}$ definieren.

Beispiel. Wenn $c \neq 0$, ist in einer Umgebung von ∞ die Möbiustransformation

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a + bw}{c + dw}$$

eine beschränkte Funktion und offensichtlich holomorph in w mit einer natürlichen holomorphen Fortsetzung in den Punkt ∞ ($\longleftrightarrow w = 0$) durch den Wert $\frac{a}{c}$. Mit dieser holomorphen Fortsetzung und der oben eingeführten Konvention können wir jetzt folgenden Sachverhalt formulieren:

Satz 1.1 *Möbiustransformationen sind biholomorphe Abbildungen der Riemannschen Zahlenkugel auf sich. Mit der Komposition als Verknüpfung bilden sie eine Gruppe, isomorph zur Gruppe $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$.*

Der *Beweis* folgt daraus, dass für alle $M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ die Vorschrift

$$M(z) := \frac{az + b}{cz + d} \in \hat{\mathbb{C}}$$

mit der oben eingeführten ergänzenden Konvention für den Punkt ∞ eine Operation der Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ auf $\hat{\mathbb{C}}$ durch biholomorphe Automorphismen definiert — in der Tat operiert das Produkt MM' wie die Hintereinanderausführung der durch M' und M definierten Möbiustransformationen (nachrechnen!) — und dass $z \mapsto M(z)$ genau dann die Identität ist, wenn $M \in \mathbb{C}^*E$ ein Vielfaches der Einheitsmatrix ist. Die inverse Matrix liefert also gerade die Umkehrabbildung. \square

Darüber hinaus kann man zeigen:

Aufgabe 1.1 *Jeder biholomorphe Automorphismus von $\hat{\mathbb{C}}$ ist eine Möbiustransformation, es ist also*

$$\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) \cong \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \quad .$$

Diese Gruppe werden wir im folgenden einfach als *Möbiusgruppe* bezeichnen.

Aufgabe 1.2 *Die auf $\hat{\mathbb{C}}$ meromorphen Funktionen bilden einen Körper. Dieser ist der Körper $\mathbb{C}(z)$ der rationalen Funktionen mit komplexen Koeffizienten.*

1.2 Erzeugende und Invarianten der Möbiusgruppe

Hilfssatz 1.1 *Nichttriviale Elemente der Möbiusgruppe (d.h. $\notin \mathbb{C}^*E$) haben einen oder zwei Fixpunkte auf $\hat{\mathbb{C}}$.*

Beweis. Die Fixpunktgleichung $az + b = cz^2 + dz$ ist quadratisch außer im Fall $c = 0$, und in diesem Fall ist $M(\infty) = \infty$. \square

Satz 1.2 *Die Möbiusgruppe operiert dreifach transitiv auf $\hat{\mathbb{C}}$ und wird erzeugt von Transformationen vom Typ $z \mapsto z + b$, $z \mapsto az$, $z \mapsto 1/z$, also*

$$T_b := \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (b \in \mathbb{C}), \quad D_a := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (a \in \mathbb{C}^*) \quad \text{und} \quad J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Heißt: Zu je drei verschiedenen z_1, z_2, z_3 und $w_1, w_2, w_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ gibt es ein $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ mit $M(z_j) = w_j$ für $j = 1, 2, 3$, und jede Möbiustransformation lässt sich als Produkt von Matrizen der angegebenen Typen schreiben.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass eine Möbiustransformation existiert mit

$$M(z_3) = \infty, \quad M(z_2) = 0, \quad M(z_1) = 1$$

(warum?). Dazu verifiziere man einfach, dass für jedes $z_3 \in \mathbb{C}$ die Abbildung JT_{-z_3} den Punkt z_3 nach ∞ schickt und z_1, z_2 nach u_1, u_2 , dass T_{-u_2} den Punkt u_2 nach 0 schickt, u_1 auf $w_1 \neq 0$ und ∞ festlässt, und dass $D_{w_1^{-1}}$ die Punkte 0 und ∞ festlässt und w_1 auf 1 abbildet. Nebenbei ergibt sich, dass wir nur die angegebenen Typen von Transformationen verwendet haben; aus dem Hilfssatz folgt, dass jede Möbiustransformation durch die Bilder eines Punktetripels auch schon eindeutig bestimmt ist. \square

Beispiel 1.1 Die „Cayley-Transformation“ $C(z) := \frac{-iz+1}{z-i}$ bildet das Innere $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ des Einheitskreises auf die obere Halbebene $\mathbb{H} := \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} w > 0\}$ ab, umgekehrt $C^{-1}(w) := \frac{iw+1}{w+i}$ \mathbb{H} auf \mathbb{D} .

Dass das so ist, rechnet man z.B. so nach: Um $C^{-1}(\mathbb{H}) \subset \mathbb{D}$ einzusehen, sei $y > 0$, dann ist $C^{-1}(x+iy) = \frac{i(x+iy)+1}{x+iy+i} = \frac{1-y+ix}{x+(1+y)i}$ mit Betragsquadrat

$$\frac{(1-y)^2 + x^2}{(1+y)^2 + x^2} < 1 \quad \text{und} \quad = 1 \quad \text{für} \quad y = 0.$$

Wir werden gleich sehen, dass dies ein sehr typisches Beispiel ist. Man beachte, dass sich beide Typen von $\hat{\mathbb{C}}$ -Kreisen beschreiben lassen durch eine Gleichung vom Typ

$$\alpha|z|^2 + \beta z + \overline{\beta z} + \gamma = 0 \quad \text{mit} \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C}, \alpha \text{ und } \beta \text{ nicht beide } = 0.$$

An Hand dieser Form sieht man leicht ein, dass die Möbiustransformation J alle $\hat{\mathbb{C}}$ -Kreise wieder in $\hat{\mathbb{C}}$ -Kreise überführt, indem man die Gleichung

$$\alpha|z|^{-2} + \beta z^{-1} + \overline{\beta z^{-1}} + \gamma = 0$$

mit $|z|^2 = z\bar{z}$ multipliziert. Da die Translationen T_b und die Dilatationen D_a erst recht $\hat{\mathbb{C}}$ -Kreise in $\hat{\mathbb{C}}$ -Kreise abbilden und da sich alle Möbiustransformationen in diese drei Typen zerlegen lassen, ergibt sich daraus

Satz 1.3 Die Möbiusgruppe operiert (sogar transitiv) auf der Menge aller $\hat{\mathbb{C}}$ -Kreise. \square

Die Transitivität ergibt sich aus Satz 1.2, weil jedes Punktetripel in $\hat{\mathbb{C}}$ eindeutig einen $\hat{\mathbb{C}}$ -Kreis bestimmt. Überträgt man die Operation von $\operatorname{PGL}_2(\mathbb{C})$ vermöge der stereographischen Projektion auf die Sphäre, so erhält man auch dort eine transitive Operation auf der Menge aller Kreise; die Gruppe ist also weit größer als die Drehgruppe O_3 der Sphäre.

Aufgabe 1.3 Seien $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden. Man nennt

$$D(z_1, z_2; z_3, z_4) := \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$$

das „Doppelverhältnis“ der vier Punkte z_1 bis z_4 (die Definition lässt sich in naheliegender Weise ausdehnen auf Fälle, in denen einer der Punkte ∞ ist oder zwei Punkte zusammenfallen). Man zeige, dass D invariant ist unter der Operation der Möbiusgruppe, d.h. dass $D(z_1, z_2; z_3, z_4) = D(M(z_1), M(z_2); M(z_3), M(z_4))$ für alle $M \in \operatorname{PSL}_2(\mathbb{C})$.

Das Doppelverhältnis liefert ein schönes Kriterium dafür, wann vier Punkte von $\hat{\mathbb{C}}$ auf einem $\hat{\mathbb{C}}$ -Kreis liegen:

Aufgabe 1.4 Man zeige: $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ liegen genau dann auf einem $\hat{\mathbb{C}}$ -Kreis, wenn ihr Doppelverhältnis reell ist.

1.3 Hyperbolische Geometrie

Für uns werden $\hat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (auch ein $\hat{\mathbb{C}}$ -Kreis!) und die darauf senkrecht stehenden $\hat{\mathbb{C}}$ -Kreise besonders interessant werden, das sind die Geraden orthogonal zu \mathbb{R} und die Kreise mit Mittelpunkt auf \mathbb{R} . Klar, dass $\text{PGL}_2(\mathbb{R})$ den $\hat{\mathbb{C}}$ -Kreis $\hat{\mathbb{R}}$ in sich überführt und wegen Satz 1.3 und der Konformität auch die Menge aller darauf senkrechten $\hat{\mathbb{C}}$ -Kreise in sich abbildet.

Definition 1.1 Die obere Halbebene \mathbb{H} nennen wir die „hyperbolische Ebene“. Ihre Punkte seien die Punkte der hyperbolischen Geometrie, die hyperbolischen Geraden seien die auf $\hat{\mathbb{R}}$ orthogonalen $\hat{\mathbb{C}}$ -Kreise, geschnitten mit \mathbb{H} . Die Winkel zwischen zwei sich schneidenden hyperbolischen Geraden seien die euklidischen Winkel zwischen ihren Tangenten im Schnittpunkt. Ebensogut kann man vermöge der Cayley-Transformation anstelle von \mathbb{H} die offene Einheitskreisscheibe \mathbb{D} als hyperbolische Ebene ansehen; in diesem Modell sind die hyperbolischen Geraden Segmente der auf dem Rand $|z| = 1$ orthogonalen $\hat{\mathbb{C}}$ -Kreise (also Durchmesser-Geraden, wenn sie durch den Mittelpunkt laufen).

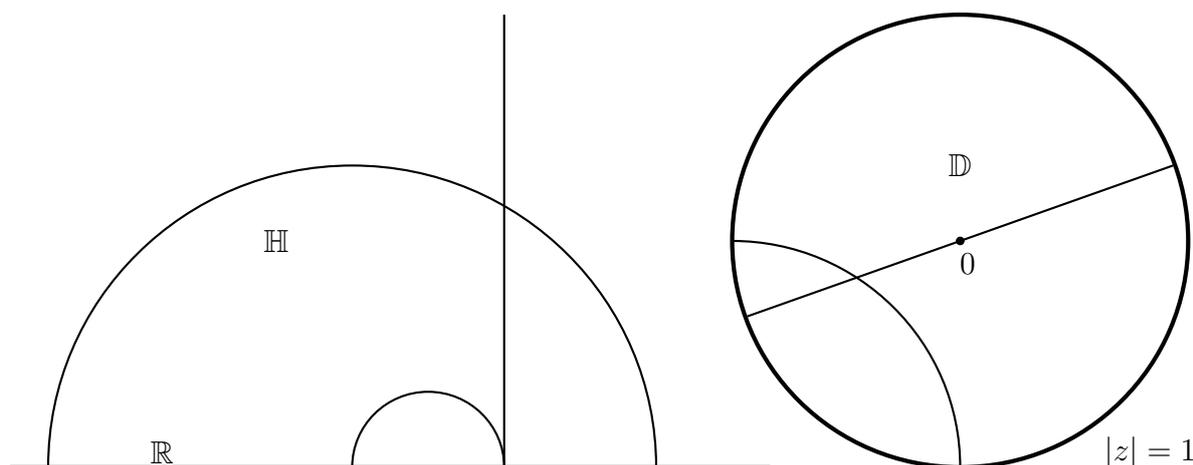


Abbildung 1: Hyperbolische Geraden in \mathbb{H} und \mathbb{D}

Ziel ist es jetzt, die biholomorphen Automorphismen der hyperbolischen Ebene zu bestimmen, kurz gesagt $\text{Aut } \mathbb{H}$ bzw. $\text{Aut } \mathbb{D}$.

Hilfssatz 1.2 $\text{Aut } \mathbb{H} \cap \text{PGL}_2(\mathbb{C}) \cong \text{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Die Cayleytransformation konjugiert diese Gruppe in die Gruppe

$$\text{Aut } \mathbb{D} \cap \text{PGL}_2(\mathbb{C}) \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\} / \{\pm E\}.$$

Beweis. Klar, dass jene Matrizen, welche $\hat{\mathbb{R}}$, also den Rand von \mathbb{H} in sich abbilden, mit reellen Koeffizienten geschrieben werden können. Division durch $\sqrt{|\det M|}$ normiert diese

auf die Determinante ± 1 . Für $z = x + iy \in \mathbb{H}$ und $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ rechnet man nach, dass

$$\text{Im } M(z) = \frac{y \det M}{|cz + d|^2},$$

für Automorphismen von \mathbb{H} kommen also nur positive Determinanten in Frage. Die entsprechende Aussage über \mathbb{D} kann man analog beweisen oder durch Konjugation mit C . \square

Hilfssatz 1.3 (H.A. Schwarz) $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ sei holomorph mit $f(0) = 0$. Dann gilt für alle $z \in \mathbb{D}$

$$|f(z)| \leq |z|.$$

Wenn ein $z \in \mathbb{D}$, $z \neq 0$ existiert, in dem $|f(z)| = |z|$, dann gibt es für alle $z \in \mathbb{D}$ ein $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$, mit $f(z) = cz$.

Beweis. $f(z)/z$ ist holomorph auf ganz \mathbb{D} und erfüllt für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes z mit $|z| = 1 - \varepsilon$ die Ungleichung $|f(z)/z| < 1/(1 - \varepsilon)$. Nach dem Maximumprinzip und mit $\varepsilon \rightarrow 0$ ergibt sich daraus

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq 1 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{D}.$$

Wird dieses Maximum in einem Punkt angenommen, muss $f(z)/z$ konstant sein. \square

Hilfssatz 1.4 $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ operiert zweifach transitiv auf $\hat{\mathbb{R}}$ und transitiv auf den „Fahnen“ der hyperbolischen Ebene, d.h. auf den Paaren (g, z) von hyperbolischen Geraden g und den mit ihnen inzidierenden Punkten $z \in g$.

(Das entsprechende Resultat gilt natürlich ebenso für die auf \mathbb{D} operierende Möbius-Untergruppe.)

Beweis. Für die erste Aussage genügt es zu zeigen, dass man jedes Punktepaar (r, s) auf \mathbb{R} in das Paar $(\infty, 0)$ abbilden kann: Das geht mit

$$\begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : r \mapsto 0 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} : 0 \mapsto \infty$$

und einer entsprechenden anschließenden Translation (die ∞ fest lässt) für s . Analog zeigt man, dass sich jede hyperbolische Gerade g auf den \mathbb{H} -Anteil der imaginären Achse abbilden lässt – indem man nämlich ihre Endpunkte auf $\hat{\mathbb{R}}$ nach 0 und ∞ abbildet – und einen beliebigen Punkt auf dieser Geraden (jetzt also von der Form iy) nach i abbildet mit Hilfe einer Transformation, welche 0 und ∞ fest lässt: Man nehme dazu

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{y}} & 0 \\ 0 & \sqrt{y} \end{pmatrix} : z \mapsto \frac{z}{y} \quad . \quad \square$$

Satz 1.4 *Alle holomorphen Automorphismen von \mathbb{H} werden durch die Möbiustransformationen in $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ gegeben.*

Wegen Hilfssatz 1.2 genügt es zu *beweisen*, dass jeder holomorphe Automorphismus von \mathbb{H} durch eine Möbiustransformation gegeben ist; wir dürfen sogar \mathbb{H} durch \mathbb{D} ersetzen. Sei also $f \in \mathrm{Aut} \mathbb{D}$, $f(z_0) = 0$, $f(0) = z_1$. Wegen der Transitivität aus Hilfssatz 1.4 können wir geeignete Möbiustransformationen aus $\mathrm{Aut} \mathbb{D}$ vor- und nachschalten, so dass wir o.B.d.A. annehmen können, dass $f(0) = 0$. Nach dem Schwarz'schen Lemma (HS 1.3) wissen wir, dass $|f(z)| \leq |z|$, dass aber auch für die Umkehrfunktion $h := f^{-1}$ ebenso $|z| = |h(w)| \leq |w| = |f(z)|$, dass also $|z| = |f(z)|$ für alle $z \in \mathbb{D}$ richtig ist. Nach Hilfssatz 1.3 ist f somit linear, als Möbiustransformation gegeben durch

$$\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} : z \mapsto e^{2i\varphi} z \quad . \quad \square$$

1.4 Hyperbolische Metrik

Hyperbolische Abstands- und Volumenmessung kann man gleichermaßen in \mathbb{H} und in \mathbb{D} einführen – oder durch Integraltransformationen via Cayleytransformation ineinander überführen. Wir werden uns hier der Einfachheit halber auf \mathbb{H} beschränken.

Definition 1.2 *Linien- und Volumenelement in \mathbb{H} sind gegeben durch*

$$\frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{y} \quad \text{bzw.} \quad \frac{dx dy}{y^2} \quad ,$$

ausführlicher gesagt: Die Länge einer glatten Kurve mit Parameterdarstellung $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{H} : t \mapsto p(t)$ wird gegeben durch das Integral $\int_a^b |p'(t)| / \mathrm{Im} p(t) dt$ und der Flächeninhalt einer messbaren Menge $F \subset \mathbb{H}$ durch das Integral $\int_F y^{-2} dx dy$.

Klar: Diese Definition macht nur dann Sinn, wenn die Integrale invariant sind unter allen Transformationen $M = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Hilfssatz 1.5 *Ja, diese Invarianz gilt.*

Man überlege sich zum *Beweis*, dass y bei dieser Transformation ersetzt wird durch $\mathrm{Im} M(z) = y / |cz + d|^2$ (vgl. den Beweis von HS 1.2), dass $M'(z) = (cz + d)^{-2}$ ist, und dass das Volumenelement $dx dy$ bei der Transformation den Faktor $|M'(z)|^2$ aufnimmt. \square

Hilfssatz 1.6 *a) Je zwei Punkte $z \neq w \in \mathbb{H}$ liegen auf genau einer hyperbolischen Geraden.*

b) Der kürzeste Weg zwischen z und w verläuft auf dieser Verbindungsgeraden, d.h. die

hyperbolischen Geraden sind geodätische Linien.

c) $d(z, w)$ sei die Länge dieses kürzesten Weges; dann definiert d eine Metrik auf \mathbb{H} .

d) Diese Metrik ist $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ -invariant, außerdem invariant unter den „Spiegelungen“ der hyperbolischen Geometrie, d.h. den antikonformen Transformationen

$$z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad ad - bc = -1.$$

e) Zu je zwei Punkten $z \neq w \in \mathbb{H}$ existiert eine hyperbolische „Mittelsenkrechte“ g , d.h. eine hyperbolische Gerade mit der Eigenschaft

$$d(z, u) = d(w, u) \quad \Leftrightarrow \quad u \in g.$$

Aufgabe 1.5 Beweisen Sie Teil a) und Teil e) mit Hilfe euklidischer(!) Elementargeometrie.

Beweis. Vermöge einer $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ -Transformation dürfen wir annehmen, dass $z = i$ und $w = Ki$ ist mit $K > 1$, und der Verbindungsweg von der Form

$$[1, K] \rightarrow \mathbb{H} : t \mapsto p(t) = x(t) + it, \quad x(1) = x(K) = 0$$

ist. Der Integrand des Längenintegrals wird nur dann minimal, wenn $x'(t) \equiv 0$ ist, also wenn $p(t) \equiv it$. Dann ist $d(i, Ki) = \ln(K)$, und es ist leicht zu sehen, dass d alle Eigenschaften einer Metrik hat. Die Invarianz unter $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ folgt aus Hilfssatz 1.5. Spiegelungen entstehen als Komposition von $z \mapsto -\bar{z}$ und $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ -Transformationen, und die Invarianz der Kurvenlänge unter $x(t) + iy(t) \mapsto -x(t) + iy(t)$ ist offensichtlich. \square

Bemerkungen. 1) Als Berechnungsmethode von $d(z, w)$ ist das Längenintegral im allgemeinen sehr unpraktisch. Besser ist es, sich daran zu erinnern, dass das Doppelverhältnis von vier Punkten ebenfalls $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ -invariant ist; in dem oben benutzten Spezialfall ist $K = D(iK, i; 0, \infty)$. Aus beiden Überlegungen folgt, dass der hyperbolische Abstand von z_1 und z_2 auch berechnet werden kann als

$$d(z_1, z_2) = |\ln(D(z_1, z_2; z_3, z_4))|,$$

wenn man z_3 und z_4 als die beiden Endpunkte der hyperbolischen Verbindungsgeraden durch z_1, z_2 auf dem Rand $\hat{\mathbb{R}}$ nimmt.

2) Man merke sich gut, dass in der Nähe von Punkten mit Imaginärteil $y = 1$ die hyperbolischen Längen annähernd gleich den euklidischen Längen sind, dass aber für große y hyperbolische Längen beliebig klein, für kleine y beliebig groß im Vergleich zu den euklidischen Längen werden. Entsprechendes gilt für Volumina.

3) Überträgt man die hyperbolische Metrik auf das Kreisscheiben-Modell, so werden kleine euklidische Strecken in der Nähe des Randes – hyperbolisch gesehen – sehr groß. In \mathbb{D} sind euklidische Drehungen um den Nullpunkt, gegeben durch Matrizen $\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}$, gleichzeitig auch hyperbolische Bewegungen. Aus der Invarianz des hyperbolischen Abstands folgt

damit, dass die Punktmenge $\{z \in \mathbb{D} \mid d(0, z) = r\}$ einen euklidischen Kreis bildet. Aus der Kreisinvarianz der Möbiustransformationen und aus der Transitivität von $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ folgt somit: *Hyperbolische Kreise sind auch euklidische Kreise*, allerdings ist ihr hyperbolischer Mittelpunkt in der Regel nicht ihr euklidischer Mittelpunkt.

4) Die $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ -Transformationen und ihr antikonformes Gegenstück, die Spiegelungen, machen zusammen die gesamte hyperbolische Bewegungsgruppe aus.

5) Außer dem hier benutzten sogenannten *Poincaré-Modell* der hyperbolischen Ebene gibt es noch ein weiteres sogenanntes *Beltrami-Klein-Kreisscheiben-Modell*, in welchem die Geraden einfach die Sehnen der Kreisscheibe sind. In diesem ist die Definition der Winkel viel komplizierter, und die hyperbolische Bewegungsgruppe ist nicht so offensichtlich konform/antikonform. Für die Funktionentheorie ist es darum nicht gut geeignet. Durch geschickt gewählte Projektionen im \mathbb{R}^3 lassen sich beide Modelle ineinander transformieren.

6) $K \subset \mathbb{H}$ heißt (hyperbolisch) *konvex*, wenn die hyperbolische Verbindungsstrecke zwischen je zwei Punkten $z, w \in K$ ganz in K verläuft. Jede hyperbolische Gerade g teilt \mathbb{H} in zwei Halbebenen. Am Beispiel der positiven imaginären Achse (Verbindungsgerade der Randpunkte $0, \infty$) sieht man, dass Halbebenen konvex sind. Ebenso sind hyperbolische *Polygone* (Durchschnitte von Halbebenen) konvex.

Aufgabe 1.6 Sei $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ eine holomorphe Funktion und $z_1 \neq z_2 \in \mathbb{H}$. Beweisen Sie: $d(f(z_1), f(z_2)) \leq d(z_1, z_2)$. Wenn hier das Gleichheitszeichen gilt, ist $f \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

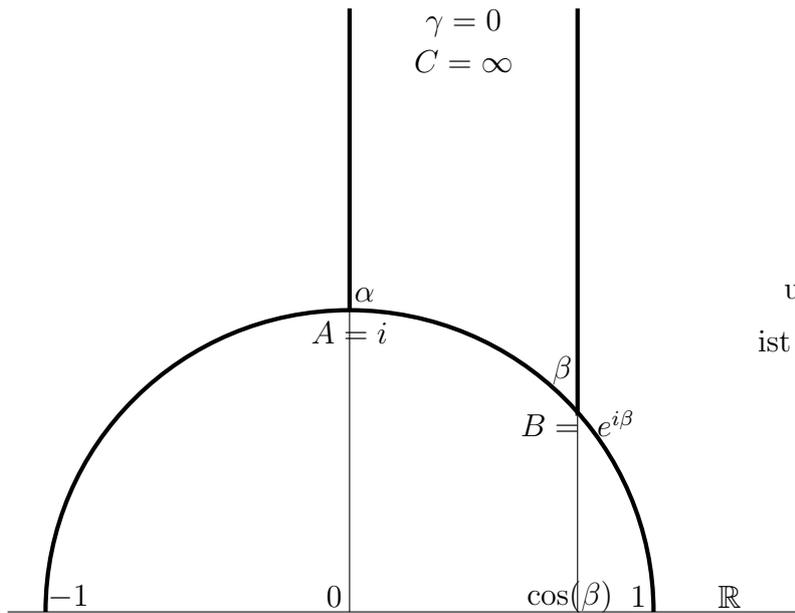
1.5 Der Satz von Gauß–Bonnet

Satz 1.5 *Hyperbolische Dreiecke mit den Winkeln α, β, γ haben den Flächeninhalt*

$$\pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

Die Winkel werden hier im Bogenmaß gemessen. 0 als Winkel ist zugelassen; dabei ist dann der Eckpunkt des Dreiecks ein Punkt auf dem Rand $\hat{\mathbb{R}}$ von \mathbb{H} (*Spitze* des Dreiecks). Nebenbei sieht man deutlich, dass im Gegensatz zur euklidischen Geometrie die Winkelsumme im Dreieck hier $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ erfüllt. (Hyperbolische Dreiecke sind bis auf Kongruenz, d.h. bis auf hyperbolische Bewegungen, eindeutig durch ihre Winkel bestimmt!)

Den *Beweis* führen wir zunächst für den Spezialfall $\alpha = \frac{\pi}{2}, \gamma = 0$. O.B.d.A. (Vorschalten einer hyperbolischen Bewegung) dürfen wir annehmen, dass $i, e^{i\beta} = \cos(\beta) + i \sin(\beta), \infty$ die drei Eckpunkte des Dreiecks sind, dass das Dreieck also die folgende Gestalt hat:



Nach Definition 1.2
und dem Satz von Fubini
ist das Volumen des Dreiecks

$$\int_0^{\cos(\beta)} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} dx ,$$

im Ergebnis also $= \int_0^{\cos(\beta)} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(\cos(\beta)) - \arcsin(0) = \frac{\pi}{2} - \beta$ wie behauptet (man beachte $\cos(\beta) = \sin(\frac{\pi}{2} - \beta)$). Da sich das allgemeine Dreieck mit Winkeln $\alpha, \beta, 0$ als Vereinigung zweier Dreiecke mit den Volumina $\frac{\pi}{2} - \alpha$ und $\frac{\pi}{2} - \beta$ schreiben lässt, ist die Behauptung auch in diesem Fall richtig (im Fall stumpfer Winkel muss man das Argument etwas modifizieren, nämlich wie?). Schließlich beweist man die Volumenformel für beliebige Dreiecke dadurch, dass man das Dreieck mit drei positiven Winkeln als Differenz eines größeren Dreiecks mit einer Spitze minus zwei kleinerer Dreiecke mit Spitze darstellt. Details seien der Leserin überlassen.

1.6 Dynamik

Wir werden im folgenden die reellen Möbiustransformationen $M \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ mit ihren Matrizen identifizieren – eindeutig bis auf das Vorzeichen –, soweit Missverständnisse ausgeschlossen sind. Bezüglich ihrer geometrischen Wirkung zerfallen diese $M \neq \pm E$ in drei Klassen.

Definition 1.3 $M = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$, $\neq \pm E$, heißt
 „parabolisch“, wenn $|a + d| = 2$,
 „elliptisch“, wenn $|a + d| < 2$,
 „hyperbolisch“, wenn $|a + d| > 2$ ist.

(Da die Spuren invariant unter Konjugation sind, ist diese Klassifikation genauso sinnvoll für die entsprechenden Elemente von $\text{Aut } \mathbb{D}$.) Der Sinn dieser Klassifikation durch die Spur der Matrix zeigt sich zunächst am Fixpunktverhalten: Für $c = 0$ und $a = d = \pm 1$ ist

∞ der einzige Fixpunkt von M , für $c = 0$, $a = d^{-1} \neq \pm 1$ hat M einen weiteren reellen Fixpunkt, und für $c \neq 0$ lautet die Fixpunktgleichung

$$az + b = cz^2 + dz \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{2c} (a - d \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4})$$

(man eliminiere b mit Hilfe von $\det(M) = 1$), es gilt also

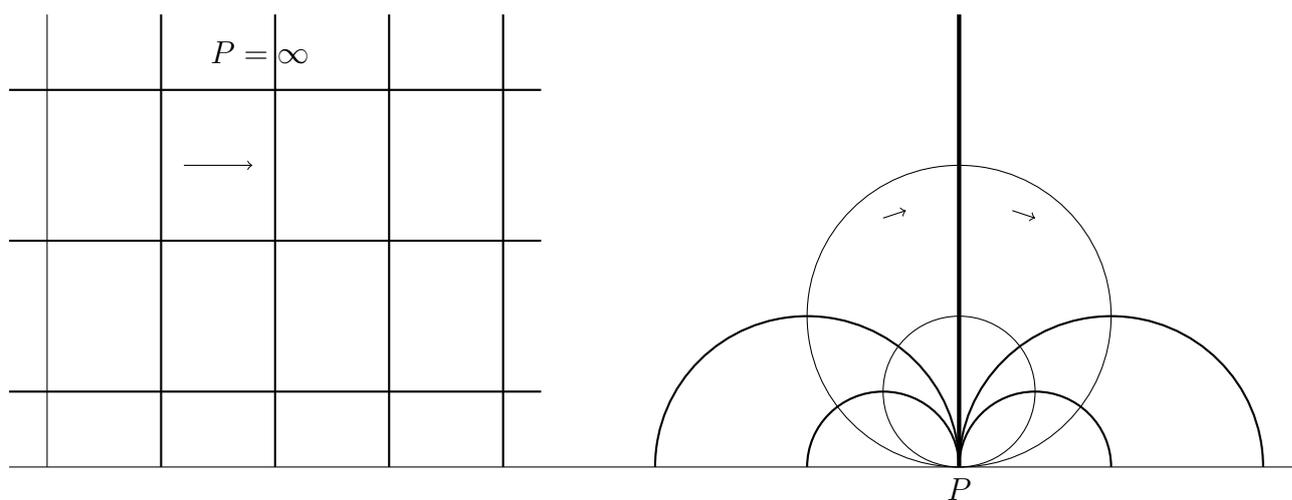
Hilfssatz 1.7 *Parabolische $M \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ haben genau einen Fixpunkt auf $\hat{\mathbb{R}}$, elliptische M haben einen Fixpunkt in \mathbb{H} (sowie einen dazu konjugiert komplexen Fixpunkt), hyperbolische M haben zwei Fixpunkte auf $\hat{\mathbb{R}}$.*

Ein zumindest qualitatives Bild der Wirkung von M auf \mathbb{H} macht man sich am besten klar, wenn man die Fixpunkte von M in eine geschickt gewählte Lage bringt:

Hilfssatz 1.8 *Sei P ein Fixpunkt von $M \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, $M \neq \pm E$, und sei $T \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. Dann ist $T(P)$ Fixpunkt von TMT^{-1} , und dieses konjugierte Element ist vom gleichen Typ wie M . \square*

Wir kennen aus Hilfssatz 1.4 die Transitivitätseigenschaften von $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$: Wenn M parabolisch ist, lässt sich der Fixpunkt also nach ∞ bringen und M ist dann von der Form $z \mapsto z + b$, $b \in \mathbb{R}, \neq 0$. Jede (euklidische) Parallele zu \mathbb{R} wird dann in sich übergeführt, und die dazu orthogonalen Parallelen zur positiv imaginären Achse werden parallel verschoben. Transformiert man den Fixpunkt zurück nach \mathbb{R} , so ergibt sich daraus die Aussage von

Hilfssatz 1.9 *Sei $P \in \hat{\mathbb{R}}$ Fixpunkt des parabolischen Elements $M \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Dann führt M die Schar der von P ausgehenden hyperbolischen Geraden in sich über. und jeder der zu dieser Geradenschar orthogonalen $\hat{\mathbb{C}}$ -Kreise (tangential zum Rand von \mathbb{H}) wird in sich übergeführt. \square*

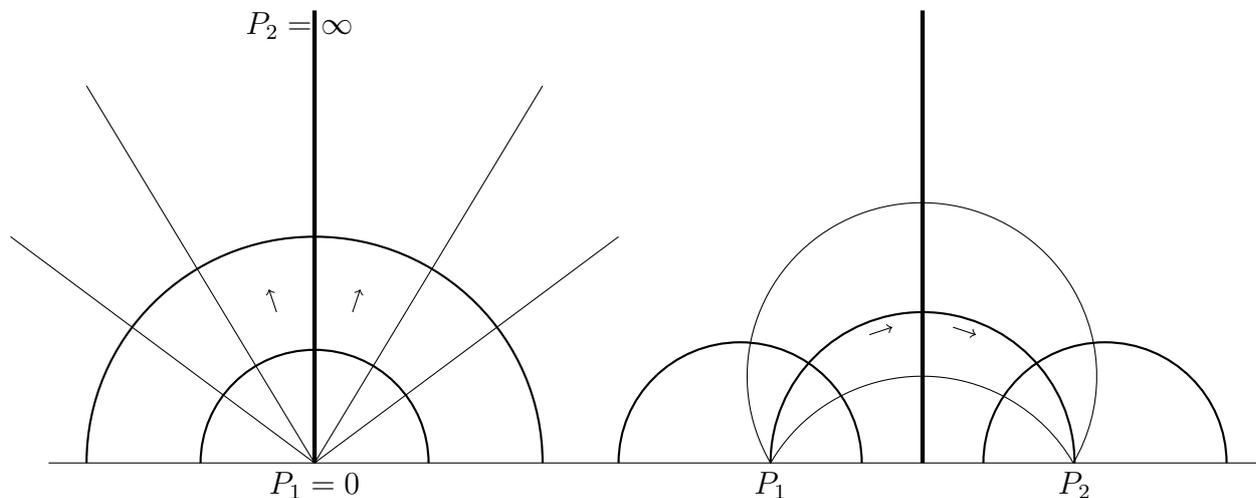


Zur Beschreibung elliptischer Transformationen geht man am besten über zum Kreisscheibenmodell \mathbb{D} und transformiert die beiden Fixpunkte nach 0 und ∞ , weil dann das elliptische M einfach eine euklidische Drehung ist, man vergleiche Bemerkung 3 am Ende von Abschnitt 1.4. Die entsprechende Aussage für \mathbb{H} lautet dann

Hilfssatz 1.10 Sei $P \in \mathbb{H}$ Fixpunkt des elliptischen Elements $M \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$. Dann führt M die Schar der hyperbolischen Geraden durch den Punkt P in sich über und dreht jeden (hyperbolischen) \hat{C} -Kreis mit (hyperbolischem!) Mittelpunkt P . \square

Für hyperbolische M transformiert man die beiden Fixpunkte am besten nach 0 und ∞ , dann ist $M = \pm \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix} : z \mapsto r^2 z, r^2 \neq 1$. Genau eine hyperbolische Gerade wird in sich übergeführt (hier die positive imaginäre Achse), allgemein die Verbindungsgerade der beiden Fixpunkte, zusätzlich aber noch alle \hat{C} -Kreise, welche die beiden Fixpunkte verbinden, im Fall der Fixpunkte $0, \infty$ die durch 0 verlaufenden euklidischen Halbgeraden in \mathbb{H} .

Hilfssatz 1.11 Seien $P_1, P_2 \in \hat{\mathbb{R}}$ die beiden Fixpunkte des hyperbolischen Elements $M \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$. Dann führt M die hyperbolische Verbindungsgerade von P_1 un P_2 (die „Achse“ von M) in sich über und ebenso jeden \hat{C} -Kreis, der beide enthält. Orthogonal zu diesen Kreisen gibt es eine Schar hyperbolischer Geraden, die durch M ineinander abgebildet werden. \square



Aufgabe 1.7 g sei eine hyperbolische Gerade, $z \in \mathbb{H}$, $d(z, g)$ das Minimum aller Abstände von z zu den Punkten $w \in g$ der Geraden. Sei $d > 0$; was für eine Punktmenge ist $\{z \in \mathbb{H} \mid d(z, g) = d\}$?

2 Diskrete Gruppen, diskontinuierliche Operationen

Definition 2.1 Sei $G \subset \hat{\mathbb{C}}$ ein Gebiet, $\Gamma \subset \text{Aut}(G)$ eine Gruppe biholomorpher Automorphismen von G . Die Gruppe Γ „operiert diskontinuierlich“ auf G , wenn die Bahn Γz für kein $z \in G$ einen Häufungspunkt in G besitzt. Die Häufungspunkte von Γz , $z \in G$, heißen „Limespunkte“ von Γ ; sie liegen auf dem Rand ∂G von G und bilden die „Limesmenge“ $L(\Gamma)$.

Beispiel 2.1 Für $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ operiert die additive Gruppe $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ per Addition diskontinuierlich auf dem Gebiet \mathbb{C} . Die Limesmenge besteht einzig aus dem Punkt ∞ .

Aufgabe 2.1 Finden Sie alle diskontinuierlich auf \mathbb{C} operierenden Gruppen!

Definition 2.2 Eine diskontinuierlich auf \mathbb{H} operierende Gruppe $\Gamma \subset \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ wird „Fuchssche Gruppe“ genannt. Wenn $L(\Gamma) = \hat{\mathbb{R}}$, heißt sie „von 1. Art“, andernfalls „von 2. Art“. Ganz entsprechend wird der Begriff auch für Gruppen von Möbiustransformationen gebraucht, die auf \mathbb{D} operieren.

Beispiel 2.2 Sei Γ die von einem parabolischen bzw. hyperbolischen Element γ erzeugte zyklische Gruppe. Γ ist Fuchssche Gruppe mit einem bzw. zwei Limespunkten. (Fuchssche Gruppen mit höchstens zwei Limespunkten heißen „elementar“.) Wenn γ elliptisch von unendlicher Ordnung ist, operiert Γ nicht diskontinuierlich.

Aufgabe 2.2 Gibt es eine elementare nicht-abelsche Fuchssche Gruppe?

Definition 2.3 $\Gamma \subset \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ heißt „diskret“, wenn die zugehörige Matrizenmenge eine diskrete Untermenge des $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ ist.

Satz 2.1 (Poincaré) $\Gamma \subset \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ operiert genau dann diskontinuierlich auf \mathbb{H} , wenn Γ diskret ist.

Beweis. Sei zunächst Γ nicht diskret. Dann gibt es eine Folge M_n von Matrizen in $\Gamma \subset \text{SL}_2(\mathbb{R})$, welche gegen ein $M \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ konvergiert. Dann konvergiert für jedes $z \in \mathbb{H}$ die Folge $M_n(z)$ gegen $M(z) \in \mathbb{H}$ im Widerspruch zur Diskontinuität.

Jetzt sei umgekehrt Γ nicht diskontinuierlich, aber diskret. Dann gibt es ein $z_0 \in \mathbb{H}$, dessen Γ -Bahn einen Häufungspunkt in \mathbb{H} hat, also eine Folge M_n paarweise verschiedener Elemente von Γ mit (in \mathbb{H}) konvergenter Bildfolge $M_n(z_0)$. O.B.d.A. dürfen wir sogar $z_0 = i$ voraussetzen: Wegen der Transitivität (HS 1.4) gibt es ein $T \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ mit $T(i) = z_0$, dann wäre auch die konjugierte Gruppe TTT^{-1} nicht diskontinuierlich, als Matrizenmenge aber diskret. O.B.d.A. konvergiert also die Folge der

$$M_n(i) = \frac{a_n i + b_n}{c_n i + d_n} \quad \text{mit} \quad \text{Im } M_n(i) = \frac{1}{c_n^2 + d_n^2} > \varepsilon > 0$$

(vgl. Beweis von HS 1.2). Daran sieht man, dass die Paare $(c_n, d_n) \in \mathbb{R}^2$ beschränkt sind, ebenso die Paare (a_n, b_n) , weil auch $|M_n(i)|^2 = (a_n^2 + b_n^2)/(c_n^2 + d_n^2)$ konvergiert. Somit haben die Matrizen M_n einen Häufungspunkt, Widerspruch. \square

Beispiel 2.3 Die „elliptische Modulgruppe“ $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ ist eine Fuchssche Gruppe.

Warum sie so heißt, erfahren Sie besser in einer Vorlesung über elliptische Kurven oder Modulformen. Sie ist das Paradebeispiel einer *arithmetisch definierten Fuchsschen Gruppe*. Von diesen gibt es noch sehr viel mehr, aber in den allermeisten liegt die Arithmetik nicht so an der Oberfläche, dass man einfach nur Ganzheitsbedingungen an die Matrixkoeffizienten stellt. Grob gesagt geht man von einer Quaternionenalgebra A aus, deren Zentrum k ein total-reeller Zahlkörper ist, und die genau eine (bis auf Konjugation) eindeutige Einbettung in die Matrixalgebra $M_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ hat. Betrachtet man in A einen (nicht-kommutativen) Unterring ganzer Größen mit Quotientenring A , darin die Gruppe der Einheiten von der *reduzierten Norm 1* (heißt nach Einbettung in die Matrixalgebra einfach: mit Determinante 1), dann erhält man eine Fuchssche Gruppe. Der Nachweis übersteigt aber die Möglichkeiten einer 2-stündigen Vorlesung bei weitem! Einen Begriff davon kann man sich mit [ML] oder – wenn man die Sprache der Quaternionenalgebren vermeiden will – mit Abschnitt III.3 in [Ma] oder einem Beispiel in Abschnitt 4.6 von [AF] machen. Genauere Informationen aber wohl nicht ohne [Vi].

Die Modulgruppe ordnet sich diesem Programm insofern unter, als $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ die Norm-1-Einheitengruppe des Rings ganzer Größen $M_2(\mathbb{Z})$ in der Quaternionenalgebra $M_2(\mathbb{Q})$ ist. Wie die anderen arithmetisch definierten Fuchsschen Gruppen ist sie übrigens von 1. Art; in diesem Fall ist das leicht zu überprüfen mit

Satz 2.2 *Parabolische und hyperbolische Fixpunkte Fuchsscher Gruppen (d.h. Fixpunkte von parabolischen bzw. hyperbolischen Elementen) sind immer Limespunkte.* \square

Und für die Modulgruppe Γ ist ∞ parabolischer Fixpunkt – nämlich von $z \mapsto z + 1$ – und deswegen sind alle rationalen Zahlen $\frac{a}{c}$ ebenfalls parabolische Fixpunkte, darum $L(\Gamma) = \hat{\mathbb{R}}$.

Aufgabe 2.3 *Warum?*

Dass parabolische und hyperbolische Fixpunkte zwei disjunkte Mengen bilden, ist für Fuchssche Gruppen typisch:

Satz 2.3 *Wenn für die Gruppe $\Gamma \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ ein parabolischer und ein hyperbolischer Fixpunkt zusammenfallen, ist Γ nicht diskret (operiert also nicht diskontinuierlich).*

Beweis. Per Konjugation mit einem geeigneten $T \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ (wieder HS 1.4) dürfen wir annehmen, dass es $U, V \in \Gamma$ gibt mit $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a \neq \pm 1$, und

$$U = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : z \mapsto z + b, \quad V = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} : z \mapsto a^2 z \quad \Rightarrow \quad V^n U V^{-n} : z \mapsto z + b a^{2n}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Da die ba^{2n} den Häufungspunkt 0 haben, ist Γ nicht diskret. \square

Schließlich noch ein naheliegender Sachverhalt:

Satz 2.4 Seien $\Phi \subset \Gamma \subset \Delta \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ Gruppen, Γ Fuchssche Gruppe und der Index $(\Delta : \Gamma)$ sei endlich. Dann sind auch Φ und Δ Fuchssche Gruppen.

Der Beweis ist klar für Φ . Wenn die Rechtsrestklassen von $\Gamma \backslash \Delta$ durch a_1, \dots, a_m repräsentiert werden, zerfällt jede Bahn Δz von Δ in die m Bahnen $\Gamma a_i(z)$. Da diese keinen Häufungspunkt in \mathbb{H} haben, gilt das ebenso für Δz . \square

Aufgabe 2.4 $\Gamma \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sei nicht diskontinuierlich. Beweisen Sie: Die Limesmenge $L(\Gamma)$ ist die ganze hyperbolische Ebene \mathbb{H} .

Aufgabe 2.5 Zeigen Sie, dass alle hyperbolischen Fixpunkte von $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ reell-quadratische irrationale Zahlen sind.

3 Das Dirichletpolygon

Definition 3.1 Γ sei eine Fuchssche Gruppe. $F \subset \mathbb{H}$ heißt „Fundamentalebene“ von Γ , wenn

- F offen ist,
- $\gamma F \cap F = \emptyset$ für alle $\gamma \in \Gamma$ außer für $\gamma = \mathrm{id}$,
- $\Gamma \overline{F} = \mathbb{H}$.

(Mit \overline{F} ist die abgeschlossene Hülle von F in der Topologie von \mathbb{H} gemeint.) Einfacher ausgedrückt: Die Γ -Bilder von \overline{F} sollen \mathbb{H} lückenlos pflastern mit Überlappungen nur an den Rändern. In der Literatur wird anstelle von „offen“ manchmal sogar „Gebiet“ verlangt; wir werden gleich sehen, dass man sogar „offenes Polygon“, d.h. den Durchschnitt (hyperbolischer) offener Halbebenen nehmen könnte.

Um eine Vorstellung davon zu bekommen, übertrage man den Begriff auf \mathbb{C} und die euklidische Geometrie und betrachte nochmals Beispiel 2.1. Dort wäre ein Fundamentalebene das offene Parallelogramm mit den Eckpunkten $0, 1, \tau, 1 + \tau$.

Aufgabe 3.1 Erweitern Sie die Gruppe $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ aus Beispiel 2.1 um die Transformation $z \mapsto -z$ und finden Sie einen Fundamentalebene für die entstehende Gruppe.

Das Beispiel macht sofort klar, dass Fundamentalbereiche – wenn sie existieren – alles andere als eindeutig bestimmt sind. Dass sie immer existieren, sagt das Hauptergebnis dieses Kapitels. Zunächst aber ein paar kleine Vorüberlegungen:

Aufgabe 3.2 Γ sei eine Fuchssche Gruppe. Dann gilt:

a) Γ ist höchstens abzählbar unendlich.

b) Es gibt ein $z_0 \in \mathbb{H}$, das kein Fixpunkt eines Elements $\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}$ ist.

c) In jedem abgeschlossenen hyperbolischen Kreis $B_{2r}(z_0) := \{z \in \mathbb{H} \mid d(z, z_0) \leq 2r\}$ mit Mittelpunkt z_0 und hyperbolischem Radius $2r$ liegen nur endlich viele Γ -Bilder von z_0 .

Satz 3.1 (Dirichlet) Jede Fuchssche Gruppe besitzt ein hyperbolisches Polygon als Fundamentalbereich.

Beweis. Man wähle einen Nicht-Fixpunkt z_0 von Γ (vgl. Teil b) der Aufgabe 8.2) und definiere

$$F := \{z \in \mathbb{H} \mid d(z, z_0) < d(z, \gamma(z_0)) \text{ für alle } \gamma \in \Gamma, \gamma \neq \text{id}\}.$$

Eigentlich ist F der Durchschnitt unendlich vieler hyperbolischer Halbebenen (HS 1.6 und die Bemerkungen am Ende von Abschnitt 1.4), aber in kleinen Umgebungen eines beliebigen Punktes $z_1 \in \mathbb{H}$ sind wegen Aufgabe 3.2 c) fast alle Ungleichungen der Definition trivialerweise erfüllt; lokal ist F darum immer als Schnitt von endlich vielen offenen Halbebenen beschrieben, insbesondere berandet (in hinreichen kleinen Bereichen) immer nur von endlich vielen Stücken hyperbolischer Geraden g_γ vom Typ $d(z, z_0) = d(z, \gamma(z_0))$. Die abgeschlossene Hülle von F lässt sich also definieren durch $d(z, z_0) \leq d(z, \gamma(z_0))$ für alle $\gamma \in \Gamma, \gamma \neq \text{id}$.

Da die hyperbolische Metrik $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ -invariant ist, gilt für $\gamma \in \Gamma, \gamma \neq \text{id}$, und jedes $z \in F$

$$d(\gamma(z), z_0) = d(z, \gamma^{-1}(z_0)) > d(z, z_0) \Rightarrow \gamma(z) \notin F,$$

damit ist die zweite definierende Eigenschaft des Fundamentalbereichs erfüllt. Die dritte Eigenschaft sieht man so ein: Jedes $w \in \mathbb{H}$ besitzt ein – möglicherweise sogar endlich viele – $\delta(z_0) \in \Gamma z_0$ mit minimaler hyperbolischer Distanz $d(w, \delta(z_0))$. Dann hat $z := \delta^{-1}(w)$ einen Abstand $d(z, z_0) \leq$ allen anderen Abständen zu den Bahnpunkten von Γz_0 , somit ist

$$z \in \overline{F} \Rightarrow w \in \Gamma \overline{F}. \quad \square$$

Definition 3.2 Der so konstruierte Fundamentalbereich heißt „Dirichlet-Polygon“ oder „Normalpolygon“ mit Mittelpunkt z_0 .

Wenn \overline{F} kompakt ist, folgt aus Aufgabe 3.2.c), dass F von nur endlich vielen hyperbolischen Strecken berandet wird. Um das Dirichlet-Polygon konkret zu bestimmen, muss man leider a priori unendlich viele Ungleichungen betrachten, obwohl letztlich dann nur endlich viele relevant sind. Ein typisches Beispiel ist die elliptische Modulgruppe:

Satz 3.2 $\Gamma = \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ hat den Fundamentalbereich

$$F := \left\{ z \in \mathbb{H} \mid -\frac{1}{2} < \text{Re } z < \frac{1}{2}, |z| > 1 \right\}.$$

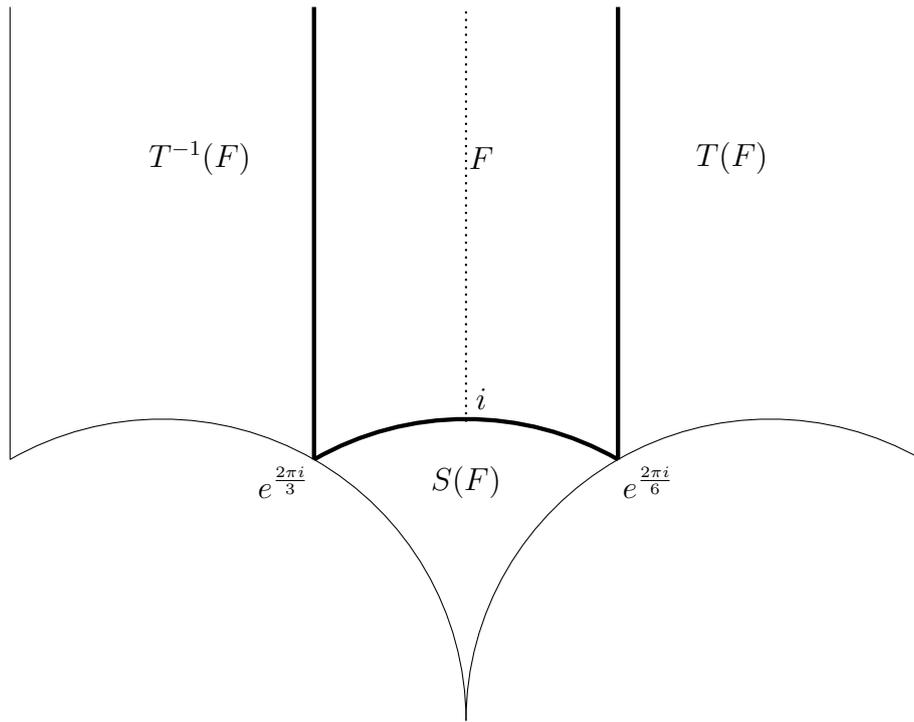


Abbildung 2: Ein Fundamentalbereich für die Modulgruppe

Beweis. Wir versuchen, das Dirichlet–Polygon zum Punkt $z_0 = 2i$ zu konstruieren; man überzeuge sich anhand der Fixpunktgleichung, dass dieser Punkt kein Fixpunkt eines $\gamma \in \Gamma$ ist. Zu den Elementen $\gamma =$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : z \mapsto z + 1, \quad T^{-1} : z \mapsto z - 1 \quad \text{und} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} : z \mapsto -\frac{1}{z}$$

erhält man als Randgeraden g_γ genau den Rand des hyperbolischen Dreiecks aus der Behauptung des Satzes. Daraus folgt, dass die Vereinigung $\Gamma \bar{F}$ aller Bilder des abgeschlossenen Dreiecks ganz \mathbb{H} überdeckt. Es bleibt aber zu zeigen, dass die unendlich vielen anderen Ungleichungen $d(z, z_0) < d(z, \gamma(z_0))$ aus der Definition des Dirichlet–Polygons irrelevant sind, weil für alle $z \in F$ ohnehin erfüllt; anders gesagt: Es bleibt zu zeigen, dass das F aus der Behauptung disjunkt ist zu allen $\gamma(F)$, $\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}$.

Das ist klar für alle $\gamma = T^n$, $n \neq 0$. Für alle anderen $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}$ dürfen wir o.B.d.A. $c \geq 1$ voraussetzen. Dann gilt für alle $z \in F$

$$|cz + d| > 1 \quad \text{und} \quad \text{Im } \gamma(z) = \frac{\text{Im } z}{|cz + d|^2} < \text{Im } z$$

(wieder HS 1.2). Wäre jetzt $\gamma(z) \in F$, dann gilt mit dem gleichen Argument, angewandt auf γ^{-1} , die umgekehrte Ungleichung $\text{Im } z < \text{Im } \gamma(z)$, Widerspruch. \square

Fundamentaltbereiche Fuchsscher Gruppen sind aber nicht notwendig Dirichlet–Polygone. Die folgende plausible Konstruktion ergibt i.a. nicht einmal zusammenhängende Mengen:

Satz 3.3 *F sei ein Fundamentaltbereich der Fuchsschen Gruppe Γ , Φ eine Untergruppe von endlichem Index in Γ , ihre Rechtsrestklassen seien repräsentiert von $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \Gamma$. Dann ist $\bigcup_{i=1}^m \gamma_i(F)$ ein Fundamentaltbereich von Φ .*

Aufgabe 3.3 *Beweisen Sie Satz 3.3!*

4 Parkettierung und Präsentation

Aufgabe 4.1 *Zeigen Sie, dass das Fundamentaltbereichsvolumen unabhängig von der Wahl des Fundamentaltbereichs ist.*

Definition 4.1 *Eine Fuchssche Gruppe 1. Art Γ heißt „Polyongruppe“, wenn ihre Dirichlet–Polygone von endlich vielen hyperbolischen Seiten berandet werden.*

Sei $F \subset \mathbb{H}$. Mit \hat{F} bezeichnen wir die abgeschlossene Hülle von F als Untermenge von $\hat{\mathbb{C}}$.

Hilfssatz 4.1 *F sei Dirichlet–Polygon einer Fuchsschen Gruppe Γ . Wenn $\hat{F} \cap \hat{\mathbb{R}}$ ein Intervall enthält, ist Γ von 2. Art, und zwar mit unendlichem (hyperbolischem) Fundamentaltbereichsvolumen. \square*

Hilfssatz 4.2 *Das Dirichlet–Polygon einer Polyongruppe Γ besitzt höchstens endlich viele Spitzen, d.h. $\hat{F} \cap \hat{\mathbb{R}}$ ist endlich und besteht aus parabolischen Fixpunkten von Γ . Das Fundamentaltbereichs–Volumen ist endlich.*

Beweis. Da die Seitenanzahl von F endlich ist, könnte $\hat{F} \cap \hat{\mathbb{R}}$ andernfalls höchstens ein Intervall enthalten. Dieses gehört aber nicht zur Limesmenge von Γ , somit wäre Γ von 2. Art, Widerspruch. Die Endlichkeit des Fundamentaltbereichsvolumens erhält man durch Triangulierung von F und den Satz 1.5 von Gauß–Bonnet. Dass die Spitzen keine hyperbolischen Fixpunkte sein können, begründet man mit Hilfe der Fundamentaltbereichseigenschaft $\gamma F \cap F = \emptyset$. In Aufgabe 4.4 werden wir sehen, dass diese Spitzen andererseits Fixpunkte von Γ sind; es bleibt also nur die Möglichkeit, dass es sich um parabolische Fixpunkte handelt. \square

Satz 4.1 *Wenn das in \mathbb{H} abgeschlossene Dirichlet–Polygon \overline{F} der Fuchsschen Gruppe Γ kompakt ist (Γ wird dann „kokompakt“ genannt), ist Γ Polyongruppe ohne parabolische Elemente.*

Beweis. Dass Γ Polygongruppe ist, kann man an Aufgabe 3.2 c) ablesen: Daraus folgt, dass in jedem Kompaktum nur endlich viele Randgeraden liegen können. Angenommen nun, \overline{F} ist kompakt. Dann ist

$$\eta(z) := \inf\{d(z, \gamma(z)) \mid \gamma \in \Gamma \text{ nicht elliptisch und } \neq \text{id}\}$$

stetig und > 0 , zunächst auf \overline{F} nach unten durch ein $\varepsilon > 0$ beschränkt, dann aber ebenso auf allen \overline{F} -Bildern, also auf ganz \mathbb{H} . Wenn andererseits Γ parabolische Transformationen besitzt, dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass $(z \mapsto z + 1) \in \Gamma$ (Konjugation!), und dann ist $d(z, z + 1)$ nach unten nur durch 0 beschränkt (ein Argument aus [JS]).

Satz 4.2 *F sei Dirichlet-Polygon mit Mittelpunkt z_0 für die Polygongruppe Γ , $\text{id} \neq \gamma \in \Gamma$,*

$$R_\gamma := \{z \in \overline{F} \mid d(z, z_0) = d(z, \gamma(z_0)), d(z, z_0) < d(z, \delta(z_0)) \text{ für alle anderen } \delta \in \Gamma, \delta \neq \text{id}, \gamma\}$$

$\subset g_\gamma$ eine (offene) „Seite“ von F . Es gilt $\gamma(R_{\gamma^{-1}}) = R_\gamma$, die Seiten von F treten also immer paarweise auf, ausgenommen im Fall $\gamma^2 = \text{id}$. $\gamma(F)$ ist ein Nachbar-Fundamentbereich von F , der mit F genau die Seite R_γ gemeinsam hat. Die zu den Seiten gehörigen „Nachbartransformationen“ oder „Seitenpaarungen“ γ bilden ein Erzeugendensystem von Γ .

Alle Aussagen sind evident, nur die letzte ist zu *beweisen*. Sei dazu $\delta \in \Gamma$ beliebig; man verbinde z_0 mit $\delta(z_0)$ durch einen Weg, der alle Eckpunkte von F und ihre Γ -Bilder vermeidet. Dann verläuft der Weg durch endlich viele Γ -Bilder von F und deren Seiten; bei jeder Seitenüberquerung von $\gamma_n(F)$ zu $\gamma_{n+1}(F)$ wird γ_n von rechts mit einer der Nachbartransformationen multipliziert, bis δ – also eigentlich $\delta(z_0)$ – erreicht ist. \square

Als Konsequenz für die elliptische Modulgruppe (Satz 3.2) ergibt sich daraus, dass $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ von T und S erzeugt wird. – Ähnlich wie der Beweis von Satz 4.2 verschafft man sich auch eine Übersicht über die Relationen, welche zwischen den Nachbartransformationen gelten: Jede Relation $\prod \gamma_k = \text{id}$ zwischen Nachbartransformationen γ_k von F entspricht einer Abfolge von sukzessive benachbarten Bild-Fundamentbereichen, somit einem geschlossenen Weg in \mathbb{H} mit Start- und Zielpunkt z_0 , der die Eckpunkte aller Bild-Fundamentbereiche vermeidet. Da \mathbb{H} einfach zusammenhängend ist, lässt sich dieser Weg als Summe endlich vieler geschlossener Wege um jeweils einen einzelnen Eckpunkt beschreiben, und das ganze Produkt als das Produkt der entsprechenden Relationen. Diese „kleinen“ Produkte sind alle konjugiert zu Produkten von Nachbartransformationen, welche kleinen geschlossenen Wegen um die endlich vielen Eckpunkte von F entsprechen, den „lokalen Relationen“ zwischen den Erzeugenden.

Satz 4.3 *Polygongruppen sind endlich präsentiert durch die Nachbartransformationen eines Dirichlet-Polygons und die lokalen Relationen, die sich durch das lokale Umlaufen ihrer Eckpunkte ergeben.*

Dabei sollte angefügt werden, dass elliptische Fixpunkte von Involutionen, welche als Mittelpunkte von Seiten auftreten (Beispiel: der Punkt i im Fundamentalbereich der Modulgruppe aus Satz 3.2), hier als Eckpunkte mitgezählt werden müssen, damit die Involutionsgleichung für die zugehörige Nachbartransformation (hier also $S^2 = \text{id}$) mit erfasst wird.

Konvention. Wir werden in solchen Fällen den involutorischen Fixpunkt P als Eckpunkt mitzählen und γ als Seitenpaarung für die beiden Halbseiten, die von P ausgehen.

Im Fall der Modulgruppe ergibt sich die Präsentation

Satz 4.4

$$\text{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \langle T, S \mid S^2 = (TS)^3 = \text{id} \rangle ,$$

die Modulgruppe lässt sich also schreiben als das freie Produkt einer zyklischen Gruppe $\langle S \rangle$ der Ordnung 2 und einer zyklischen Gruppe $\langle TS \rangle$ der Ordnung 3. \square

Man kann sich das Leben einfacher machen, indem man die Bahn der Eckpunkte selbst unter der Operation von Nachbartransformationen studiert. Eckpunkte P des Dirichletpolygons kann man dadurch definieren, dass sie Fixpunkte von involutorischen Nachbartransformationen sind oder mindestens zwei verschiedene Gleichungen $d(P, \gamma(z_0)) = d(P, z_0) = d(P, \delta(z_0))$ für Nachbartransformationen γ, δ gelten müssen. Letztere Bedingung kann man ersetzen durch die Beschreibung von P als Durchschnitt der beiden *abgeschlossenen* Randseiten $\overline{R_\gamma} \cap \overline{R_\delta}$. Klar, dass dann $\gamma^{-1}(P)$ und $\delta^{-1}(P)$ wieder Eckpunkte von F sind, und dass man auf diese Weise durch sukzessive Anwendung von Nachbartransformationen einen *Zyklus* von F -Ecken bekommt, die alle zu ΓP gehören. Nach einmaligem Durchlaufen eines solchen Zyklus hat man also ein Produkt $\gamma = \prod_{k=1}^m \gamma_k$ von Nachbartransformationen mit $\gamma(P) = P$. Nun gibt es zwei Möglichkeiten:

Hilfssatz 4.3 1) $\gamma = \text{id}$. In diesem Fall heißt P eine „zufällige Ecke“ (weil abhängig von der Wahl von z_0), das Produkt der γ_k beschreibt eine Relation zwischen den Erzeugenden, und die Innenwinkel von F an den Zyklus-Ecken $(\prod_{k=1}^n \gamma_k)(P)$, $n = 0, \dots, m - 1$ summieren sich zu 2π .

2) $\gamma \neq \text{id}$. In diesem Fall ist P elliptischer Fixpunkt von γ , P heißt „elliptische Ecke“ von F , und die entsprechende Summe der Innenwinkel ist $2\pi/s$, wenn s die Ordnung des Elements γ ist. \square

In unserem Beispiel des Fundamentalbereichs der Modulgruppe (Satz 3.2) sind i und $e^{2\pi i/3}, e^{2\pi i/6} = T(e^{2\pi i/3})$ die beiden Zyklen elliptischer Ecken, zufällige Ecken treten erst dann auf, wenn $0 < \text{Re } z_0 < \frac{1}{2}$ gewählt wird.– Dieses Beispiel illustriert auch ein anderes wichtiges Faktum:

Hilfssatz 4.4 Für jede Polygongruppe besteht eine Bijektion zwischen den Zyklen elliptischer Ecken des Fundamentalpolygons und den (endlich vielen!) Konjugiertenklassen elliptischer Elemente.

Aufgabe 4.2 *Beweisen Sie diesen Hilfssatz!*

Aufgabe 4.3 *Übertragen Sie die Schlussweise von Hilfssatz 4.3 auf die Spitzen des Fundamentalbereichs und zeigen Sie, dass auch die Spitzen Fixpunkte von Γ sein müssen, und zwar die Fixpunkte parabolischer Elemente.*

Man mache sich klar, dass keineswegs alle Polyongruppen elliptische Elemente besitzen. Das kommt bereits bei Untergruppen von $\Gamma = \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ vor: Man nehme etwa die *Kongruenzuntergruppe* $\Gamma(3)$ aus allen Matrizen, welche koeffizientenweise kongruent zur Einheitsmatrix $\equiv E \pmod{3}$ sind. Diese besitzt immerhin noch parabolische Elemente (z.B. $z \mapsto z + 3$), wir werden aber noch Polyongruppen kennenlernen mit kompaktem \overline{F} , welche außer id nur aus hyperbolischen Elementen besteht. In Abb. 3 sieht man das Beispiel eines solchen Fundamentalbereichs und seiner Nachbartransformationen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, gezeichnet im Kreisscheibenmodell \mathbb{D} (Fig. 3.2 aus [JW]):

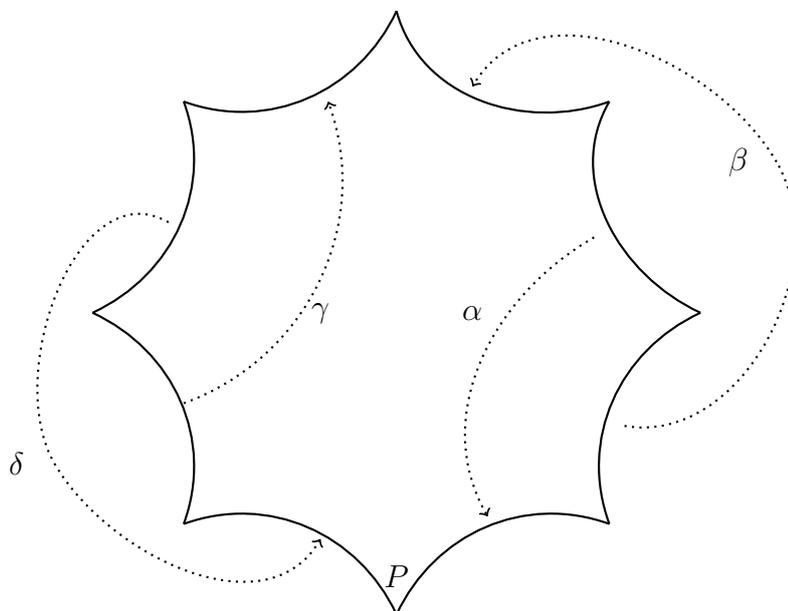


Abbildung 3: Ein Fundamentalbereich für die Signatur $(0; -; 2)$

Man stelle sich vor, dass die Seiten alle die gleiche hyperbolische Länge haben und dass alle Winkel $2\pi/8$ sind. Den südlichsten Eckpunkt P schickt die Abfolge der Nachbartransformationen $\delta^{-1}, \gamma^{-1}, \delta, \gamma, \beta^{-1}, \alpha^{-1}, \beta, \alpha$ gerade wieder nach P zurück; der Zykel besteht aus allen acht Eckpunkten. Die einzige Relation zwischen den Erzeugenden ist also das Produkt der beiden *Kommutatoren*

$$[\alpha, \beta][\gamma, \delta] := \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma\delta\gamma^{-1}\delta^{-1} = \text{id} \quad .$$

Dieses Beispiel ist der einfachste Spezialfall eines viel allgemeineren Sachverhalts:

Satz 4.5 Sei Γ eine Polygongruppe. Dann hat Γ ein Erzeugendensystem aus $h \geq 0$ parabolischen Elementen ρ_1, \dots, ρ_h – diese erzeugen Repräsentanten der Konjugiertenklassen der parabolischen Untergruppen von Γ –, $m \geq 0$ elliptischen Elementen $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ der Ordnungen $e_1, \dots, e_m > 1$ – Erzeugenden von Repräsentanten der Konjugiertenklassen der zyklischen Untergruppen elliptischer Elemente – und $2g \geq 0$ hyperbolischen Elementen $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g$. Die Relationen zwischen diesen Erzeugenden werden erzeugt von

$$\sigma_1^{e_1} = \dots = \sigma_m^{e_m} = \text{id} = \rho_1 \cdot \dots \cdot \rho_h \cdot \sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_m \cdot [\alpha_1, \beta_1] \cdot \dots \cdot [\alpha_g, \beta_g].$$

Das Fundamentalbereichsvolumen $\text{Vol } \Gamma$ des Γ -Fundamentalbereichs ist

$$\text{Vol } \Gamma = 2\pi \left(2g - 2 + h + m - \sum_1^m \frac{1}{e_i} \right) > 0.$$

Definition 4.2 Man nennt $(h; e_1, \dots, e_m; g)$ die „Signatur“ von Γ .

Im nächsten Kapitel werden wir sehen, dass zu jeder Signatur Polygongruppen existieren, vorausgesetzt dass $2g - 2 + h + m - \sum_1^m \frac{1}{e_i} > 0$ erfüllt ist, und im übernächsten Kapitel werden wir die topologische und funktionentheoretische Bedeutung dieser Daten kennenlernen.

Zum *Beweis* von Satz 4.5 konstruiert man zunächst einen *kanonischen Fundamentalbereich*, das ist ein Fundamentalpolygon mit einer einzigen zufälligen Ecke und einer Abfolge von Randseiten

$$\begin{aligned} & R_{\beta_g}, R_{\alpha_g^{-1}}, R_{\beta_g^{-1}}, R_{\alpha_g}, R_{\beta_{g-1}}, R_{\alpha_{g-1}^{-1}}, \dots, R_{\beta_1^{-1}}, R_{\alpha_1}, \\ & R_{\sigma_m^{-1}}, R_{\sigma_m}, R_{\sigma_{m-1}^{-1}}, \dots, R_{\sigma_1^{-1}}, R_{\sigma_1}, R_{\rho_h^{-1}}, R_{\rho_h}, \dots, R_{\rho_1}. \end{aligned}$$

Dass so etwas geht, beruht auf einem Algorithmus der geometrischen Gruppentheorie, der mit Zerschneiden und Neu-Zusammenkleben des Fundamentalpolygons arbeitet – im Einzelnen nicht schwierig, aber technisch sehr aufwändig; ausführliche Beschreibungen (vgl. z.B. [Mb] oder sehr altmodisch in Band I, Kap. 3, §10 ff. von [FK]) umfassen mehrere Seiten und seien hier unterdrückt. Das Ergebnis ist also ein hyperbolisches Polygon mit $4g + 2m + 2h$ Seiten, einer Γ -Bahn $4g + m + h$ zufälliger Eckpunkte mit Winkelsumme 2π , m elliptischen Ecken mit Winkeln $\frac{2\pi}{e_1}, \dots, \frac{2\pi}{e_m}$ und h *Spitzen* auf $\hat{\mathbb{R}}$ jeweils mit Winkel 0, an denen sich ein Seitenpaar mit parabolischer Seitenpaarung trifft. Aus dem Satz 1.5 (Gauß–Bonnet) folgt die Volumenformel, indem man das Polygon in $4g + 2m + 2h$ hyperbolische Dreiecke aufteilt, z.B. indem man einen „Mittelpunkt“ durch hyperbolische Geraden mit allen Ecken und Spitzen verbindet; Am Mittelpunkt ist die Winkelsumme natürlich 2π . \square

Als Anwendung von Satz 3.3 auf Polygongruppen sei noch erwähnt:

Satz 4.6 Φ sei Untergruppe von endlichem Index $(\Gamma : \Phi)$ in Γ . Dann ist

$$\text{Vol } \Phi = (\Gamma : \Phi) \cdot \text{Vol } \Gamma. \quad \square$$

Aufgabe 4.4 Sei $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, $\Gamma := \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Zeigen Sie: Ersetzt man jeden Koeffizienten x einer Matrix aus $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ durch seine Restklasse $x \bmod m$, so entsteht ein surjektiver Homomorphismus

$$\Gamma \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}).$$

Die Gruppe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ besitzt zwei Erzeugende T, S ; diese erfüllen die Relationen $T^m = (TS)^3 = S^2 = 1$.

Aufgabe 4.5 Schwer: Γ sei Fuchssche Gruppe 1. Art; für ein z_0 sei das Dirichlet-Polygon für Γ von endlich vielen Seiten berandet. Zeigen Sie, dass Γ Polyongruppe ist, d.h. dass auch für jede andere Wahl von z_0 die Zahl der Randseiten des Dirichlet-Polygons endlich ist. Tipp: Nutzen Sie Aufgabe 4.1 und zeigen Sie, dass man die Volumenberechnung für das Dirichlet-Polygon auch auf Dirichletpolygone mit unendlich vielen Seiten ausdehnen kann.

5 Geometrische Konstruktion von Polyongruppen

In Kap. 3 haben wir bereits eine arithmetische Möglichkeit kennengelernt, Fuchssche Gruppen zu konstruieren. Dies ist besonders für höherdimensionale Verallgemeinerungen wichtig, weil dort in den wichtigsten Räumen fast nur arithmetisch definierte diskontinuierliche Gruppen existieren. Ganz anders in \mathbb{H} bzw. \mathbb{D} : Die nicht-arithmetischen Fuchsschen Gruppen sind hier eher die Regel, die arithmetisch definierten Gruppen die Ausnahme. Das kann man an einer geometrischen Konstruktion festmachen, die 1882 zuerst von Poincaré angegeben wurde ([Poi], lückenlose Beweise hat es erst Jahrzehnte danach gegeben), und die in gewissem Sinn eine Umkehrung von Satz 4.5 darstellen. Wir beschränken uns hier auf eine einfache Version des Satzes. Weitreichende Verallgemeinerungen findet die Leserin z.B. in [Bea] oder [ZVC].

Satz 5.1 (Poincaré) $\overline{F} \subset \mathbb{H}$ sei abgeschlossene Hülle eines hyperbolisch konvexen Polygons mit einer endlichen Anzahl von Seitenpaaren $\overline{R}_\gamma, \overline{R}_{\gamma^{-1}}$ und endlichem hyperbolischem Volumen (aufeinander folgende Seiten schneiden sich also in Eckpunkten oder treffen sich in Spitzen auf dem Rand $\hat{\mathbb{R}}$ von \mathbb{H}). Zu jedem Paar von Randseiten gebe es eine Nachbartransformation $\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, welche $\overline{R}_{\gamma^{-1}}$ auf \overline{R}_γ abbildet und \overline{F} auf sein Nachbarpolygon $\gamma(\overline{F})$, das mit \overline{F} nur in \overline{R}_γ überlappt (eventuell ist $\overline{R}_{\gamma^{-1}} = \overline{R}_\gamma$, wenn $\gamma^2 = \mathrm{id}$). γ^{-1} wird auch als Nachbartransformation mitgezählt.

Zu jedem Eckpunkt P von F gibt es eine Abfolge $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ von Nachbartransformationen, so dass

$$P, \gamma_1(P), \gamma_2\gamma_1(P), \dots$$

paarweise verschiedene Ecken von F sind. Für jedes P ist diese Folge endlich, und die Summe der Innenwinkel in den Eckpunkten dieser Folge sei von der Form $\frac{2\pi}{k}$ mit einem $k \in \mathbb{N}$.

Sei $\Gamma \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ die von den Nachbartransformationen erzeugte Untergruppe. Wenn

$\gamma^2 = \text{id}$ und $\overline{R}_{\gamma^{-1}} = \overline{R}_\gamma$, zählen wir den Fixpunkt von γ (= Mittelpunkt von \overline{R}_γ) zu den Eckpunkten dazu (mit $k = 2$).

Unter diesen Voraussetzungen ist das Erzeugnis Γ aller Nachbartransformationen eine Polygongruppe, und zwar mit Fundamentalpolygon F .

Die umfangreichen Voraussetzungen dieses Satzes lassen sich kurz so zusammenfassen: Es gibt eine endliche Untermenge $\Sigma \subset \Gamma$, so dass die Σ -Bilder von \overline{F} eine Umgebung von \overline{F} vollständig überdecken, mit Überlappungen nur an den Rändern. Der Beweis des Satzes kommt nicht ohne ein gewisses Maß an Topologie aus (die zu Poincarés Zeit noch nicht verfügbar war) und soll hier nur skizziert werden. Man definiert sich für das Erzeugnis Γ der Nachbartransformationen einen neuen Raum $H := \Gamma \times \overline{F}$, sozusagen eine disjunkte Vereinigung von allen Γ -Bildern des abgeschlossenen Polygons. Nun verklebt man diese Polygone an den Rändern in naheliegender Weise: Mit einer Äquivalenzrelation

$$(\gamma_1, z_1) \sim (\gamma_2, z_2) \quad :\Leftrightarrow \quad \gamma_2 = \gamma_1 \sigma, \quad \sigma(z_2) = z_1 \text{ für ein } \sigma \in \Sigma$$

macht man daraus einen Quotienten $H^* := H/\sim$, der – das ist natürlich alles nachzuweisen – eine topologisch 2-dimensionale Mannigfaltigkeit ist, eine diskontinuierliche Operation von Γ besitzt und lückenlos mit Γ -Bildern von \overline{F} gepflastert ist mit Überlappungen nur an den Rändern. Dann beweist man, dass H^* einfach zusammenhängend ist, indem man geschlossene Wege als Summen geschlossener Wege beschreibt, die nur durch benachbarte \overline{F} -Bilder verlaufen, und dass

$$H \rightarrow \mathbb{H} : (\gamma, z) \mapsto \gamma(z)$$

eine Überlagerungsabbildung $f : H^* \rightarrow \mathbb{H}$ induziert, d.h. eine stetige Abbildung mit der Eigenschaft, dass für genügend kleine offene Mengen $U \subset \mathbb{H}$ das Urbild $f^{-1}(U)$ in disjunkte offene V zerfällt, auf denen die Restriktion von f ein Homöomorphismus ist. Somit ist $f : H^* \rightarrow \mathbb{H}$ „universelle Überlagerung“ von \mathbb{H} . Da \mathbb{H} aber schon selbst einfach zusammenhängend ist, sagt die Topologie, dass f dann schon globaler Homöomorphismus ist. Außerdem ist leicht zu sehen, dass f verträglich ist mit der Operation von Γ auf H^* und H . Daher ist Γ diskontinuierlich auch auf \mathbb{H} mit F als Fundamentalpolygon. \square

Ein erstes Beispiel hierzu haben wir bereits in Kap. 4 nach dem Hilfssatz 4.4 gesehen; das hyperbolische 8-Eck dort mit den Nachbartransformationen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und den 8 Eckpunkten, welche alle zur gleichen Γ -Bahn gehören, führt also tatsächlich zu einer Polygongruppe mit Signatur $(0; -; g)$, $g = 2$, also mit $m = h = 0$. Hier besitzt Γ also keine elliptischen oder parabolischen Elemente, sie besteht nur aus id und hyperbolischen Elementen. Das nächste Beispiel wird uns vor allem noch im letzten Kapitel beschäftigen:

Beispiel 5.1 „Dreiecksgruppen“ Δ haben die Signatur $(0; p, q, r; 0)$, kurz häufig $[p, q, r]$ geschrieben; dabei muss

$$p, q, r > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$$

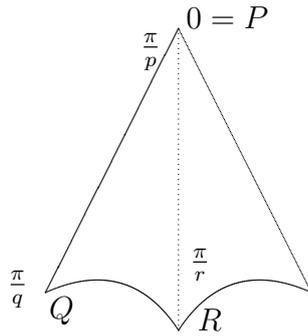


Abbildung 4: Fundamentalbereich in \mathbb{D} einer Dreiecksgruppe mit Signatur $[p, q, r]$ (Fig. 3.1 aus [JW])

sein. Sie werden von drei elliptischen Elementen erzeugt und haben die Präsentation

$$\langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \mid \sigma_1^p = \sigma_2^q = \sigma_3^r = \text{id} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \rangle .$$

Der Name kommt daher, dass man ihr Fundamentalpolygon in Form eines hyperbolischen Dreiecks mit Winkeln $\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}$, zusammen mit seinem an einer Seite gespiegelten Bild wählen kann. Es ist hier bequemer, die Zeichnung in \mathbb{D} anstelle von \mathbb{H} zu machen: Wählt man 0 als einen der Eckpunkte, sind zwei der hyperbolischen Polygonseiten Teile euklidischer Geraden. Klar, dass das Fundamentalbereichsvolumen gegeben ist durch

$$\text{Vol } \Delta = 2\pi \left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r} \right) .$$

Die Grenzfälle, dass die elliptischen Eckpunkte ersetzt werden durch Spitzen, sind ebenso zugelassen. In diesem Fall schreibt man z.B. anstelle der Signatur $(h = 1; p, q; 0)$ einfacher $[p, q, \infty]$ und ersetzt bei Winkeln und Volumen $\frac{1}{r}$ durch 0. Die dritte Relation $\sigma_3^r = 1$ der Präsentation entfällt, man hat also ein freies Produkt zweier zyklischer Gruppen der Ordnungen p und q . In diesem Sinne ist etwa die elliptische Modulgruppe $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ die Dreiecksgruppe mit Signatur $[2, 3, \infty]$. In Abb. 5 bewundere man ein klassisches Bild der Pflasterung von Teilen von \mathbb{D} durch die Fundamentalbereiche der Dreiecksgruppe mit Signatur $[2, 3, 7]$.

Dreiecksgruppen spielen eine besondere Rolle als Polyongruppen mit kleinstmöglichem Fundamentalbereich:

Satz 5.2 (C.L. Siegel) *Das Fundamentalbereichsvolumen Fuchsscher Gruppen ist $\geq \frac{\pi}{21}$, bei Fuchsschen Gruppen mit Spitzen $\geq \frac{\pi}{3}$. Diese unteren Schranken werden erreicht von der Dreiecksgruppe mit Signatur $[2, 3, 7]$ bzw. von der elliptischen Modulgruppe.*

Beweis. Die Volumenformel in Satz 4.5 sagt, dass $v := 2g - 2 + h + m - \sum_1^m \frac{1}{e_i}$ möglichst klein, aber positiv sein sollte. Hier ist eine Fallunterscheidung angesagt:

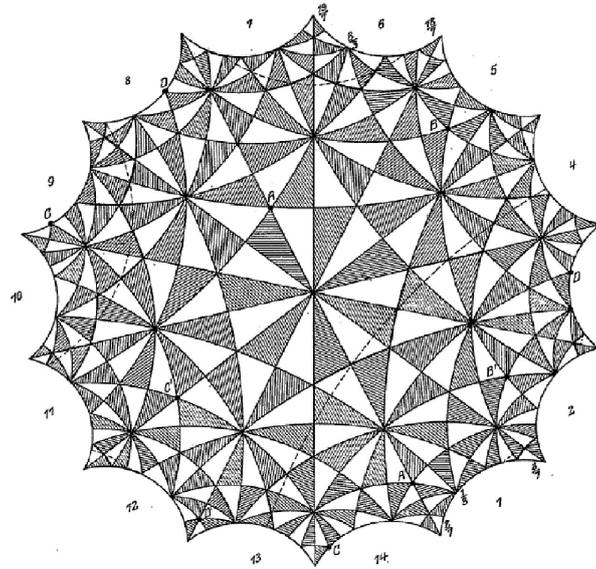


Abbildung 5: 168 Bilder des \mathbb{D} -Fundamentaltbereichs der Dreiecksgruppe mit Signatur $[2, 3, 7]$ (Parkettierung der Kleinschen Quartik aus [Kl], s. Kap. 6.2)

$g > 1$ führt auf $v > 1$.

$g = 1$ ist nur möglich für $h + m > 0$, ergibt $v \geq \frac{1}{2}$.

Von nun an ist nur noch $g = 0$ zu betrachten. Für $h = 2$ lautet v dann $\sum_1^m (1 - \frac{1}{e_i})$, also $= 0$ oder $\geq \frac{1}{2}$

Für $h = 1$ haben wir $v = -1 + \sum_1^m (1 - \frac{1}{e_i})$, es muss also $m \geq 2$ sein, und das kleinstmögliche positive v gibt es offenbar für $\{e_1, e_2\} = \{2, 3\}$, führt also auf die Signatur $[2, 3, \infty]$.

Bleibt nur der Fall $g = h = 0$ zu betrachten und das positive Minimum von

$$v = -2 + \sum_1^m (1 - \frac{1}{e_i})$$

zu suchen. m muss offenbar > 2 sein. Für $m = 4$ erhält man das kleinstmögliche v für $e_1 = e_2 = e_3 = 2, e_4 = 3$ mit $v = \frac{1}{6}$.

$g = h = 0, m = 3$, alle $e_i \geq 3$ führt für $[3, 3, 4]$ auf das kleinstmögliche $v = \frac{1}{12}$, alle anderen Fälle erfüllen o.B.d.A. $e_1 = 2, 3 \leq e_2 \leq e_3$, und nach Kontrolle von $[2, 4, 5]$ bleibt schließlich nur noch $[2, 3, 7]$ mit $v = \frac{1}{42}$. [Ad] \square

6 Riemannsche Flächen

6.1 Der Bahnenraum der Fuchsschen Gruppen

Definition 6.1 „Riemannsche Flächen“ sind komplex eindimensionale Mannigfaltigkeiten, d.h. zusammenhängende Hausdorffräume mit einem „Atlas“, bestehend aus einer

Überdeckung durch offene Mengen U mit Kartenabbildungen $k : U \rightarrow V \subset \mathbb{C}$. Dabei sind die Kartenabbildungen Homöomorphismen, welche untereinander holomorph verträglich sind, d.h. für je zwei Kartenabbildungen k_1, k_2 auf U_1 bzw. U_2 mit $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ ist $k_1 \circ k_2^{-1}$ biholomorph überall da, wo es definiert ist.

Beispiele Riemannscher Flächen sind alle Gebiete in \mathbb{C} oder auch in $\hat{\mathbb{C}}$. Neben der Riemannschen Zahlenkugel sind die einfachsten kompakten Riemannschen Flächen die *Tori*, Bahnräume $T := \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau)$ der Operation des Gitters $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ auf \mathbb{C} , wenn man z.B. $\tau \in \mathbb{H}$ voraussetzt und die Kartenabbildungen so konstruiert, dass die offenen $V \subset \mathbb{C}$ so klein gewählt werden, dass sie jeweils höchstens einen Punkt jeder Λ -Bahn enthalten; dann wähle man k^{-1} als Restriktion auf V der kanonischen Projektion $\mathbb{C} \rightarrow T : z \mapsto z + \Lambda$.

Definition 6.2 „Holomorphe“ bzw. „meromorphe“ Funktionen $f : G \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ auf Gebieten G Riemannscher Flächen definiert man dadurch, dass für alle Kartenabbildungen k die Funktion $f \circ k^{-1}$ holomorph bzw. meromorph ist, wo sie definiert ist. Entsprechend definiert man holomorphe Abbildungen zwischen Riemannschen Flächen sowie „Isomorphismen“ und „Automorphismen“ Riemannscher Flächen.

Aufgabe 6.1 Finden Sie unendlich viele Automorphismen des Torus $T = \mathbb{C}/\Lambda$.

Aufgabe 6.2 Zeigen Sie, dass zwei Tori $\mathbb{C}/\Lambda, \mathbb{C}/\Phi$ genau dann isomorph sind, wenn es ein $a \in \mathbb{C}^*$ gibt mit $\Phi = a\Lambda$.

Was hat das mit Fuchsschen Gruppen zu tun? Hier die Antwort:

Satz 6.1 Auch der Bahnräume $X := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ einer Fuchsschen Gruppe erhält durch die Projektionsabbildung $p : \mathbb{H} \rightarrow X$ die Struktur einer Riemannschen Fläche.

Beweis. Für torsionsfreie Fuchssche Gruppen – d.h. ohne elliptische Elemente – kann man die gleiche Idee wie für die Tori verwenden: Jedes $z \in \mathbb{H}$ hat eine offene Umgebung V , auf der die Restriktion von p bijektiv ist und als Inverses einer Kartenabbildung benutzt werden kann. Die Verträglichkeit zweier Karten mit überlappenden U_1, U_2 wird dann i.a. nicht durch eine Translation im Gitter Λ , sondern durch eine Möbiustransformation in Γ hergestellt. In elliptischen Fixpunkten z_0 – etwa der Ordnung $r \in \mathbb{N}, r > 1$ – ist diese Idee unbrauchbar, weil in jeder noch so kleinen Umgebung von z_0 die Projektion p nicht bijektiv ist. Hier erinnere man sich daran, dass man wie in Hilfssatz 1.10 die Fixpunkte z_0, \bar{z}_0 per Möbiustransformation nach $0, \infty$ schicken kann, so dass die zugehörige Fix-Transformation von der Form $z \mapsto e^{2\pi i/r} z$ wird. Dann ist leicht zu sehen, dass in einer hinreichend kleinen Umgebung von 0 anstelle von p die Abbildung $z \mapsto z^r$ eine Bijektion zwischen den Bahnen $\Gamma(z)$ und den Punkten einer kleinen Umgebung von 0 liefert. Auch diese Kartenabbildungen sind mit den üblichen (Restriktionen von p bzw. deren Umkehrungen) außerhalb der Fixpunkte lokal holomorph verträglich. \square

Satz 6.2 Sei Γ eine Fuchssche Gruppe. Die Riemannsche Fläche $X = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ ist genau dann kompakt, wenn der abgeschlossene Fundamentalbereich \overline{F} von Γ kompakt ist bzw. wenn Γ eine Polygongruppe ohne Spitzen ist, d.h. mit Signatur $(h = 0; e_1, \dots, e_m; g)$; dabei ist g das Geschlecht von X .

Beweis. Wenn \overline{F} kompakt ist, ist X als Bild von \overline{F} unter der (stetigen!) Projektionsabbildung p ebenfalls kompakt. Andernfalls ist F in keiner beschränkten hyperbolischen Kreisscheibe enthalten, man kann also eine unbeschränkte und nicht in \mathbb{H} konvergente Folge in F finden, deren p -Bilder auch in X keinen Häufungspunkt haben.

Die Aussage über das Geschlecht g von X (d.h. die Anzahl der Henkel, wenn man X als homöomorph zu einer „Kugel mit Henkeln“ darstellt – es gibt aber auch algebraisch intelligentere Definitionen des Geschlechts) folgt aus der **Eulerschen Polyederformel**: Man beachte, dass Riemannsche Flächen stets orientierbar sind, weil die Verträglichkeitsabbildungen zwischen den Karten biholomorph, darum orientierungserhaltend sind. Dann ist das Geschlecht g gegeben durch

$$E - K + Z = 2 - 2g ,$$

wenn E die Anzahl der Ecken, K die Anzahl der Kanten und Z die Anzahl der Zellen einer beliebigen Zellenzerlegung von X ist. In unserem Fall erhalten wir eine Zellenzerlegung durch die Projektion p von \overline{F} . Dabei wird F zu der einzigen Zelle, und wenn wir der Einfachheit halber einen kanonischen Fundamentalbereich nehmen, haben wir $E = 1 + m$ für die einzige Γ -Bahn der zufälligen Ecken plus m für die Γ -Bahnen der elliptischen Eckpunkte. Die $2m + 4g$ Randlinien von F werden durch p jeweils paarweise miteinander identifiziert, das ergibt $K = m + 2g$, nach der Eulerschen Formel ist das topologische Geschlecht also genau die Hälfte der hyperbolischen Erzeugenden in der Präsentation von Γ . \square

Als Beispiel mag zunächst Abbildung 3 dienen, wo man durch Verkleben der passenden Seitenpaare eine Fläche vom Geschlecht 2 bekommt, dann die Dreiecksgruppen Δ mit Signatur $[p, q, r]$. Der Fundamentalbereich aus Abbildung 4 führt auf $E = 3$, $K = 2$, $Z = 1$, also $g = 0$. Die Theorie der Riemannschen Flächen sagt, dass es in Geschlecht 0 bis auf Isomorphie nur eine Fläche gibt, nämlich $\hat{\mathbb{C}}$ (s.dazu unten die Sätze 6.3 und 6.4), wir erhalten hier also $\Delta \backslash \mathbb{H} \cong \hat{\mathbb{C}}$. Wir werden für diesen Sachverhalt später noch ein direkteres Argument nachliefern.

Es sei noch erwähnt, dass man auch für Polygongruppen Γ mit Spitzen die Riemannsche Fläche $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ kompaktifizieren kann, indem man für jede Spitze einen Punkt einfügt – und dort natürlich jeweils Umgebungen und Karten definiert. Auch für diese kompaktifizierten Flächen ist das Geschlecht g die halbe Anzahl der für Γ benötigten hyperbolischen Erzeugenden. Die ursprüngliche Riemannsche Fläche $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ darf man sich als vorstellen als eine kompakte Riemannsche Fläche, aus der man h Punkte – nämlich die Γ -Bahnen der Spitzen – entfernt hat.

6.2 Überlagerungen und Automorphismen

Märchenstunde I. Topologische Räume X , welche zusammenhängend und lokal sogar einfach zusammenhängend sind – so wie unsere Riemannschen Flächen –, besitzen immer eine *universelle Überlagerung* Y . Das ist ein einfach zusammenhängender Raum, zusammen mit einer stetigen surjektiven Abbildung $u : Y \rightarrow X$ mit der Eigenschaft, dass jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung V besitzt, für die das Urbild $u^{-1}(V)$ in eine disjunkte Vereinigung $\bigcup U_j$ offener U_j zerfällt, in denen alle Restriktionen $u|_{U_j}$ Homöomorphismen $U_j \rightarrow V$ definieren. Man denke etwa an einen Torus $X := \mathbb{C}/\Lambda$ für ein Gitter $\Lambda \subset \mathbb{C}$, $Y = \mathbb{C}$ als Überlagerungsraum und $u : z \mapsto z + \Lambda$ als Überlagerungsabbildung, V so klein gewählt, dass die U_j kleine offene Mengen in \mathbb{C} sind, die keine zwei Punkte der gleichen Λ -Bahn enthalten.

„Universell“ heißt, dass jede andere Überlagerung $a : Z \rightarrow X$ ein Abkömmling von u ist, auch wenn Z nicht einfach zusammenhängt, in dem folgenden Sinn: Wenn $a(z) = x = u(y)$ ist, dann gibt es immer eine eindeutig bestimmte Überlagerungsabbildung

$$b : Y \rightarrow Z \quad \text{mit} \quad b(y) = z \quad \text{und} \quad a \circ b = u .$$

Wenn jetzt X sogar eine Riemannsche Fläche ist, d.h. durch einen Atlas aus Kartenabbildungen f eine komplexe Struktur besitzt, dann können wir diese komplexe Struktur auf jede Überlagerung „liften“ – insbesondere auf die universelle Überlagerung Y , indem wir die $f \circ u$ zu Kartenabbildungen auf Y machen, genauer: jene Restriktionen $f \circ u|_U$, für die $u|_U$ ein Homöomorphismus ist. Man überzeuge sich davon, dass das funktioniert und dass Y so zu einer einfach zusammenhängenden Riemannschen Fläche wird. Automatisch wird u dadurch zu einer holomorphen Abbildung Riemannscher Flächen, sogar lokal biholomorph, vor allem aber gilt für Y der **große Riemannsche Abbildungssatz**, auch **Hauptsatz der Uniformisierungstheorie** genannt:

Satz 6.3 *Eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche Y ist isomorph zu $\hat{\mathbb{C}}$, \mathbb{C} oder \mathbb{H} .* □

(Ende der Märchenstunde, jetzt wieder Arbeit) Die oben diskutierte Universalitätsbedingung an $u : Y \rightarrow X$ hat nun außerdem die folgende bemerkenswerte Konsequenz. Wählt man $Z = Y$ und $a = u$, $y \in Y$, $x \in X$ mit $u(y) = x$, dazu ein anderes Urbild $z \in u^{-1}(x)$ von x , dann existiert eine (sogar bi-)holomorphe Abbildung

$$b : Y \rightarrow Y \quad \text{mit} \quad u \circ b = u \quad \text{und} \quad b(y) = z ,$$

die also die Punkte aller Fasern von u permutiert. Alle diese Automorphismen von Y bilden eine diskontinuierliche und auf den Fasern von u transitiv operierende Gruppe $G \subset \text{Aut } Y$ fixpunktfrei (jedenfalls für Elemente $\neq \text{id}$) operierender Automorphismen. G heißt dann die *Überlagerungsgruppe* von u bzw. von X .

Aufgabe 6.3 *Warum diskontinuierlich, warum transitiv auf den Fasern, warum fixpunktfrei?*

Genau wie wir das für Tori und für Fuchssche Gruppen gemacht haben, lässt sich X nun als Bahnenraum oder „Quotient“ $G \backslash Y$ beschreiben. Wenn wir uns im folgenden auf kompakte Riemannsche Flächen beschränken, können wir drei Möglichkeiten unterscheiden:

Satz 6.4 *Die einzige Riemannsche Fläche vom Geschlecht 0 ist $\hat{\mathbb{C}}$.*

Riemannsche Flächen vom Geschlecht 1 sind Tori \mathbb{C}/Λ .

Riemannsche Flächen vom Geschlecht > 1 sind Bahnenräume $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ kokompakter torsionsfreier Polygongruppen.

Aufgabe 6.4 *Beweisen Sie diesen Satz, indem Sie zeigen, dass $\text{Aut } \hat{\mathbb{C}}$ keine nichttrivialen Elemente ohne Fixpunkte besitzt, und indem Sie die torsionsfreien Automorphismengruppen von \mathbb{C} mit kompaktem Quotienten bestimmen.*

Nebenbei sei nun an die Aufgaben 1.1 und 6.1 erinnert, aus denen wir gelernt haben, dass kompakte Riemannsche Flächen vom Geschlecht ≤ 1 enorm viele Automorphismen besitzen. Das ist ganz anders für höheres Geschlecht ([Hu]):

Satz 6.5 (A. Hurwitz 1892) *Kompakte Riemannsche Flächen vom Geschlecht $g > 1$ haben höchstens $84(g - 1)$ Automorphismen.*

Beweis (nach C.L. Siegel). Sei $X = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ kompakte Riemannsche Fläche eines Geschlechts $g > 1$, dabei Γ torsionsfreie Polygongruppe, also ihre Überlagerungsgruppe (s.o.), in der Topologie häufig auch als *Flächengruppe* bezeichnet. Mit $u : \mathbb{H} \rightarrow X$ sei wieder die zugehörige Überlagerungsabbildung bezeichnet. Jeder Automorphismus $a : X \rightarrow X$ liefert eine andere Überlagerungsabbildung $a \circ u$ für X , deswegen (Universalität!) muss ein Automorphismus $b : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ existieren mit $u \circ b = a \circ u$. Nach Aufgabe 1.1 muss b eine Möbiustransformation sein, allerdings muss sie zusätzliche Bedingungen erfüllen: Genau die Transformationen $g \in \Gamma$ erfüllen die Eigenschaft $u \circ g = u$, darum gilt ebenso $u \circ b \circ g = u \circ b \Leftrightarrow g \in \Gamma$, also muss $bgb^{-1} \in \Gamma$ sein für alle $g \in \Gamma$. Umgekehrt können wir mit solchen b auch Automorphismen von X erzeugen, somit erhalten wir

Hilfssatz 6.1 *Die Automorphismengruppe $\text{Aut } X$ ist isomorph zur Faktorgruppe $N(\Gamma)/\Gamma$, wobei $N(\Gamma)$ der Normalisator der Überlagerungsgruppe Γ von X in $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ ist. \square*

Nun muss man wissen, wie groß $N(\Gamma)$ werden kann. In der Tat ist $N(\Gamma)$ eine Obergruppe von endlichem Index von Γ , denn

Hilfssatz 6.2 *Für jede nicht-abelsche Fuchssche Gruppe Γ ist auch ihr Normalisator $N(\Gamma)$ in $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ eine Fuchssche Gruppe.*

Beweis von Hilfssatz 6.2: Andernfalls gäbe es zwei Elemente $g_1, g_2 \in \Gamma$ mit verschiedenen Fixpunkten in $\hat{\mathbb{C}}$ und eine in $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ konvergente Folge von Elementen $f_n \in N(\Gamma)$ (Satz 2.1). Wir dürfen o.B.d.A. sogar annehmen, dass die f_n gegen id konvergieren – man betrachte etwa die Folge der $f_{m+n}f_m^{-1}$ und das Cauchy-Kriterium. Dann liegen alle $f_n g_i f_n^{-1} \in \Gamma$ für beide $i = 1, 2$ und konvergieren für $n \rightarrow \infty$ jeweils gegen g_i . Da Γ diskret ist, muss für fast alle n bereits

$$f_n g_1 f_n^{-1} = g_1, \quad f_n g_2 f_n^{-1} = g_2$$

sein, also f_n sowohl mit g_1 wie mit g_2 kommutieren. Das geht nur, wenn ihre Fixpunkte sowohl mit denen von g_1 wie mit denen von g_2 übereinstimmen, Widerspruch. \square

Schluss des *Beweises* von Satz 6.5: Wir wissen jetzt nach Satz 4.6 und 4.5

$$|\mathrm{Aut} X| = (N(\Gamma) : \Gamma) = \frac{\mathrm{Vol} \Gamma}{\mathrm{Vol} N(\Gamma)} = \frac{2\pi(2g-2)}{\mathrm{Vol} N(\Gamma)},$$

und weil $N(\Gamma)$ eine Fuchssche Gruppe ist, können wir die Abschätzung aus Satz 5.2 einsetzen, welche mit $\mathrm{Vol} N(\Gamma) \geq \pi/21$ das Resultat

$$|\mathrm{Aut} X| \leq 84(g-1) \quad \text{ergibt.} \quad \square$$

Nebenbei sagt der Beweis außerdem, dass diese obere Schranke genau dann angenommen wird, wenn Γ ein Normalteiler der Dreiecksgruppe $N(\Gamma) = \Delta$ mit Signatur $[2, 3, 7]$ ist. Die zugehörige Riemannsche Fläche X hat dann eine Automorphismengruppe mit Erzeugenden

$$a, b, c \quad \text{und (mindestens) den Relationen} \quad a^2 = b^3 = c^7 = \mathrm{id} = abc, \quad ,$$

was nicht so einfach zu erfüllen ist. Das erste Beispiel einer solchen *Hurwitzgruppe* ist $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ der Ordnung 168. Die zugehörige Riemannsche Fläche X hat das Geschlecht 3 und natürlich eine Überlagerungsgruppe Γ vom Index 168 in Δ . Abb. 5 (aus [KI]) zeigt einen (nicht kanonischen) Fundamentalbereich von Γ . Die Fläche heißt die *Kleinsche Quartik* und kann durch die Gleichung einer projektiven algebraischen Kurve im $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ durch

$$x^3 y + y^3 z + z^3 x = 0$$

beschrieben werden; davon mehr im letzten Kapitel.

Aufgabe 6.5 Finden Sie drei Erzeugende a, b, c von $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$, welche die Relationen $a^2 = b^3 = c^7 = \mathrm{id} = abc$ erfüllen! Tipp: Aufg. 4.4 benutzen!

Die nächste Hurwitzgruppe ist $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_8)$ mit Ordnung 504, erstmals 1899 aufgetaucht in Arbeiten von Burnside und von Fricke; die zugehörige Riemannsche Fläche hat das Geschlecht 7. Die ersten unendlichen Serien von Hurwitzgruppen z.B. in Form gewisser $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F})$ hat Macbeath in den 1960-er Jahren gefunden. Das nächstkleinste Beispiel sind drei nicht-isomorphe Flächen mit Automorphismengruppe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{13})$ und Geschlecht 14.

Aufgabe 6.6 Δ sei eine Dreiecksgruppe der Signatur $[p, q, r]$, $h : \Delta \rightarrow G$ Homomorphismus auf eine endliche Gruppe. Zeigen Sie: Der Kern von h ist genau dann torsionsfrei, wenn die drei Erzeugenden von Δ auf Elemente in G der gleichen Ordnung abgebildet werden.

Aufgabe 6.7 Δ sei eine Dreiecksgruppe der Signatur $[p, q, r]$, p, q, r drei verschiedene Primzahlen. Zeigen Sie, dass jeder echte Normalteiler von Δ torsionsfrei ist.

Aufgabe 6.8 Warum gibt es keine Hurwitzgruppe für Geschlecht 2?

6.3 Automorphe Funktionen

Definition 6.3 Γ sei eine Fuchssche Gruppe. Eine meromorphe Funktion $f : \mathbb{H} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ heißt „ Γ -automorph“, wenn

$$f(\gamma(z)) = f(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}, \gamma \in \Gamma.$$

Die Γ -automorphen Funktionen bilden einen Körper $\mathbb{C}(\Gamma)$.

Es ist offensichtlich, dass auch die meromorphen Funktionen g auf Riemannschen Flächen X (weil zusammenhängend) einen Körper $\mathbb{C}(X)$ bilden. Die kanonische Projektion $p : \mathbb{H} \rightarrow X := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ macht aus jeder solchen meromorphen Funktion eine Γ -automorphe Funktion $f = g \circ p$, daher

Satz 6.6 Sei Γ eine Fuchssche Gruppe und $X := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ die zugehörige Riemannsche Fläche. Dann ist $\mathbb{C}(\Gamma) \cong \mathbb{C}(X)$. \square

Dass dieser Funktionenkörper nicht nur aus Konstanten besteht, ist wahr, aber keineswegs trivial: In höheren Dimensionen gibt es komplexe Mannigfaltigkeiten, deren einzige global meromorphe Funktionen die Konstanten sind! Aus Aufgabe 1.2 wissen wir glücklicherweise bereits, dass $\mathbb{C}(\hat{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(z)$ der Körper der rationalen Funktionen ist, für andere Riemannsche Flächen ist die Konstruktion nichttrivialer meromorpher Funktionen viel schwerer. In Geschlecht 1 kann man z.B. durch geeignete unendliche Reihen die *Weierstrass'sche \wp -Funktion* konstruieren; auch für Fuchssche Gruppen gibt es analoge Konstruktionen mit sogenannten *Poincaré-Reihen*, vgl. Abschnitt 2.2.2 in [GG], oder man benutzt tieferliegende (cohomologische) Hilfsmittel für Riemannsche Flächen wie den *Satz von Riemann-Roch*, siehe z.B. [Mö]. Im folgenden wird nur eine sehr eingeschränkte Version dieser Fragestellung behandelt, nämlich *wie konstruiert man Δ -automorphe Funktionen für Dreiecksgruppen?*

Satz 6.7 Δ sei eine Fuchssche Dreiecksgruppe mit Signatur $[p, q, r]$. Ihr Fundamentalbereich F sei in Form eines hyperbolischen Doppeldreiecks wie in Abb. 4 gegeben. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Δ -automorphe Funktion $j : \mathbb{H} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, welche das linke

offene Dreieck biholomorph auf \mathbb{H} abbildet, seinen Rand auf $\hat{\mathbb{R}}$, den oberen Eckpunkt P (der Ordnung p) auf ∞ , den linken Eckpunkt Q (der Ordnung q) auf 0 und den unteren Eckpunkt R (der Ordnung r) auf 1 . Das rechte offene Dreieck wird durch j biholomorph auf die untere Halbebene $-\mathbb{H}$ abgebildet; j ist in ganz \mathbb{H} lokal biholomorph mit Ausnahme der elliptischen Fixpunkte: In der Bahn ΔP hat j jeweils p -fache Pole, in ΔQ hat j jeweils q -fache Nullstellen, und in ΔR hat $j - 1$ jeweils r -fache Nullstellen. j definiert eine Bijektion zwischen den Δ -Bahnen und den Punkten von $\hat{\mathbb{C}}$. Der Körper aller Δ -automorphen Funktionen besteht aus rationalen Funktionen von j , es gilt also

$$\mathbb{C}(\Delta) = \mathbb{C}(j) \quad .$$

Zusatz: Wir können ∞ in der Signatur zulassen, wenn wir die Werte von j in den Spitzen als Limites interpretieren. Im Fall der elliptischen Modulgruppe (Signatur $[2, 3, \infty]$) entsteht ein konstantes Vielfaches einer dort auf ganz anderem Weg konstruierten *Modulfunktion*, und für die Signatur $[\infty, \infty, \infty]$ erhält man die sogenannte *Legendre-Funktion* λ , von der noch die Rede sein wird.

Eine hoffentlich nicht zu knappe *Beweisskizze*: Die Existenz von j kann man zunächst auf den Riemannschen Abbildungssatz (S. 6.3) zurückführen: Es muss eine biholomorphe Abbildung zwischen dem einfach zusammenhängenden $Y =$ (linkes offenes Dreieck in Abb. 4) und \mathbb{H} existieren (Aufgabe: Warum kommen die beiden anderen Standard-Typen \mathbb{C} und $\hat{\mathbb{C}}$ nicht in Frage?). Da ∂Y eine stückweise glatte einfach geschlossene Randkurve ist, kann man j nach einem Satz von Carathéodory sogar stetig auf den Rand fortsetzen und ggf. durch Nachschalten einer hyperbolischen Bewegung so normieren, dass die Eckpunkte auf $0, 1, \infty$ abgebildet werden.

Der nächste Schritt ist die Fortsetzung von j auf das rechte Dreieck des Fundamentalbereichs; das lässt sich machen mit Hilfe des *Schwarz'schen Spiegelungsprinzips*, einfach zu beweisen, wenn die Seite ein Intervall $\subset \mathbb{R}$ ist, aber leicht zu übertragen auf Seiten, die aus Kreisbögen oder beliebigen Geraden bestehen (Möbiustransformation!). Das so ausge dehnte j ist auf der trennenden Seite sogar holomorph, wie man mit Hilfe des Satzes von Morera (Umkehrung des Cauchy'schen Integralsatzes) einsehen kann.

Was man mit diesem Schritt gemacht hat, kann man natürlich an den anderen Seiten des Dreiecks ebenso durchführen und so j fortsetzen auf die benachbarten Dreiecke aller Nachbarfundamentaltbereiche von F , und von diesen ausgehend induktiv über die ganze Parkettierung von \mathbb{H} durch die Δ -Bilder von F . Dass dieser Prozess eine global wohldefinierte meromorphe Funktion auf \mathbb{H} liefert, erfordert noch zwei Zusatzargumente:

1. Es ergibt sich kein Widerspruch durch eine sukzessive Fortsetzung mit dem Spiegelungsprinzip in ein Dreieck, in welchem j schon zuvor definiert war, denn eine Umrundung eines Eckpunkts erfordert immer eine gerade Anzahl von Spiegelungen; eigentlich nutzen wir hier die Tatsache, dass Δ eine Untergruppe vom Index 2 in einer hyperbolischen Bewegungsgruppe ist, die von drei Spiegelungen erzeugt wird, und dass die korrespondierenden Fortsetzungen von j jedesmal einer euklidischen Spiegelung entsprechen.
2. In den Eckpunkten des Fundamentalbereichs (und seiner Δ -Bilder, soweit sie keine Spitzen sind) ist j meromorph nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz. Dass die Pol-

und Nullstellenordnungen so wie angegeben ausfallen, kann man einfach daran ablesen, dass wegen der geometrischen Konstruktion z.B. in einer punktierten Umgebung von R die Funktion j eine $(r : 1)$ -Abbildung ist.

Der Riemannsche Abbildungssatz hat leider das Manko, dass der Existenzbeweis für die Abbildung im allgemeinen wenig explizit ist. Für Kreisbogendreiecke ist das glücklicherweise anders: Man kann j auch als Umkehrfunktion einer *Schwarz'schen Dreiecksfunktion* $d : \mathbb{H} \rightarrow PQR$ -Dreieck beschreiben; diese lässt sich als Quotient zweier linear unabhängiger Lösungen einer *Gauß'schen hypergeometrischen Differentialgleichung* beschreiben, deren Parameter eindeutig durch $[p, q, r]$ bestimmt sind. Gut und einigermaßen knapp mag sich die Leserin in einem Übersichtsartikel von Frits Beukers [Beu] über diese Möglichkeit informieren.

Aus der Konstruktion ergibt sich automatisch, dass j eine Bijektion vermittelt zwischen der Menge der Δ -Bahnen in \mathbb{H} und den Punkten von $\hat{\mathbb{C}}$, nebenbei haben wir also die alte Behauptung

$$\Delta \backslash \mathbb{H} \cong \hat{\mathbb{C}}$$

jedenfalls für Dreiecksgruppen ohne Spitzen. Aus Aufgabe 1.2 folgt dann die Behauptung über den Funktionenkörper. \square

Zum Schluss hier Anwendungen auf die klassische Funktionentheorie, eine Verschärfung des *Satzes von Casorati-Weierstrass*:

Satz 6.8 („Kleiner Satz von Picard“) *Eine ganze transzendente Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, d.h. die holomorph, aber kein Polynom ist (oder: die eine wesentliche Singularität in ∞ besitzt), nimmt jeden Wert in \mathbb{C} mit höchstens einer Ausnahme an.*

Beweis. Angenommen, es gäbe eine solche Funktion, die die Werte $a \neq b$ nicht annimmt. Übergang zu $(f(z) - a)/(b - a)$ zeigt, dass wir o.B.d.A. $a = 0, b = 1$ annehmen dürfen. Die oben konstruierte Funktion $j = \lambda$ für die Dreiecksgruppe Δ mit Signatur $[\infty, \infty, \infty]$ nimmt die Werte $0, 1, \infty$ nicht an und ist in ganz \mathbb{H} lokal biholomorph. wir könnten also in einem hinreichend kleinen Gebiet $\subset \mathbb{C}$ die holomorphe Funktion $j^{-1} \circ f$ definieren, die sich längs jeden Weges in \mathbb{C} holomorph fortsetzen lässt. Da \mathbb{C} einfach zusammenhängend ist, ist nach dem *Monodromiesatz* diese Fortsetzung wegunabhängig, wir erhalten also eine global auf \mathbb{C} wohldefinierte holomorphe Funktion mit Werten in \mathbb{H} , die wir weiterhin $j^{-1} \circ f$ nennen. Durch Nachschalten der Cayley-Transformation C^{-1} aus Beispiel 1.1 wird daraus eine ganze holomorphe Funktion mit Werten in \mathbb{D} im Widerspruch zum Satz von Liouville. \square

Das Beispiel der Exponentialfunktion (keine Nullstelle!) zeigt, dass die eine Ausnahme sehr wohl vorkommen kann, dass der Satz also scharf ist. Der *große Satz von Picard* sagt, dass die entsprechende Aussage auch in beliebig kleinen Umgebungen von wesentlichen Singularitäten nicht-ganzer Funktionen richtig ist:

Satz 6.9 („Großer Satz von Picard“) *f sei holomorph in*

$$G := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < R\}$$

und besitze in z_0 eine wesentliche Singularität. Dann nimmt f in jeder Umgebung von z_0 jeden Wert $\in \mathbb{C}$ unendlich oft an – mit höchstens einer Ausnahme.

Beweis. O.B.d.A. dürfen wir $z_0 = 0$ annehmen. Wenn es zwei Werte $a \neq b$ gibt, welche f in G nur endlich oft annimmt, können wir R soweit verkleinern, dass f die beiden Werte gar nicht annimmt, und wir können ebenso wie im Beweis von Satz 6.8 o.B.d.A. $a = 0, b = 1$ annehmen. Auch die Funktionenfolge $f_n : G \rightarrow \mathbb{C}$, $f_n(z) := f(\frac{z}{n})$ nimmt dann die Werte 0 und 1 nicht an, in allen einfach zusammenhängenden Teilgebieten von G ist – mit $j = \lambda$ zur Signatur $[\infty, \infty, \infty]$ ebenso wie oben – $C^{-1} \circ j^{-1} \circ f_n$ eine beschränkte Familie, die f_n bilden also eine *normale Familie* und besitzt nach dem Satz von Montel eine kompakt konvergente Teilfolge f_{n_k} . Auf $|z| = \frac{R}{2}$ konvergiert f_{n_k} gegen eine holomorphe Funktion. Für alle hinreichen großen k gibt es dann eine positive Konstante M , so dass

$$|f_{n_k}(z)| < M, \text{ wenn } |z| = \frac{R}{2} \quad \Rightarrow \quad |f(z)| < M, \text{ wenn } |z| = \frac{R}{2n_k}.$$

Nach dem Maximumprinzip, angewandt auf Kreisringe, ist dann f beschränkt in $|z| < R/2n_1$ und hat darum eine hebbare Singularität in 0. \square

7 Dreiecksgruppen und Belyïfunktionen

7.1 Riemannsche Flächen und algebraische Kurven

Aufgabe 7.1 $f : X \rightarrow Y$, $f(x_0) = y_0$, sei holomorphe Abbildung Riemannscher Flächen, nicht konstant. Zeigen Sie, dass es Kartenabbildungen p, q für Umgebungen von x_0 bzw. y_0 gibt mit $p(x_0) = 0 = q(y_0)$, so dass in einer kleinen Umgebung von 0 gilt:

$$q \circ f \circ p^{-1} : z \mapsto z^n$$

Beweisen Sie, dass $n \in \mathbb{N}$ unabhängig ist von der Wahl der Kartenabbildungen.

Definition 7.1 Wenn $n > 1$, heißt f „verzweigt in x_0 “ mit „Verzweigungsindex“ n . x_0 heißt „Verzweigungspunkt“ oder „kritischer Punkt“, y_0 „kritischer Wert“ von f .

Aufgabe 7.2 Zeigen Sie, dass der Grad einer nicht-konstanten holomorphen Funktion auf einer kompakten Riemannschen Fläche wohldefiniert ist, d.h. dass die Anzahl der Urbilder nicht-kritischer Werte konstant ist.

Märchenstunde II. Zu den ersten Beispielen Riemannscher Flächen gehören die *glatten algebraischen Kurven*, also durch Polynomgleichungen definiert im \mathbb{C}^n oder im projektiven $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, letztere dann sogar kompakt. Die Umkehrung gilt aber auch: *Kompakte Riemannsche Flächen sind glatte algebraische Kurven im $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, und holomorphe Abbildungen*

zwischen kompakten Riemannschen Flächen können dann als algebraische Morphismen beschrieben werden, d.h. durch rationale Funktionen. Vornehmer gesagt: Es gibt hier eine Äquivalenz von Kategorien (eine Spezialfall von Serre's GAGA-Prinzip). Der Beweis ist nicht sehr umfangreich (drei Seiten in [JW]), wenn man die Existenz genügend vieler meromorpher Funktionen auf der Riemannschen Fläche bewiesen hat.

Im Licht der Uniformisierungstheorie des letzten Kapitels müsste es also möglich sein, zu jeder – durch Polynomgleichungen gegebenen – Kurve (explizit?) eine Fuchssche Gruppe $\Gamma \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ zu finden, so dass die Kurve als $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ beschrieben werden kann; und umgekehrt sollte man zu jedem solchen Γ (explizite?) Polynomgleichungen finden können, die den Quotientenraum als algebraische Kurve beschreiben. Im allgemeinen ist dies ein aussichtsloses Programm, allerdings hat man schon im 19. Jahrhundert einzelne Beispiele dafür gefunden, man denke an die oben erwähnte Kleinsche Quartik ([Kl]). Warum man in diesen Beispielen Erfolg gehabt hat, ist eigentlich erst in jüngster Zeit verstanden worden, und davon soll in diesem Kapitel die Rede sein. Die bescheidenste Frage, die man hier stellen kann, ist: *Gibt es ein funktionentheoretisches Kriterium dafür, ob die Kurve über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert werden kann?* Soll heißen: Unter welchen Bedingungen können wir durch geschickte Koordinatenwahl bzw. einen Isomorphismus Polynome mit algebraischen Koeffizienten erhalten? A priori sieht schon diese Frage sehr unzugänglich aus; es war also eine kleine Sensation, dass es eine Antwort gibt, und zwar

Satz 7.1 (Belyĭ 1979) *Die kompakte Riemannsche Fläche X ist als algebraische Kurve genau dann über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierbar, wenn auf X eine nicht-konstante meromorphe Funktion β existiert mit höchstens drei kritischen Werten.*

Solche Funktionen werden *Belyĭfunktionen* genannt und (durch Nachschalten einer Möbiustransformation) meistens so normiert, dass $0, 1, \infty$ die kritischen Werte sind. Drei von beliebig vielen Beispielen:

Beispiel 7.1 *Als algebraische Kurve ist $\hat{\mathbb{C}}$ einfach $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, also sicher über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert (wem die leere Menge von Polynomen nicht gefällt, der nehme $x = 0$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$). Es müsste also Belyĭfunktionen geben. Man nehme z.B.*

$$\beta_1(z) := (2z^2 - 1)^2 \quad \text{oder} \quad \beta_2(z) := \frac{4(1 - z + z^2)^3}{27z^2(1 - z)^2} .$$

β_1 hat zwei doppelte Nullstellen, eine doppelte 1-Stelle und einen vierfachen Pol in ∞ , sonst keine Verzweigungspunkte. β_2 hat zwei dreifache Nullstellen, drei doppelte Pole in $0, 1, \infty$ und drei doppelte 1-Stellen in $-1, \frac{1}{2}, 2$, sonst keine Verzweigungspunkte.

Beispiel 7.2 *X sei jetzt die Fermatkurve $x^n + y^n = z^n$ im $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ und $\beta([x, y, z]) := x^n/z^n$. In fast allen Punkten hat jedes β -Bild n^2 Urbilder mit folgenden Ausnahmen:*

- $\beta = 0$ in den n Punkten $[0, \zeta, 1]$
- $\beta = 1$ in den n Punkten $[\zeta, 0, 1]$

— $\beta = \infty$ in den n Punkten $[\rho, \zeta, 0]$,
wobei ρ eine feste n -te Wurzel von -1 ist und ζ jeweils die n -ten Einheitswurzeln durchläuft,
alles jeweils Verzweigungspunkte vom Index n .

Der *Beweis*, dass aus der Existenz einer Belyïfunktion auch die Existenz eines über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierten Modells folgt, wird in der Literatur manchmal sehr knapp abgetan; inzwischen gibt es verschiedene glaubwürdige Versionen (vgl. [JW], Thm. 4.9, Abschnitt 4.3 und die dort zitierte Literatur), die aber alle den Rahmen dieses Skriptums sprengen würden.

Jenseits einer Märchenerzählung kann man aber die andere Richtung des Satzes von Belyï *beweisen*, und zwar durch Angabe eines – wenn auch umständlichen – Algorithmus. Man startet also mit einer algebraischen Kurve $X \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, die durch Polynomgleichungen mit algebraischen Koeffizienten definiert ist, und mit einer nichttrivialen meromorphen Funktion $f : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, deren kritische Werte ∞ oder algebraische Zahlen sind (eine der Projektionen auf die Koordinaten tut's). Hier ist es zweckmäßig, zwei Lemmata einzuschleiben.

Hilfssatz 7.1 Sei W die Menge der kritischen Werte von f , und $g : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ sei eine rationale Funktion mit kritischen Werten in der Menge V . Dann ist die Menge der kritischen Werte von $g \circ f$ enthalten in $g(W) \cup V$. \square

Hilfssatz 7.2 $p \in \mathbb{Q}[z]$ sei das Minimalpolynom der endlichen Menge $W \subset \overline{\mathbb{Q}}$, d.h. das (normierte) Polynom kleinsten Grades n , so dass p auf ganz W verschwindet, und V sei die Menge der kritischen Werte von p . Dann hat das Minimalpolynom von V einen Grad $< n$.

Zum *Beweis* von *Hilfssatz 7.2* beachte man, dass die Verzweigungspunkte von p die Nullstellen der Ableitung $p' \in \mathbb{Q}[z]$ sind; mit jeder solchen Nullstelle gehören auch alle algebraisch konjugierten Zahlen dazu (\Leftrightarrow die Nullstellenmenge besteht aus Bahnen der absoluten Galoisgruppe), und ihre Anzahl ist $\leq n - 1$; die gleiche Eigenschaft gilt also auch für ihre p -Bilder, weil $p \in \mathbb{Q}[z]$. Folglich hat das Minimalpolynom von V höchstens den Grad $n - 1$. \square

Weiter im *Beweis* von Satz 7.1. Wir betrachten die Menge W der *endlichen* kritischen Werte von f und wählen als nächste Abbildung g_1 das Minimalpolynom von W . Dann bestehen die kritischen Werte von $g_1 \circ f$ aus $\infty, 0$ und einer Menge V_1 kritischer Werte von g_1 . Dieses V_1 hat ein Minimalpolynom $g_2 \in \mathbb{Q}[z]$ kleineren Grades als g_1 , bildet ∞ nach ∞ und 0 in eine rationale Zahl ab. Klar, dass man das Verfahren fortsetzen kann, bis man eine Abbildung $g_m g_{m-1} \dots g_1 f : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ hat, die außer ∞ nur rationale kritische Werte besitzt. Anwenden einer geeigneten Abbildung $z \mapsto rz + s$, $r, s \in \mathbb{Q}$, sorgt dafür, dass diese kritischen Werte alle zwischen 0 und 1 liegen (inklusive der Grenzen).

Wenn $0, 1, \infty$ jetzt die einzigen kritischen Werte sind, haben wir unsere Belyïfunktion gefunden. Andernfalls gibt es mindestens einen weiteren rationalen kritischen Wert

$\frac{n}{m+n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, und wir schalten eine weitere Abbildung

$$z \mapsto \frac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n} z^n (1-z)^m \quad \text{mit} \quad 0, 1 \mapsto 0, \infty \mapsto \infty, \frac{n}{m+n} \mapsto 1$$

nach, welche nirgendwo außer in $0, 1, \infty, \frac{n}{m+n}$ verzweigt (nachrechnen!); klar, dass man auf diese Weise sukzessive die überzähligen rationalen kritischen Werte beseitigen kann und letztlich eine Belyïfunktion erhält. \square

Klar auch, dass dieser Algorithmus schon für, sagen wir, fünf rationale kritische Werte Funktionen von astronomischem Grad und mit gigantischen Koeffizienten produziert. Belyï und andere haben später geschicktere Verfahren angegeben, denen man allerdings noch weniger ansieht, wie man auf so eine Idee kommen kann (vgl. [JW], Lemma 1.4).

Aufgabe 7.3 Finden Sie eine Belyïfunktion (vom Grad 12) für die Kurve C mit affinem Modell $y^4 + x^3 = 1$.

7.2 Belyïfunktionen und Uniformisierung

Satz 7.2 Γ sei eine cokompakte Polygongruppe, X die zugehörige kompakte Riemannsche Fläche. Γ sei in einer Dreiecksgruppe Δ enthalten, j die in Satz 6.7 konstruierte Δ -automorphe Funktion. Dann ist $\mathbb{C}(\Delta) \subset \mathbb{C}(\Gamma)$, und wenn wir den Funktionenkörper $\mathbb{C}(X)$ vermöge Satz 6.6 mit $\mathbb{C}(\Gamma)$ identifizieren, ist $j \in \mathbb{C}(\Delta) \subset \mathbb{C}(\Gamma) = \mathbb{C}(X)$ eine Belyïfunktion auf X , insbesondere ist X als algebraische Kurve über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert.

Beweis. $\mathbb{C}(\Delta) \subset \mathbb{C}(\Gamma)$ ist klar, und zur Identifikation des größeren der beiden Körper mit $\mathbb{C}(X)$ nutzen wir den Isomorphismus aus Satz 6.6. So definiert j eine meromorphe Funktion auf X . Nach der in Satz 6.7 beschriebenen Konstruktion ist j genau in den drei Δ -Bahnen der elliptischen Fixpunkte von Δ verzweigt, und diese werden genau auf $0, 1, \infty$ abgebildet. In allen anderen Punkten ist j lokal biholomorph, und das bleibt richtig für j als Funktion auf X . \square

Dieser Satz lässt sich sogar umkehren:

Satz 7.3 X sei eine kompakte Riemannsche Fläche, und als algebraische Kurve sei X über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert, besitze also eine Belyïfunktion β . Dann gibt es cokompakte Polygongruppen $\Gamma \subset \Delta$, für welche $X \cong \Gamma \backslash \mathbb{H}$ ist, dabei Δ eine Dreiecksgruppe mit einer Funktion $j \in \mathbb{C}(\Delta) \subset \mathbb{C}(X)$, welche als Funktion auf X die Gleichung $j = \beta$ erfüllt.

Beweis. Sei β gegeben, p ein Vielfaches aller Verzweigungsordnungen in den Nullstellen, q ein Vielfaches aller Verzweigungsordnungen in den 1-Stellen (also der Nullstellenordnungen von $\beta - 1$), r ein Vielfaches der Polordnungen von β , o.B.d.A. mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$, Δ Dreiecksgruppe der Signatur $[p, q, r]$, die in Satz 6.7 dazu konstruierte Funktion sei wieder mit j bezeichnet. Außerhalb von $0, 1, \infty$ kann man β^{-1} lokal als holomorphe Funktion

definieren, also auch $\beta^{-1} \circ j$ lokal außerhalb der elliptischen Fixpunkte von Δ . Längs jeden Weges, der diese Fixpunkte vermeidet, kann man diese Funktion holomorph fortsetzen, aber was passiert in den Fixpunkten?

Sei etwa x_0 eine n -fache Nullstelle von β , nach Voraussetzung mit $n|p$; im entsprechenden elliptischen Fixpunkt z_0 von Δ hat j eine p -fache Nullstelle. In hinreichen kleinen Umgebungen dieser Punkte ist β die n -te Potenz einer biholomorphen Funktion bzw. j die p -te Potenz einer biholomorphen Funktion, man kann die Funktionen also in geeigneten Karten schreiben als $w \mapsto w^n$ bzw. $z \mapsto z^p$, wobei x_0 dem Punkt $w = 0$ und z_0 dem Punkt $z = 0$ entspricht. Mit $w = z^{n/p}$ folgt daraus, dass man $\beta^{-1} \circ j$ auch in den Punkt z_0 holomorph fortsetzen kann. In den anderen Verzweigungspunkten von β geht man ganz entsprechend

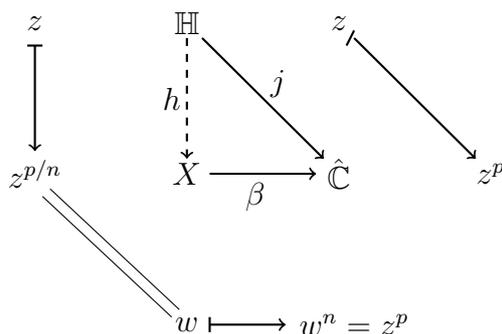


Abbildung 6: Belyĭfunktion und j -Funktion (aus [JW])

vor. Man kann also $h := \beta^{-1} \circ j$ problemlos längs jeden Weges in \mathbb{H} holomorph fortsetzen, und da \mathbb{H} einfach zusammenhängend ist, wird nach dem Monodromiesatz dadurch auf ganz \mathbb{H} eine eindeutige holomorphe Abbildung definiert.

Wenn $h(z_1) = h(z_2)$ für zwei Punkte in \mathbb{H} , dann gilt erst recht $j(z_1) = j(z_2)$, also müssen die beiden Punkte der gleichen Δ -Bahn angehören. Wenn sie keine elliptischen Fixpunkte von Δ sind, ist $\delta \in \Delta$ mit $\delta(z_1) = z_2$ sogar eindeutig bestimmt, und aus der Konstruktion von h ersieht man leicht, dass dann $h \circ \delta = h$ ist, und dass die Menge aller δ mit dieser Eigenschaft eine Untergruppe Γ von Δ wird. h ist also gerade die kanonische Projektion

$$\mathbb{H} \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{H} \cong X.$$

Nach Satz 4.1 und Satz 4.6 ist auch klar, dass Γ cokompakt ist, folglich von endlichem Index in Δ . Genauer kann man sogar zeigen, dass der Index $(\Delta : \Gamma)$ mit dem *Grad* der Belyĭfunktion übereinstimmt, d.h. mit der (endlichen!) Anzahl der Punkte in jeder Faser von β außerhalb der Verzweigungspunkte. \square

Die Konstruktion zeigt darüber hinaus, dass einer Belyĭfunktion beliebig viele verschiedene Uniformisierungen entsprechen, weil nur verlangt wird, dass z.B. p ein Vielfaches der Nullstellenordnungen von β ist. Man könnte also für p, q, r einfach das kgV der entsprechenden Verzweigungsordnungen nehmen, um möglichst „kleine“ Signaturen zu erhalten. Dabei nimmt man allerdings in Kauf, dass z.B. $[2, 3, 5]$ oder $[3, 3, 3]$ als Signatur auftreten

können, offensichtlich unbrauchbar für eine Fuchssche Gruppe. Hier muss man den Begriff erweitern: Die erste Signatur führt auf eine *sphärische Dreiecksgruppe*, hier genau die Ikosaedergruppe; die zweite Signatur gehört einer *euklidischen Dreiecksgruppe*, hier Erweiterung vom Index 3 eines Gitters. Solche Dreiecksgruppen können in unserer Konstruktion nur auftreten, wenn $X \cong \hat{\mathbb{C}}$ (im ersten Fall) bzw. wenn (im zweiten Fall) X einer von zwei sehr speziellen Tori ist.

Noch eine Ergänzung: Wenn p, q, r die genauen Verzweigungsindizes *aller* Verzweigungspunkte von β über $0, 1, \infty$ sind, dann ist h eine (unverzweigte, universelle) Überlagerungsabbildung, d.h. Γ ist dann automatisch die Überlagerungsgruppe von X . Dieser Fall tritt z.B. für alle Hurwitzflächen mit $[2, 3, 7]$ ein oder für alle Fermatkurven zum Exponenten n mit der Signatur $[n, n, n]$. Im letzteren Fall ist Γ die Kommutatoruntergruppe von Δ .

Aufgabe 7.4 Δ sei eine Dreiecksgruppe der Signatur $[n, n, n]$, $n > 3$. Zeigen Sie: Δ besitzt einen torsionsfreien Normalteiler Γ mit Faktorgruppe $G \cong C_n \times C_n$ (direktes Produkt zweier zyklischer Gruppen). Berechnen Sie das Geschlecht der Riemannschen Fläche $X := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ und geben Sie eine Gleichung für X als algebraische Kurve an.

G ist hier nicht die volle Automorphismengruppe von X , denn:

Aufgabe 7.5 Fortsetzung: Γ ist sogar Normalteiler vom Index $6n^2$ in der Dreiecksgruppe $\overline{\Delta}$ der Signatur $[2, 3, 2n]$.

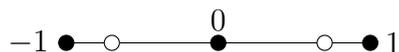
7.3 Dessins d'enfants

Satz 7.4 1) X sei eine kompakte Riemannsche Fläche mit Belyǐfunktion β . Für das reelle Intervall $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ ist das Urbild $D := \beta^{-1}([0, 1])$ ein Graph auf X mit der Eigenschaft, dass die Zusammenhangskomponenten von $X \setminus D$ einfach zusammenhängende Zellen sind.
 2) Bezeichnet man die Urbildpunkte $\beta^{-1}(0)$ mit \circ und die Urbildpunkte $\beta^{-1}(1)$ mit \bullet , so bestehen die Eckpunkte (Knoten) des Graphen gerade aus weißen und schwarzen Punkten.
 3) D ist dann ein „bipartiter Graph“, d.h. jeder weiße Eckpunkt ist nur zu schwarzen Eckpunkten benachbart und umgekehrt. Jede Zelle von $X \setminus D$ enthält genau einen Pol von β .
 4) Die Valenz der weißen Eckpunkte gibt die Nullstellenordnung von β an, die Valenz der schwarzen Eckpunkte die Nullstellenordnung von $\beta - 1$, und die Valenz der Zellen die doppelte Polordnung von β in dem darin gelegenen Pol.
 5) Die Anzahl der Kanten von D ist der „Grad“ von β , d.h. die Anzahl der β -Urbilder aller nicht-kritischen Bildpunkte in $\hat{\mathbb{C}}$.

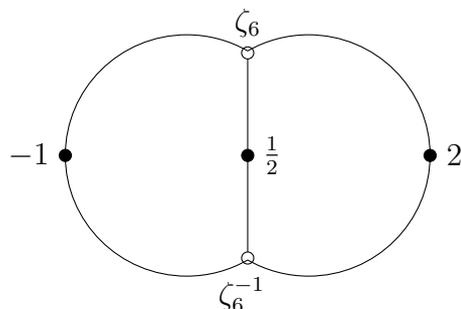
Valenz einer Ecke ist dabei die Anzahl der Kanten des Graphen, die in dieser Ecke enden. Valenz einer Zelle ist die Anzahl der berandenden Kanten; **Vorsicht:** Wenn die Kante auf beiden Seiten die gleiche Zelle berandet, ist sie doppelt zu zählen!

Definition 7.2 Dieser bipartite Graph heißt das zum Paar (X, β) gehörige „Dessin d’enfant“, auch „Children’s drawing“ oder „Kinderzeichnung“ genannt.

Die Bezeichnung geht auf Alexander Grothendieck zurück, der damit ausdrücken wollte, wie einfach diese Objekte sind. Vor dem Beweis zunächst drei Beispiele. Beide Beispiele 7.1 ergeben ein Dessin auf $\hat{\mathbb{C}}$, ja sogar in \mathbb{C} . β_1 hat zwei doppelte Nullstellen in $\pm 1/\sqrt{2}$, eine doppelte 1-Stelle in 0 sowie zwei einfache 1-Stellen in ± 1 . Wir erhalten das folgende Dessin:



Die einzige Zelle ist das Komplement dieses Graphen, berandet von vier doppelt zu zählenden Kanten – entsprechend einem Pol von β_1 der Ordnung 4 in ∞ . Auch β_2 hat einen (doppelten) Pol in ∞ , die unbeschränkte Zelle ihres Graphen ist also von vier Kanten berandet, ebenso wie die beiden anderen Zellen.



(Das Bild stimmt nur bis auf Homöomorphie, aber wir werden noch sehen, dass das keine Rolle spielt.) Um Dessins auf Riemannschen Flächen höheren Geschlechts zu zeichnen, verwendet man am besten Satz 7.2 und unsere Kenntnisse über die j -Funktion aus Satz 6.7 : Man stelle die Riemannsche Fläche X als $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ dar mit einer Untergruppe Γ einer Dreiecksgruppe Δ . Dann ist X eindeutig beschrieben durch einen Fundamentalbereich für Γ mit den zugehörigen Ränderpaarungen. Dieser Fundamentalbereich lässt sich immer so wählen, dass er von den Fundamental-Dreiecken zur Dreiecksgruppe Δ gepflastert wird, und auf diesen Dreiecken nimmt j – also unsere Belyïfunktion β – Werte in $[0, 1]$ auf genau einer Dreieckseite an.

Beispiel 7.3 Die affine Kurve $y^2 = x^5 - x$ kann man durch einen Punkt ∞ zu einer glatten projektiven Kurve ergänzen. Es entsteht eine kompakte Riemannsche Fläche X vom Geschlecht 2. Sie besitzt eine zyklische Automorphismengruppe C_8 , erzeugt z.B. vom Automorphismus

$$a : (x, y) \mapsto (ix, e^{2\pi i/8}y) \quad , \quad a(\infty) = \infty .$$

Auch $b := a^3$ hat die Ordnung 8 und es gilt $(ab)^2 = \text{id}$, $ab : (x, y) \mapsto (x, -y)$, also existiert ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $\Delta \rightarrow C_8$, wenn Δ die Signatur $[8, 8, 2]$ besitzt,

und zwar mit torsionsfreiem Kern Γ (Aufg. 6.6). In der Tat hat X eine Belyifunktion

$$\beta(x, y) = 1 - x^4$$

vom Grad 8, verzweigt vom Index 8 im Pol $R := \infty$, vom Index 2 in den vier Nullstellen $P_k := (i^k, 0)$, $k = 1, 2, 3, 4$, und vom Index 8 in der 1-Stelle $Q = (0, 0)$; sie ist invariant unter a , und die im Beweis von S. 7.3 konstruierte Abbildung h ist hier also eine topologische Überlagerungsabbildung, Γ torsionsfrei mit $X = \Gamma \backslash \mathbb{H}$. Ferner lässt sich ein Fundamentalbereich von Γ durch 8 Fundamentalbereiche von Δ pflastern, und das zur Belyifunktion j gehörige Dessin ergibt sich daraus. (Zeichnung in \mathbb{D} aus [JW], Fig. 5.1)

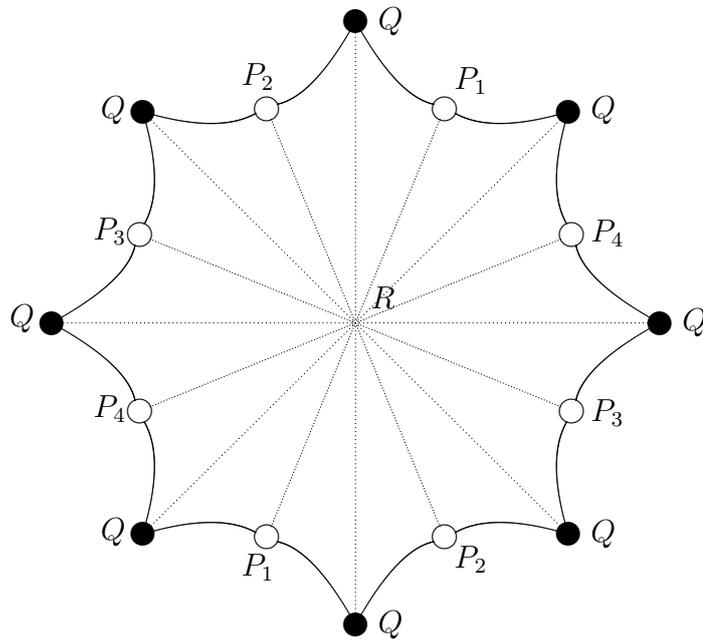


Abbildung 7: Fundamentalbereich F von $\Gamma \subset \Delta$ mit Signatur $[8, 8, 2]$. Dessin für j

Um aus dem Fundamentalbereich F die Kurve X zu machen, sind gegenüberliegende Seiten zu identifizieren, wie es durch die Nummerierung der weißen Punkte nahegelegt wird. Fixpunkte der Ordnung 8 von a und b sind die Punkte $R = \infty$ bzw. $Q = (0, 0)$, für die hyperelliptische Involution $a^4 = ab : (x, y) \mapsto (x, -y)$ kommen noch die vier Fixpunkte $P_k = (i^k, 0)$ hinzu. Der Rand von F gibt außerdem das Dessin auf X an, die punktierten Linien ergänzen die Randlinien zu einer Pflasterung von F durch die Fundamentalbereiche von Δ . Man beachte, dass die angegebene Automorphismengruppe von X gleichzeitig Automorphismengruppe des Dessins ist, d.h. farb-treue Automorphismengruppe des Graphen; sie operiert hier sogar transitiv auf der Menge der Kanten; man nennt ein solches Dessin *regulär* und die zugehörige Riemannsche Fläche *quasiplatonisch*. Die hier vorgenommene Konstruktion illustriert ein allgemeines Faktum:

Satz 7.5 Γ sei kokompakter torsionsfreier Normalteiler der Dreiecksgruppe Δ . $X = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ ist quasilatonisch mit einer Automorphismengruppe $G = \Delta/\Gamma$. Diese operiert kanten-transitiv auf dem zugehörigen regulären Dessin, und seine Belyifunktion ist die Projektion

$$X = \Gamma \backslash \mathbb{H} \rightarrow \hat{C} = \Delta \backslash \mathbb{H} = G \backslash X \quad : \quad \Gamma(z) \mapsto \Delta(z) \quad . \quad \square$$

Die angegebene Automorphismengruppe von X ist im unserem Beispiel nicht die volle Automorphismengruppe von X : Diese ist von Ordnung 48, isomorph zu $GL_2(\mathbb{F}_3)$, entsprechend der Tatsache, dass Γ sogar Normalteiler vom Index 48 in der Dreiecksgruppe mit Signatur $[2, 3, 8]$ ist.

Ein weiteres Beispiel der gleichen Bauart ergibt sich aus der Triangulierung der Klein'schen Quartik (Abb. 5) durch Fundamentalbereiche der Dreiecksgruppe Δ mit Signatur $[2, 3, 7]$ (Zeichnung wieder in \mathbb{D} , Quelle: [GTW]); die Nummerierung der Randseiten des Fundamentalbereichs der Überlagerungsgruppe zeigt die nötigen Seitenpaarungen an.

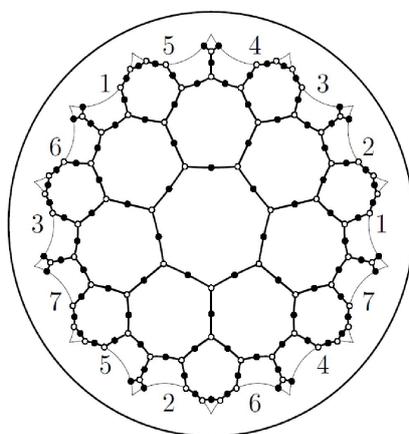


Abbildung 8: Dessin für die Kleinsche Quartik

Das Dessin ist wieder regulär mit Automorphismengruppe $PSL_2(\mathbb{F}_7)$, diesmal der vollen Automorphismengruppe der Riemannschen Fläche.– Für weitere Beispiele siehe z.B. [GG].

Jetzt endlich zum *Beweis* von Satz 7.4: Da β nur die kritischen Werte $0, 1, \infty$ hat, besitzt β soviele Urbilder des offenen reellen Intervalls $]0, 1[$, wie ihr Grad angibt. Daraus ergibt sich bereits die Aussage 5) sowie die Aussage, dass es sich bei D um einen Graphen handelt. Die Teile 2) und 3) über die Eckpunkte von D ergeben sich am einfachsten aus Aufgabe 7.1, ebenso wie die Aussage über die Valenzen der Eckpunkte in Teil 4). Um die Beziehung zwischen Polordnungen und Valenz der Zellen aus 4) zu verstehen, verwendet man am besten die Darstellung von β als j -Funktion einer Dreiecksgruppe aus Satz 7.3, zusammen mit Satz 6.7 : Angenommen, Δ habe die Signatur $[p, q, r]$ und $P, Q, R \in \mathbb{H}$ seien die Eckpunkte der Ordnungen p, q, r eines Δ -Fundamentalbereichs, auf denen j die kritischen Werte $0, 1, \infty$ annimmt. Dann liegt R im hyperbolischen Mittelpunkt eines $2r$ -seitigen Polygons, einer Zelle des Graphen $j^{-1}([0, 1]) \subset \mathbb{H}$. Wie im Beweis von Satz 7.3 erläutert,

hat β in $h(P)$, $h(Q)$, $h(R)$ kritische Punkte mit einem Pol in $h(R)$ der Ordnung $m|r$. Wenn $m = r$, ist h in R unverzweigt, und das hyperbolische $2r$ -Eck wird durch h einfach bijektiv in X abgebildet, die Valenz der Zelle ist also das Doppelte der Polordnung von β . Letztere Aussage bleibt aber richtig, wenn m echter Teiler von r ist, denn dann – siehe Beweis von Satz 7.3 – bildet h die $2r$ Dreiecke rund um R auf $2m$ Bilder rund um $h(R)$ ab. \square

Dessins sind also eine Visualisierung des topologischen Verhaltens von Belyifunktionen. Etwas störend daran ist, dass die drei kritischen Werte verschieden behandelt werden, obwohl sie eigentlich völlig gleichberechtigt sind, denn mit β sind auch die Funktionen

$$1 - \beta, \quad \frac{1}{\beta}, \quad \frac{1}{1 - \beta}, \quad 1 - \frac{1}{\beta}, \quad \frac{\beta}{1 - \beta}$$

ebenfalls Belyifunktionen, nur mit permutierten kritischen Werten. Man könnte diesen Mangel beheben, indem man für die Polstellen von β rote Eckpunkte einführt und so $\beta^{-1}(\mathbb{R})$ zu einem tripartiten Graphen macht – klar: keine gleichfarbigen Ecken sind benachbart und die Valenzen sind jetzt überall die doppelten Verzweigungsordnungen –, was allerdings die Dinge nicht übersichtlicher machen würde. Die Triangulierung von X durch den tripartiten Graphen gibt aber eine Visualisierung des Beweises von Satz 7.4. – Wichtiger ist die (zuerst von Grothendieck bemerkte) Tatsache, dass gewissermaßen eine Umkehrung von Satz 7.4 existiert:

Satz 7.6 *X sei eine kompakte orientierbare zusammenhängende 2-Mannigfaltigkeit, $D \subset X$ ein bipartiter Graph auf X , so dass $X \setminus D$ eine disjunkte Vereinigung einfach zusammenhängender offener Zellen ist. Dann gibt es eine komplexe Struktur auf X , d.h. einen Atlas aus Kartenabbildungen auf X , der X zu einer Riemannschen Fläche macht mit einer Belyifunktion β , so dass D das Dessin zu (X, β) ist.*

Es gibt mittlerweile etliche verschiedene Beweise für diesen Satz, vgl. z.B. Thm. 3.15 in [JW]. Im Rahmen dieses Skriptums lässt sich ein Beweis folgendermaßen skizzieren. Man wähle in jeder Zelle von $X \setminus D$ einen Punkt aus, färbe ihn rot und verbinde ihn durch Kanten auf X mit den Eckpunkten der Zelle, um D zu einem tripartiten Graphen \hat{D} auf X zu erweitern. $p, q, r > 1$ seien so gewählt, dass $2p, 2q, 2r$ Vielfache aller Valenzen der weißen, schwarzen bzw. roten Eckpunkte sind. Nun zerschneide man X längs der Kanten von \hat{D} so, dass man im Ergebnis ein einfach zusammenhängendes Polygon P erhält, welches ebenso wie vorher $X \setminus \hat{D}$ trianguliert ist. Wenn z.B. ein weißer Eckpunkt von \hat{D} eine Valenz besitzt, die ein echter Teiler von $2p$ ist, muss der Eckpunkt auf diesem Schnitt liegen, und entsprechendes gilt für alle Eckpunkte. Es entsteht dabei ein Polygon mit Randseiten, die paarweise zueinander gehören, wenn sie nämlich die beiden Seiten einer Schnittkante sind. Es ist nach wie vor trianguliert und lässt sich homöomorph in die Triangulierung von \mathbb{H} durch die Fundamentalbereiche der Dreiecksgruppe Δ mit Signatur $[p, q, r]$ einfügen. Seine Seitenpaarungen lassen sich dann durch Elemente von Δ realisieren; diese spielen die Rolle der Nachbartransformationen des Satzes 5.1 von Poincaré. Genau wie dort bilden die Eckpunkte von P Zyklen, deren Innenwinkelsumme von der Form $2\pi/k$ ist, $k = 1$ oder ein

Teiler von p, q bzw. r . Die Nachbartransformationen erzeugen also eine Gruppe $\Gamma \subset \Delta$, Verkleben der zugehörigen Randseiten rekonstruiert X als Riemannsche Fläche $\Gamma \backslash \mathbb{H}$. \square

Aufgabe 7.6 Γ sei kokompakter torsionsfreier Normalteiler der Dreiecksgruppe Δ , β die in Satz 7.5 angegebene Belyĭfunktion auf $X := \Gamma \backslash \mathbb{H}$. Beweisen Sie: Der Funktionenkörper $\mathbb{C}(\Gamma) = \mathbb{C}(X)$ ist eine Körpererweiterung des rationalen Funktionenkörpers $\mathbb{C}(\beta) \cong \mathbb{C}(\hat{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(\Delta)$; die Automorphismengruppe $G := \Delta/\Gamma$ operiert auf $\mathbb{C}(\Gamma)$ vermöge

$$\delta \in \Delta : f \mapsto f \circ \delta^{-1} \text{ für alle } f \in \mathbb{C}(\Gamma) \quad .$$

Dabei bleibt der Unterkörper $\mathbb{C}(\beta)$ elementweise fest. Die Körpererweiterung $\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}(\hat{\mathbb{C}})$ ist galoissch mit Galoisgruppe G .

Die letzte Aussage erfordert Galoistheorie und eine Aussage über kompakte Riemannsche Flächen: Für endlich viele paarweise verschiedene Punkte $P_1, \dots, P_n \in X$ gibt es eine meromorphe Funktion $f \in \mathbb{C}(X)$, die in diesen Punkten paarweise verschiedene Werte annimmt, was z.B. mit Hilfe des Satzes von Riemann–Roch bewiesen werden kann.

Literatur

- [Ad] D. Adams: The Hitchhikers Guide to the Galaxy, BBC, 1978
- [AF] I. Agricola, A. Friedrich: Elementargeometrie, Vieweg, 2005
- [Bea] A.F. Beardon: The Geometry of Discrete Groups, Springer GTM 91, 1983
- [Beu] F. Beukers: Gauss’ Hypergeometric Function, pp. 23–42 in *Arithmetic and Geometry Around Hypergeometric Functions*, CIMPA Summer School, Istanbul 2005) ed. R.–P. Holzapfel, A.M. Uludağ, M. Yoshida, Birkhäuser PM 260, 2007
- [FK] R. Fricke, F. Klein: Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, Teubner 1897
- [GG] E. Gironde, G. González–Diez: Introduction to Compact Riemann Surfaces and Dessins d’Enfants, LMS Student Texts 70, Cambridge 2012
- [GTW] E. Gironde, D. Torres–Teigell, J. Wolfart: Shimura curves with many uniform dessins, *Math.Z.* 271 (2012), 757–779
- [Hu] A. Hurwitz: Über algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich, *Math. Ann.* 41 (1892), 403–442
- [Kl] F. Klein: Über die Transformationen siebenter Ordnung der elliptischen Functionen, *Math. Ann.* 14 (1878/79), 428–497
- [JS] G.A. Jones, D. Singerman: Complex Functions, Cambridge Univ. Press 1994
- [JW] G.A. Jones, J. Wolfart: Dessins d’Enfants on Riemann Surfaces, Springer Monographs in Math., 2016

- [Ka] S. Katok: Fuchsian Groups, Univ. Chicago Press 1992
- [L1] J. Lehner: Discontinuous Groups and Automorphic Functions, AMS 1964
- [L2] J. Lehner: A Short Course in Automorphic Functions, Holt, Rinehart and Winston 1966
- [Mb] A.M. Macbeath: Fuchsian Groups. Birmingham Lecture Notes (1961 ??)
- [MI] C. Maclachlan: Introduction to arithmetic Fuchsian groups, pp. 39–41 in *Topics on Riemann Surfaces and Fuchsian Groups* (Workshop Madrid 1998), LMS Lecture Note Ser. 287 (2001), ed. E. Bujalance, A.F. Costa, E. Martinez
- [Ma] W. Magnus: Noneuclidean Tesselations and Their Groups, AP 1974
- [Mö] M. Möller: Riemannsche Flächen, Skriptum WS 2013/14
- [MW] M. Möller: Skriptum zur Vorlesung „Funktionentheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen“, Frankfurt 2012 – 14
- [Poi] H. Poincaré: Théorie des Groupes Fuchsien, Acta Math. **1** (1882), 1–62
- [St] J. Stillwell: Geometry of Surfaces, Springer 1992
- [Vi] M.-F. Vignéras: Arithmétique des Algèbres des Quaternions, Springer LNM 800, 1980
- [ZVC] H. Zieschang, E. Vogt, H. Coldewey: Surfaces and Planar Discontinuous Groups, Springer LNM 835, 1980

Index

- Alexandroff–Kompaktifizierung, 2
- algebraische Kurven, 36
- Atlas, 27
- automorphe Funktion, 33
- Automorphismengruppe, 31

- Beltrami–Klein–Modell, 10
- Belyĭ, Satz von, 37
- Belyĭfunktionen, 37
- bipartiter Graph, 41

- \hat{C} –Kreise, 3
- Casorati–Weierstrass, Satz von, 35
- Cayley–Transformation, 5
- cokompakt, 19

- Definitionskörper, 37
- Dessin d’enfant, 42
- Dirichlet–Polygon, 17
- diskontinuierlich, 14
- diskrete Gruppe, 14
- Doppelverhältnis, 5
- Dreiecksgruppe, 25

- Eckenzyklus, 21
- elementare Fuchssche Gruppe, 14
- elliptisch, 11
- elliptische Ecke, 21
- elliptische Modulgruppe, 15, 17
- euklidische Dreiecksgruppe, 41
- Eulersche Polyederformel, 29

- Fermatkurve, 37
- Fixpunkte, 4
- Flächengruppe, 31
- Fuchssche Gruppe, 14
- Fundamentalebene, 16

- Galoisgruppe, 46
- Gauss–Bonnet–Formel, 10
- Geschlecht, 29
- Gitter, 28

- Grad einer Funktion, 41

- holomorphe Abbildungen, 28
- Hurwitz–Flächen, 31
- hyperbolische Geometrie, 6
- hyperbolische Kreise, 10
- hyperbolische Möbiustransformation, 11
- hyperbolische Metrik, 8
- hyperbolische Polygone, 10
- hyperbolische Spiegelungen, 9
- hyperelliptische Involution, 43

- kanonischer Fundamentalbereich, 23
- Kartenabbildung, 3, 28
- Kleinsche Quartik, 32, 44
- Kommutator, 22
- komplexe Mannigfaltigkeit, 3
- kritischer Wert, 36

- Legendre–Funktion, 34
- liften, 30
- Limespunkt, 14
- lokale Relation, 20

- Möbiusgruppe, 4
- Möbiustransformation, 2
- Mittelsenkrechte, 9
- Modulfunktion, 34
- Montel, Satz von, 36

- Nachbar–Fundamentalebene, 20
- Nachbartransformation, 20
- Norm–1–Einheitengruppe, 15
- normale Familien, 36
- Normalisator, 31
- Normalpolygon, 17

- parabolisch, 11
- Picard, großer Satz von, 35
- Picard, kleiner Satz von, 35
- Poincaré–Reihen, 33
- Polygongruppe, 19

Präsentation, 20
projektive Gerade, 2

quasiplatonische Fläche, 43
Quaternionenalgebra, 15

reguläres Dessin, 43
Riemann–Roch, Satz von, 33, 46
Riemannsche Fläche, 3, 27
Riemannsche Zahlenkugel, 2
Riemannscher Abbildungssatz, 30

Schwarz’sche Dreiecksfunktion, 35
Schwarz’sches Lemma, 7
Schwarz’sches Spiegelungsprinzip, 34
Signatur, 23
Sinn des Lebens, 27
sphärische Dreiecksgruppe, 41
Spitze, 10, 19, 23
stereographische Projektion, 3

torsionsfrei, 28
Torus, 28
tripartiter Graph, 45

Überlagerung, 25
Überlagerungsgruppe, 30
Uniformisierungstheorie, 30
universelle Überlagerung, 25, 30

Valenz, 41
Verzweigung, 36

Weierstrass’sche \wp -Funktion, 33

zufällige Ecke, 21