J. Wolfart SoSe 2013

Notizen zur Elementarmathematik II

Inhaltsverzeichnis

Literatur

Th. de Jong: Analysis (Pearson)

K. Fritzsche: Grundkurs Analysis 1 (Spektrum)

K. Königsberger: Analysis 1 (Springer)

[EMI] J. Wolfart: Notizen zur Elementarmathematik I (Homepage, WS 11/12)

H. Scheid/W. Schwarz: Elemente der Geometrie (Spektrum)

1 Konvergenz. Periodische Dezimalbrüche

Notationen. $\mathbf{N}$ bezeichnet hier überall die Menge der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$,
$\mathbf{Z}$ die Menge aller ganzen Zahlen $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$,
$\mathbf{Q}$ die Menge aller rationalen Zahlen $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$,
$\mathbf{R}$ und $\mathbf{C}$ die Mengen der reellen bzw. komplexen Zahlen.

Definition 1.1 *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, also $a_1, a_2, a_3, \ldots$, von (hier zunächst rationalen) Zahlen heißt „konvergent" gegen den „Limes" oder „Grenzwert" a, geschrieben*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a ,$$

wenn für jedes (noch so kleine) $\varepsilon > 0$ eine Schranke $N(\varepsilon)$ existiert (die i.a. um so größer ausfallen wird, je kleiner man ε wählt), so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \textit{für alle} \quad n \geq N(\varepsilon) .$$

Anders gesagt: In jeder noch so kleinen „ε–Umgebung" von a

$$\{x \in \mathbf{R} \mid |x - a| < \varepsilon\} = \{x \in \mathbf{R} \mid a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} =:]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$$

liegen „fast alle" Folgenglieder (Mathejargon für „alle bis auf endlich viele", hier also mit der möglichen Ausnahme der a_n, für die $n < N(\varepsilon)$).
Wenn es kein a gibt, gegen das die Folge konvergiert, heißt die Folge „divergent".

Beispiele. 1. Konstante Folgen, bei denen also $a_n = a$ für ein festes a und alle n ist, sind natürlich gegen a konvergent.
2. $a_n := \frac{1}{n}$ konvergiert gegen 0, weil man jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$ mit einem $1/N$ unterbieten kann und darum hat man

$$n \geq N \;\Rightarrow\; |0 - a_n| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon .$$

3. Ebenso konvergiert $a_n := (-1)^n/n$ gegen 0.
4. $a_n := (-1)^n$ divergiert, denn bei einer konvergenten Folge müssten die Abstände der Folgenglieder $|a_n - a_m|$ untereinander für hinreichend große $n, m > N$ beliebig klein werden, damit sie in eine gemeinsame ε–Umgebung passen, und das ist hier offensichtlich nicht erfüllt (Light–Version des *Cauchyschen Konvergenzkriteriums*).
5. Aus dem gleichen Grund divergiert die Folge $a_n := b^n$, wenn $b > 1$, denn schon der Abstand zweier benachbarter Folgenglieder wird $a_{n+1} - a_n = (b-1)a_n \geq b - 1$. Durch Induktion erhält man sogar $a_n > n(b-1)$, die Folge wächst also über alle Grenzen.
6. Geht man in Beispiel 5 zu $1/b$ über, so folgt daraus umgekehrt (zunächst für positive $q := 1/b$, dann aber ebenso für die übrigen): Wenn $-1 < q < 1$, dann konvergiert $a_n := q^n$ gegen 0.
Dieses Beispiel ist der Angelpunkt für die Behandlung der *geometrischen Reihe:*

Satz 1.1 *Sei* $-1 < q < 1$ *. Dann ist*

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} q^k \ := \ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k \ = \ \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} \ = \ \frac{1}{1-q} \, .$$

Über das oben gesagte hinaus muss man zum *Beweis* eigentlich nur Satz 2.4 in [EMI], letzte Formel, kennen und über konvergente Folgen $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ wissen, dass für alle Konstanten b und c gilt

$$\lim_{n\to\infty} (b + a_n) \ = \ b + \lim_{n\to\infty} a_n \quad , \qquad \lim_{n\to\infty} c a_n \ = \ c \lim_{n\to\infty} a_n \, .$$

Mit diesem Satz ist die Bedeutung und die Berechnung des Werts periodischer Dezimalbrüche klar:

$$0, b_1 b_2 \ldots b_k b_1 b_2 \ldots b_k b_1 b_2 \ldots \ := \ (b_1 10^{k-1} + b_2 10^{k-2} + \ldots + b_k) 10^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} 10^{-kn} \ =$$

$$= \ (b_1 10^{k-1} + b_2 10^{k-2} + \ldots + b_k) \frac{10^{-k}}{1 - 10^{-k}} \ = \ (b_1 10^{k-1} + b_2 10^{k-2} + \ldots + b_k) \frac{1}{10^k - 1}$$

Sie stellen also rationale Zahlen dar, deren Nenner (in ungekürzter Form) eine Zahl mit k Ziffern $99 \ldots 9$ ist. Diese Nenner sind alle teilerfremd zu 10, und umgekehrt gilt:

Satz 1.2 *Sei* $d \in \mathbf{N}$ *teilerfremd zu* 10 *. Dann gibt es ein* $k \in \mathbf{N}$ *mit* $d \mid 10^k - 1$ *. Somit kann* $1/d$ *als unendlicher Dezimalbruch mit Periode* k *geschrieben werden.*

Die Behauptung des Satzes lässt sich in Form der Kongruenz

$$10^k - 1 \equiv 0 \bmod d \qquad \text{oder} \qquad 10^k \equiv 1 \bmod d$$

schreiben und beruht auf einem Satz der Zahlentheorie und Algebra, der sogar noch mehr sagt: Ein minimal gewähltes k ist Teiler der Anzahl $\varphi(d)$ aller zu d teilerfremden natürlichen Zahlen zwischen 1 und $d-1$. Etwas elementarer kann man folgendermaßen argumentieren: Da es nur endlich viele Restklassen in $\mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$ gibt, muss es Exponenten $m < n$ geben, für die $10^m \equiv 10^n \bmod d$ ist. Mit $k := n - m$ ist also $10^k \cdot 10^m \equiv 10^m \bmod d$, und da 10 und alle Zehnerpotenzen teilerfremd zu d sind, kann man in dieser Kongruenz durch 10^m dividieren und daraus $10^k \equiv 1 \bmod d$ ableiten (ähnlich wie im Beweis von [EMI], Satz 7.2 löst man die Kongruenz $10^m x \equiv 1 \bmod d$).

Übergang von $1/d$ zu c/d ändert die Ziffernfolge, aber nicht die Periodizität. Damit ist die Natur der Dezimalbruchentwicklungen in den beiden Extremfällen, dass der Nenner d Teiler einer Zehnerpotenz ([EMI], Satz 8.2) oder teilerfremd zu 10 ist ([EMI], Satz 9), geklärt. Was passiert in „gemischten" Fällen?

Satz 1.3 *Sei* $d = d_1 d_2 \in \mathbf{N}$ *mit Faktoren* $d_1 \mid 10^m$ *und* $(d_2, 10) = 1$ *. Dann gibt es* $x, y \in \mathbf{Z}$ *mit*

$$\frac{1}{d} \ = \ \frac{x}{d_1} + \frac{y}{d_2} \, ,$$

denn d_1, d_2 sind teilerfremd und darum ist $xd_2 + yd_1 = 1$ ganzzahlig lösbar. Für den Dezimalbruch $1/d$ bzw. allgemeiner c/d heißt das: Die Periodizität ist nach wie vor gegeben, die Periodenlänge hängt nur von dem Faktor d_2 ab, aber es mag eine *Vorperiode* geben, d.h. der Dezimalbruch ist nicht notwendig gleich hinter dem Komma periodisch.

Mit abbrechenden Dezimalbrüchen rechnet es sich leicht, da man einfach nur mit Zehnerpotenzen multiplizieren muss, um die Rechnungen auf das Rechnen mit ganzen Zahlen zurückzuführen. Bei nicht abbrechenden Dezimalbrüchen kämpft man mit zwei misslichen Problemen: Erstens ist die Dezimalbruchdarstellung rationaler Zahlen nicht eindeutig, wie das Beispiel

$$1 \;=\; 1,000\ldots \;=\; 0,9999\ldots$$

zeigt, zweitens steht man vor dem Problem, mit welcher Stelle man die gewohnten Algorithmen, die man aus der Schule für Grundrechenarten kennt, beginnen soll:
$0,7777\ldots \cdot 0,8888\ldots$ rechnet man sicherheitshalber doch besser als $\frac{7}{9} \cdot \frac{8}{9}$. Bei nicht–periodischen unendlichen Dezimalbrüchen fehlt natürlich auch diese Möglichkeit. Warum man auch diese braucht, werden wir gleich sehen.

Zum Schluss dieses Abschnitts sei angefügt, dass alles, was wir hier für das Dezimalsystem getan haben, entsprechend auf andere g–adische Stellenwertsysteme übertragbar ist.

2 Reelle Zahlen. Vollständigkeit

Definition 2.1 *Man nennt ein Folge $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ von (zunächst einmal) rationalen Zahlen eine ,,Cauchyfolge", wenn für alle noch so kleinen $\varepsilon > 0$ eine Schranke $N = N(\varepsilon)$ existiert, so dass für alle $n, m \geq N$ gilt*

$$|a_n - a_m| < \varepsilon\ .$$

Anschaulich heißt das, dass die Folgenglieder mit wachsendem Index immer dichter liegen. Oben wurde bereits erwähnt, dass alle konvergenten Folgen Cauchyfolgen sind. Ein weiteres Beispiel bilden alle unendlichen Dezimalbrüche, und zwar in folgendem Sinn: Sei $b_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ eine feste Ziffernfolge mit Indizes $k \in \mathbf{N}$ — wir dürfen auch $k = 0$ und endlich viele negative Indizes zulassen, um Dezimalbrüche mit *Vorkommazahlen* einzuschließen — und die Folge a_n definiert durch die abbrechenden Dezimalbrüche $a_n := \sum_{k\leq n} b_k 10^{-k}$, dann wird diese Folge in der Tat immer dichter, wie man an der Abschätzung

$$|a_n - a_m| \;=\; \sum_{k=m+1}^{n} b_k 10^{-k} \;<\; 10^{-m} \;\leq\; 10^{-N} \quad \text{für alle} \quad n > m \geq N\ .$$

Da wir jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$ durch ein solches 10^{-N} unterbieten können, bilden die a_n eine Cauchyfolge. Konvergiert diese Folge? Ja, wenn die Ziffernfolge b_k periodisch wird, vgl. die Sätze [EMI], 8.2 und 9.1. Wenn die Ziffernfolge nicht periodisch wird, konvergiert die Folge jedenfalls nicht in unserem bisherigen Zahlbereich $\mathbf{Q}$. Da solche Dezimalbrüche in der ,,Natur" der Geometrie oder Analysis aber vielfältig gebraucht werden, besteht wieder einmal die Notwendigkeit, zu einem größeren Zahlbereich überzugehen, und zwar jetzt zu dem Körper $\mathbf{R}$ der reellen Zahlen. Reelle Zahlen darf man sich wie auf der Schule als die Menge aller $\pm$ Dezimalbrüche vorstellen, abbrechend oder unendlich, periodisch oder nicht–periodisch. Zur Definition eignet sich diese Vorstellung nicht besonders gut, weil (s.o.) mit unendlichen Dezimalbrüchen schlecht zu rechnen ist, und weil offenbar gewisse Identifikationen vorgenommen werden müssen, also wieder eine Klassenbildung bezüglich einer geeigneten Äquivalenzrelation. Wenn man das schon tun muss, kann man auch gleich als Grundmenge alle Cauchyfolgen rationaler Zahlen nehmen und zwei solche Folgen als äquivalent bezeichnen, wenn ihre Differenzfolge gegen 0 konvergiert — man denke etwa an die oben benutzten Folgen abbrechender Dezimalbrüche. Diese kann man dann gliedweise addieren und multiplizieren (in der Tat ein Verfahren, auch für unendliche Dezimalbrüche Rechenoperationen einzuführen, indem man sie durch Folgen abbrechender Dezimalbrüche approximiert), Anordnungen und Beträge einführen und auch wieder Folgen und Konvergenz diskutieren. Mühsam, vor allem weil jedesmal auch ,,wohldefiniert" nachgeprüft werden muss!

Das Programm zur Konstruktion des Körpers $\mathbf{R}$ der reellen Zahlen sieht also so aus:

1. Man definiere C als die Menge aller Cauchyfolgen in $\mathbf{Q}$. Bezüglich gliedweiser Addition und Multiplikation bildet C einen Ring. (Stellen Sie sich C als Folgen immer längerer endlicher Dezimalbrüche vor!). Auf C definiert man eine Äquivalenzrelation durch

$$(a_n) \sim (b_n) \quad :\Leftrightarrow \quad \lim(a_n - b_n) = 0$$

((a_n) und (b_n) unterscheiden sich also nur um eine *Nullfolge*) und definiert $\mathbf{R}$ als die Menge aller Äquivalenzklassen, kurz $C/\sim$. (Bei Dezimalbrüchen werden dadurch z.B. $1,0000\ldots$ und $0,9999\ldots$ identifiziert.)

2. Nun müssen auf $\mathbf{R}$ die algebraischen Operationen eingeführt werden, indem man repräsentantenweise die Operationen ,,+" und ,,·" verwendet. (Bei Dezimalbrüchen wird also Addition und Multiplikation auf den abbrechenden Dezimalbrüchen benutzt sowie die Tatsache, dass wieder konvergente Folgen entstehen.) Natürlich muss wieder einmal gezeigt werden, dass die Definition *wohldefiniert* ist, d.h. unabhängig von der Wahl der Repräsentanten ist.

3. Dieses so konstruierte $\mathbf{R}$ ist mit seiner Addition und Multiplikation ein Körper. Die Gültigkeit der Ringaxiome ist dabei sehr leicht nachzurechnen: Zum Beispiel ist die Körper–1 die Äquivalenzklasse der Cauchyfolge $(1,1,1,1,\ldots)$, die Körper–0 wird repräsentiert von $(0,0,0,0,\ldots)$, aber ebensogut von jeder anderen Nullfolge. Die einzige Schwierigkeit besteht im Nachweis, dass jedes $a \neq 0$ multiplikativ invertierbar ist – das stimmt in C nämlich nicht! Hier muss man also zeigen: Wenn $(a_n) \in C$ keine Nullfolge ist, gibt es eine Cauchyfolge (x_n), welche $(a_n x_n) \sim (1,1,1,1,\ldots)$ erfüllt. Knifflig!

4. Nun muss man Ungleichungen und Beträge auf $\mathbf{R}$ einführen und die Gültigkeit der

Anordnungsaxiome nachweisen. Natürlich wieder repräsentantenweise:

$$(a_n) > (b_n) \quad :\Leftrightarrow \quad a_n > b_n \quad \text{für fast alle} \quad n\,, \quad (a_n - b_n) \quad \text{keine Nullfolge.}$$

Achtung: Auf die letzte Bedingung darf man nicht verzichten, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$1 > 0\,,\ 1,0 > 0,9\,,\ 1,00 > 0,99\,,\ 1,000 > 0,999\,,\ \ldots\,, \quad \text{aber} \quad 1,0000\ldots = 0,9999\ldots$$

5. Ebenso wie auf $\mathbf{Q}$ werden jetzt Cauchyfolgen in $\mathbf{R}$ definiert, repräsentiert natürlich durch Folgen $(a_{in})_{i\in\mathbf{N}}$ von Cauchyfolgen (die wir nach wie vor mit n indizieren). Großes Ziel ist jetzt zu zeigen: *In* $\mathbf{R}$ *kovergieren alle Cauchyfolgen.* Wie kann man sich nun einen Limes $\lim_{i\to\infty}(a_{in})_{i\in\mathbf{N}}$ für diese Doppelfolge verschaffen? Der müsste ja auch wieder repräsentiert sein durch eine Cauchyfolge in $\mathbf{Q}$. Eine naheliegende Idee ist, die *Diagonalfolge* $(a_{ii})_{i\in\mathbf{N}}$ als Kandidaten für den Limes zu nehmen, aber man überzeugt sich leicht, dass es Gegenbeispiele gibt, in denen diese Folge keine Cauchyfolge ist. Diese Idee funktioniert nur, wenn erstens für alle i die Folgen $(a_{i,n})_{n\in\mathbf{N}}$ schnell genug ,,verdichten", wenn also etwa $|a_{in} - a_{i,n+1}| < 2^{-n}$ ist (das kann man durch Übergang zu einer äquivalenten Folge erreichen, muss man aber beweisen!) und zweitens die Doppelfolge $(a_{i,n})_{i\in\mathbf{N}}$ schnell genug verdichtet, d.h. wenn etwa $|a_{i,n} - a_{i+1,n}| < 2^{-i}$ für alle i und n. Auch dies kann man erreichen und damit zeigen, dass dann die Diagonalfolge in C liegt und alle gewünschten Eigenschaften hat.

Es gibt noch andere Möglichkeiten, die reellen Zahlen aus den rationalen zu konstruieren, und diese haben alle ihre Vor– und Nachteile. Insgesamt gilt leider der Erhaltungssatz der mathematischen Schwierigkeit: Es gibt keinen einfachen Weg. Wir begnügen uns, das Endresultat axiomatisch zu beschreiben.

Satz 2.1 *Es gibt einen (im wesentlichen sogar eindeutig bestimmten) Körper* $\mathbf{R}$*, der*

- *(natürlich) Elemente* 0 *und* 1 *sowie Operationen ,,+" und ,,·" besitzt, welche die Körperaxiome erfüllen,*
- *eine Anordnung besitzt, welche verträglich ist mit den Körperoperationen, d.h. die Eigenschaften aus [EMI], Satz 8.1 erfüllt, in dem insbesondere auch Betrag und Abstand wie in [EMI] Def. 8.2 eingeführt werden können,*
- *in dem alle Cauchyfolgen konvergieren.*

Die letzte Eigenschaft nennt man *Vollständigkeit.* Dieses Axiomensystem hat — anders als das von Ringen oder Körpern — nicht den denkökonomischen Sinn, viele verschiedene Modelle gleichzeitig zu beschreiben, sondern es dient ähnlich wie das Peano–Axiomensystem der natürlichen Zahlen eher der Klärung der Grundlagen. Einige besondere Eigenschaften der reellen Zahlen (die alle auf $\mathbf{Q}$ NICHT zutreffen, ausprobieren!) seien angefügt. *Nach* *oben beschränkt* heißt eine Menge $U \subset \mathbf{R}$, wenn ein $S \in \mathbf{R}$ existiert mit $x \leq S$ für alle $x \in U$, und S heißt dann *obere Schranke* für U; entsprechend definiert man, was *nach unten beschränkt* bzw. (in beide Richtungen) *beschränkt* sein soll und was ,,beschränkt" für Folgen bedeutet.

Satz 2.2 *Im Körper* $\mathbf{R}$ *der reellen Zahlen gilt:*

1. *Monoton wachsende und nach oben beschränkte Folgen* $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots$ *konvergieren.*
2. *Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.*
3. *Jede nichtleere, nach oben beschränkte Untermenge* $U \subset \mathbf{R}$ *besitzt eine kleinste obere Schranke.*
4. *Jede Intervallschachtelung definiert eine eindeutig bestimmte Zahl* $a \in \mathbf{R}$.

Unter *Intervallschachtelung* versteht man eine Folge (endlicher) reeller Intervalle

$$I_n \ := \ [a_n, b_n] \ := \ \{x \in \mathbf{R} \mid a_n \leq x \leq b_n\} \qquad \text{mit}$$

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots \quad \text{d.h.} \quad a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1 \qquad \text{und} \qquad \lim(b_n - a_n) = 0 \, .$$

Es gibt noch eine weitere Eigenschaft, in der sich $\mathbf{R}$ grundlegend von $\mathbf{Q}$ unterscheidet, nämlich in der Anzahl der Elemente, bei unendlichen Mengen *Mächtigkeit* genannt.

Definition 2.2 *Eine unendliche Menge* M *heißt ,,abzählbar", wenn eine surjektive Abbildung* $f : \mathbf{N} \to M$ *existiert, andernfalls ,,überabzählbar".*

Man könnte ,,abzählbar" auch dahingehend umformulieren, dass man die Elemente von M durchnummerieren kann bzw. als Folge aufschreiben wie z.B. die geraden natürlichen Zahlen $2, 4, 6, 8, \ldots$ oder – schon etwas erstaunlicher – $\mathbf{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$. Weit verblüffender ist ein Faktum, das etwa um 1900 von Georg Cantor entdeckt wurde und damals heftige philosophisch–theologische Kontroversen ausgelöst hat:

Satz 2.3 $\mathbf{Q}$ *ist abzählbar und* $\mathbf{R}$ *ist überabzählbar.*

Zum *Beweis* der ersten Aussage genügt es, die rationalen Zahlen durchzunummerieren. Wir beschränken uns darauf, das für die positiven rationalen Zahlen zu tun; um es auf ganz $\mathbf{Q}$

auszudehnen, verwende man den gleichen Trick wie oben für $\mathbf{Z}$. Folgendes Schema (das „1. Cantorsche Diagonalverfahren”) zeigt, wie man vorzugehen hat.

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & \to & 2 & & 3 & \to & 4 \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \\
 & \swarrow & & \nearrow & & & \\
\frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & & & \\
\downarrow & \nearrow & & & & & \\
\frac{1}{5} & & & & & &
\end{array}
$$

Überzählige Brüche wie $\frac{2}{2}$ oder $\frac{2}{4}$ darf man natürlich weglassen.

Das „2. Cantorsche Diagonalverfahren” liefert einen Widerspruchsbeweis: Angenommen, $\mathbf{R}$ wäre abzählbar, man könnte also die reellen Zahlen durchnummerieren. Dann könnte man erst recht die Zahlen zwischen 0 und 1 durchnummerieren, als Dezimalbrüche also in der Form

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 0, \mathbf{a_{11}} a_{12} a_{13} \ldots \\
a_2 &= 0, a_{21} \mathbf{a_{22}} a_{23} a_{24} \ldots \\
a_3 &= 0, a_{31} a_{32} \mathbf{a_{33}} a_{34} a_{35} \ldots \\
a_4 &= 0, a_{41} a_{42} a_{43} \mathbf{a_{44}} a_{45} \ldots \\
\vdots &= \quad \vdots
\end{aligned}
$$

schreiben mit Ziffern $a_{ij} \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Zum Nachweis, dass dadurch keinesfalls alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 erfasst werden, betrachte man einfach eine Zahl $b := 0, b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots$ zwischen 0 und 1, die man nur so wählen muss, dass keine Ziffer b_j mit der entsprechenden Diagonalziffer a_{jj} von a_j (oben fett gedruckt) übereinstimmt; für diese ist offenbar $b \neq a_j$ für alle j. $\square$

3 Stetigkeit

Definition 3.1 *$f : [a, b] \to \mathbf{R}$ bezeichne eine reellwertige Funktion auf dem reellen (abgeschlossenen) Intervall $[a, b] := \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (stets mit $a < b$). f heißt „stetig” im Punkt $x_0 \in [a, b]$, wenn für jedes (noch so kleine) $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ existiert mit der Eigenschaft*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad \textit{für alle} \qquad x \in [a, b] \qquad \textit{mit} \qquad |x - x_0| < \delta \quad .$$

f heißt „stetig”, wenn es in jedem Punkt seines Definitionsbereichs stetig ist. Ist die Stetigkeitsbedingung nicht erfüllt, heißt f „unstetig” (ggf. in x_0).

Bemerkungen und Beispiele. 1. Anschaulich heißt *stetig* einfach, dass kleine Änderungen im Argument nur kleine Änderungen in den Funktionswerten bewirken. Versucht man, diese Vorstellung mathematisch zu präzisieren, wird man nahezu zwingend auf die obige Definition geführt.

2. Konstante Funktionen sind stetig, ebenso die Funktion $f(x) := x$.

3. Die *Gaußsche Treppenfunktion*

$$x \mapsto [x] := \quad \text{größte ganze Zahl} \quad \leq x$$

ist unstetig in allen $x_0 \in \mathbf{Z}$, stetig in allen $x_0 \notin \mathbf{Z}$.

4. f ist unstetig in x_0 , wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass für jedes (noch so kleine) $\delta > 0$ ein x im Definitionsbereich existiert mit

$$|x - x_0| < \delta \qquad \text{und} \qquad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon \qquad \text{(warum??)}$$

5. Summen und Produkte stetiger Funktionen sind wieder stetig; insbesondere sind alle Polynomfunktionen $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ mit reellen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ stetig. Quotienten stetiger Funktionen sind stetig, soweit die Nennerfunktionen keine Nullstellen haben.

6. Eine anschaulichere Formulierung der Stetigkeit ist das *Folgenkriterium*

$$f \quad \text{stetig in} \quad x_0 \quad :\Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad ,$$

setzt allerdings die Einführung des Limes von Funktionen voraus:

Definition 3.2 $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ *heißt: Für jede Folge* (x_n) *im Definitionsbereich von* f *mit der Eigenschaft* $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ *konvergiert auch die Bildfolge* $(f(x_n))$ *, und zwar gegen* a *.*

Im Fall der Stetigkeit stimmt dieser Limes also mit dem Funktionswert $f(x_0)$ überein. Es sei aber ausdrücklich angemerkt – wir werden im nächsten Abschnitt davon Gebrauch machen –, dass wir nicht immer voraussetzen, dass x_0 zum Definitionsbereich von f gehört.

7. Alle bisherigen Aussagen sind hier ohne Beweis vorgestellt worden und mögen darum den Eindruck erwecken, der Umgang mit Stetigkeit sei sehr einfach. An einem Beispiel sei erläutert, dass dieser Eindruck irreführend ist: Wir betrachten für alle $n \in \mathbf{N}$ die stetigen Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbf{R} : x \mapsto x^n$. Diese konvergieren punktweise gegen eine Grenzfunktion $f : [0,1] \to \mathbf{R} : x \mapsto \lim_{n \to \infty} f_n(x)$, aber die Grenzfunktion f ist *nicht* stetig, nämlich 0 für $x < 1$ und 1 für $x = 1$.

Die meisten von der Schule her vertrauten Funktionen sind stetig. Dass Stetigkeit nicht nur eine *lokale* Eigenschaft ist, d.h. bedeutsam für das Verhalten der Funktion in kleinen Umgebungen von x_0 , sondern *globale* Auswirkungen hat, macht sie so wichtig und äußert sich in zwei zentralen Aussagen.

Satz 3.1 (Satz vom Maximum und Minimum) *Jede stetige Funktion* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *nimmt ihr Maximum und ihr Minimum an, d.h. es gibt Argumente* $m, M \in [a, b]$ *mit der Eigenschaft, dass* $f(m) \leq f(x) \leq f(M)$ *für alle* $x \in [a, b]$ *.*

Satz 3.2 (Zwischenwertsatz) *Sei* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *stetig. Dann gibt es zu jedem* y *zwischen* $f(a)$ *und* $f(b)$ *ein Argument* $x \in [a, b]$ *mit* $y = f(x)$ *.*

Beide Sätze werden (ziemlich leicht) z.B. mit Hilfe von Intervallschachtelungen bewiesen. Beide wären falsch ohne die Vollständigkeit von $\mathbf{R}$: Man ersetze z.B. $\mathbf{R}$ durch $\mathbf{Q}$ und suche dann eine Nullstelle von $f(x) := x^2 - 2$ im Intervall $[0, 2]$.

4 Differenzieren

Motiviert durch die Physik (Übergang von der Durchschnittsgeschwindigkeit zur Momentangeschwindigkeit) oder durch die Geometrie (Übergang von der Sekantensteigung zur Tangentensteigung) führt man den Begriff *Ableitung* oder auch *Differentialquotient* einer Funktion ein.

Definition 4.1 $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *heißt ,,in* $x_0 \in [a, b]$ *differenzierbar", wenn der Limes*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =: f'(x_0) =: \frac{df}{dx}(x_0)$$

existiert. f *heißt ,,differenzierbar", wenn* f *in jedem Punkt seines Definitionsbereichs differenzierbar ist, und ,,stetig differenzierbar", wenn* f' *eine stetige Funktion im Definitionsbereich von* f *wird.*

Bemerkungen, Beispiele, einfache Ableitungsregeln. 1. Differenzierbare Funktionen sind stetig. Stetige Funktionen sind i.a. nicht differenzierbar, Beispiel $f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$.

2. Konstante Funktionen $f(x) \equiv c$ sind differenzierbar mit $f'(x) \equiv 0$, die Funktion $f(x) = x$ ist differenzierbar mit $f'(x) \equiv 1$.

3. Seien f und g differenzierbar auf $[a, b]$ und $c \in \mathbf{R}$ eine Konstante. Dann sind $f + g$, $f \cdot g$, cf differenzierbare Funktionen auf $[a, b]$, und zwar gilt

$$(f + g)' = f' + g' \ , \quad (cf)' = c \cdot f' \ , \quad (fg)' = f'g + g'f$$

(letztere Formel ist die sogenannte *Leibnizregel* oder *Produktregel*). Außerhalb der Nullstellen von g ist auch $\frac{1}{g}$ differenzierbar, und zwar gilt dann die *Quotientenregel*

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2} \quad .$$

4. Aus **2.** und **3.** folgt jetzt $(x^n)' = nx^{n-1}$ zunächst für alle $n \in \mathbf{N}$ durch vollständige Induktion, und daraus dann für alle $n \in \mathbf{Z}$ durch Übergang zum Reziproken, schließlich die üblichen Regeln für das Ableiten von Polynomen und rationalen Funktionen.

5. Die *Kettenregel:* Seien f differenzierbar auf $[a, b]$ und g differenzierbar auf $[c, d] \subset f([a, b])$. Dann ist auch $g \circ f$ differenzierbar auf $[a, b]$, und zwar ist $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$. Den letzten Faktor nennt man die *innere Ableitung* der zusammengesetzten Funktion. Beispiel:

$$\left((x^2 + 1)^5\right)' = 5(x^2 + 1)^4 \cdot 2x \quad .$$

6. Wenn f differenzierbar ist auf $[a, b]$ und überall $f' > 0$ oder $f' < 0$ erfüllt, existiert auf dem Bildintervall eine *Umkehrfunktion* g mit $g \circ f = \mathrm{id}$. Diese ist differenzierbar mit Ableitung

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad .$$

Beispiel: Für $g(y) = \sqrt[n]{y}$, $f(x) = x^n$, ist

$$g'(y) = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{ny^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1} \quad .$$

Satz 4.1 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung) *$f : [a, b] \to \mathbf{R}$ sei differenzierbar. Dann gibt es ein $\xi \in]a, b[:= \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$ mit der Eigenschaft*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \quad .$$

Den *Beweis* führen wir zunächst für den Spezialfall $f(a) = f(b) = 0$ (auch *Satz von Rolle* genannt): Wenn $f \equiv 0$, ist die Behauptung evident, also dürfen wir z.B. voraussetzen, dass f positive Werte annimmt, somit nach Satz 3.1 ein Maximum in einem Punkt ξ, $a < \xi < b$ (bei negativen Werten wähle man ξ als einen Punkt, in dem f ein Minimum annimmt und schließe entsprechend), also mit $f(x) \leq f(\xi)$ für alle $x \in [a, b]$. Daher ist die Sekantensteigung $(f(x) - f(\xi))/(x - \xi) \leq 0$ für alle $x > \xi$ und ≥ 0 für alle $x < \xi$, bleibt für die Ableitung also nur noch die Möglichkeit

$$f'(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = 0 \quad .$$

Den allgemeinen Fall führt man auf den Satz von Rolle dadurch zurück, dass man anstelle der Funktion f die Funktion

$$x \mapsto f(x) - f(a) - \frac{x - a}{b - a} \cdot (f(b) - f(a))$$

betrachtet; deren Ableitung verschwindet an einer Stelle ξ mit
$f'(\xi) = (f(b) - f(a))/(b - a)$. $\square$
Der Beweis lehrt nebenbei, dass die Differenzierbarkeit von f nur im Innern des Intervalls gebraucht wird; in den Randpunkten a, b genügt die Stetigkeit. An der Ableitung liest man vermöge des Mittelwertsatzes sofort ab, ob eine Funktion *monoton* ist:

Definition 4.2 (Monotonie) *$f : [a,b] \to \mathbf{R}$ ist ,,monoton wachsend" (bzw. fallend), wenn für alle $x < y \in [a,b]$ gilt $f(x) \leq f(y)$ (bzw. $f(x) \geq f(y)$). Wenn stattdessen sogar $f(x) < f(y)$ bzw. $f(x) > f(y)$, spricht man von ,,streng monoton".*

Satz 4.2 *Eine differenzierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ ist monoton wachsend (bzw. fallend), wenn $f'(x) \geq 0$ bzw. ≤ 0 für alle $x \in [a,b]$ ist.*

Warum ist Differentialrechnung so wichtig? Viele Naturgesetze werden in Form von *Differentialgleichungen* beschrieben, das sind Gleichungen, in denen Funktionen f nicht explizit gegeben sind, sondern nur ihre Beziehungen zu ihren Ableitungen. Ein allereinfachstes Beispiel ist die Gleichung

$$f' = 0 \qquad .$$

Bemerkung **2** oben legt bereits nahe, dass konstante Funktionen $f(x) := c$ Lösungen dieser ,,Dgl." ist, nun ist mit dem Mittelwertsatz oder mit Satz 4.2 sofort zu sehen, dass dies die einzigen Lösungen sind.

Ein zweiter Grund ist der, dass die meisten Funktionen kompliziert zu berechnen sind, jedenfalls viel komplizierter als lineare Funktionen $x \mapsto mx + b$. Differenzierbarkeit in x_0 bedeutet nun einfach, dass man die Funktion f nahe an x_0 extrem gut durch eine lineare Funktion (Tangente an den Funktionsgraphen in x_0) approximieren kann, genauer:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \quad \text{eine Fehlerfunktion} \quad h(x) \quad \text{mit} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{x - x_0} = 0$$

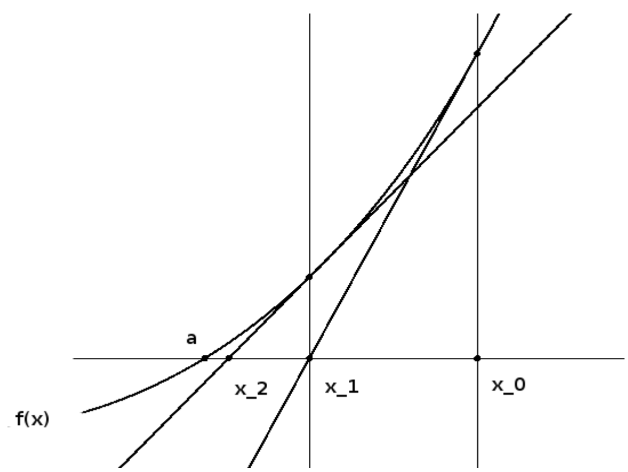

Abbildung 1: Newton–Verfahren

Eine direkte Anwendung dieser Approximation ist das *Newtonverfahren* zur Berechnung von Nullstellen von f : Seine Idee ist, an einem Punkt x_0 nahe an einer vermuteten Nullstelle die Funktion f durch ihre lineare Approximation zu ersetzen und deren Nullstelle zu berechnen, also

$$x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad .$$

Die Hoffnung ist, dass dieses x_1 näher als x_0 an der wahren Nullstelle von f liegt, und dass man durch Iteration des Verfahrens beliebig nahe an die Nullstelle von f kommt, also eine konvergente rekursiv definierte Folge

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

erhält. Das ist keineswegs immer der Fall, aber man kann Bedingungen angeben, unter denen das Verfahren konvergiert, ja sogar sehr schnell ein sehr gutes Ergebnis liefert. Probieren wir's aus: Sei $a > 0$; gefragt ist die positive Wurzel $\sqrt{a}$, also eine Nullstelle von $f(x) = x^2 - a$. Man mag starten z.B. mit $x_0 = a$, dann lautet die Rekursionsvorschrift

$$x_{n+1} := x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \qquad .$$

Für eine Beweisidee zur Konvergenz vgl. [EMI], Satz 12.3.

Was hier zur Approximation durch lineare Funktionen gesagt wurde, lässt sich auf Approximation durch Polynome höheren Grades verallgemeinern, wenn f mehrmals differenzierbar ist.

Definition 4.3 *$f : [a,b] \to \mathbf{R}$ sei differenzierbar. f heißt ,,zweimal differenzierbar", wenn auch f' auf $[a,b]$ differenzierbar ist, und $f^{(2)} = f'' := (f')'$ wird als ,,zweite Ableitung" von f bezeichnet. Entsprechend definiert man rekursiv die ,,n–te Ableitung" von f als $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$, wenn auch $f^{(n-1)}$ eine differenzierbare Funktion auf $[a,b]$ ist. f heißt dann ,,n mal differenzierbar".*

Polynome und rationale Funktionen (außerhalb ihrer Pole) sind dann sogar unendlich oft differenzierbar, ebenso wie eine Reihe weiterer vertrauter Funktionen, von denen noch die Rede sein wird. Den folgenden Satz werden wir nicht beweisen, wohl aber mit großem Nutzen verwenden:

Satz 4.3 (Satz von Taylor) *$f : [a,b] \to \mathbf{R}$ sei $n+1$ mal stetig differenzierbar. Dann ist*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\cdot(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}$$

für ein ξ zwischen x_0 und x, also Summe des ,,Taylorpolynoms" vom Grad n und des ,,Lagrange–Restglieds" (es gibt noch andere Formen dieses Restglieds). Wenn f unendlich oft differenzierbar ist, nennt man

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

die ,,Taylorreihe" von f im Punkt x_0 . Wenn sie konvergiert und die Restglieder für $n \to \infty$ eine Nullfolge bilden, stimmt $f(x)$ mit dieser Taylorreihe überein.

Definition 4.4 (Lokale Extrema) *$f : [a, b] \to \mathbf{R}$ besitzt im Punkt $x_0 \in]a, b[$ ein ,,lokales Maximum" (bzw. Minimum), wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass in der ,,ε–Umgebung" $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, also für alle x mit $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ gilt*

$$f(x) \leq f(x_0) \qquad \textit{bzw.} \qquad f(x) \geq f(x_0) \quad .$$

Ein notwendiges Kriterium für lokale Extrema folgt nun aus dem Mittelwertsatz:

Satz 4.4 *Wenn $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ stetig differenzierbar ist und in $x_0 \in]a, b[$ ein lokales Extremum besitzt, ist $f'(x_0) = 0$.*

Zur Begründung wende man den Mittelwertsatz auf $f(x)$ und $f(x_0)$ an: Links und rechts von x_0 muss $f'(\xi)$ verschiedenes Vorzeichen haben; da f' als stetig vorausgesetzt ist, kann das nur stimmen, wenn $f'(x_0) = 0$ ist. □

Ein hinreichendes Kriterium liefert der Satz von Taylor:

Satz 4.5 *$f : [a, b] \to \mathbf{R}$ sei $n + 1$ mal stetig differenzierbar, $n + 1$ eine gerade Zahl, und in $x_0 \in]a, b[$ gelte*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ \ldots \ = f^{(n)}(x_0) = 0 \qquad \textit{und} \qquad f^{(n+1)}(x_0) < 0$$

(bzw. > 0). Dann besitzt f in x_0 ein lokales Maximum (bzw. Minimum).

Beweis. Da $f^{(n+1)}$ stetig ist, gilt $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ (bzw. < 0) nicht nur in x_0 selbst, sondern auch für alle nahe genug an x_0 gelegenen ξ , und unter der Bedingung des Satzes nimmt der Satz von Taylor die Form

$$f(x) \ = \ f(x_0) \ + \ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

an. Da $n + 1$ gerade ist, wird der zweite Summand für alle $x \neq x_0$, aber nahe genug an x_0, stets < 0 (bzw. > 0), somit haben wir in x_0 ein lokales Maximum (bzw. Minimum) von f . □

Unter den gleichen Bedingungen, aber mit *ungeradem* $n+1$ liegt definitiv kein lokales Extremum vor, weil dann der zweite Summand rechts und links von x_0 verschiedene Vorzeichen besitzt.

5 Integrieren. Flächen und Volumina im Raum

Definition 5.1 *$f : [a, b] \to \mathbf{R}$ heißt ,,Treppenfunktion", wenn das Definitionsintervall $[a, b]$ eine Zerlegung $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$ besitzt, so dass f auf den offenen Teilintervallen $]a_{i-1}, a_i[$ jeweils konstant $\equiv c_i \in \mathbf{R}$ ist, $i = 1, 2, \ldots, n$ (die Werte $f(a_i)$ sind egal). Das ,,Integral" über f ist*

$$\int_a^b f(x)dx \;:=\; \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) \cdot c_i \;=\; (a_1 - a_0)c_1 + (a_2 - a_1)c_2 + \ldots + (a_n - a_{n-1})c_n \quad .$$

Wenn alle $c_i \geq 0$ sind, stellt $\int_a^b f(x)dx$ offenbar ein Maß für die Fläche zwischen dem Definitionsintervall auf der x–Achse und dem Funktionsgraphen dar. Interpretiert man x als Zeitpunkt, $f(x)$ als (Momentan–)Geschwindigkeit einer Bewegung längs einer Geraden, so liefert das Integral die Weglänge, welche zwischen den Zeitpunkten a und b zurückgelegt wurde; bei negativer Geschwindigkeit $c_i < 0$ wird also ein Weg rückwärts (in negativer Richtung) in Rechnung gestellt, in der Flächen–Interpretation gehen also Funktionswerte unterhalb der x–Achse mit negativem Vorzeichen in das Integral ein. $\int_a^b f(x)dx/(b-a)$ liefert demnach die Durchschnittsgeschwindigkeit; Integrieren lässt sich also als die Umkehrung des Differenzierens ansehen, was später noch präzisiert werden wird. Es gibt verschiedene Wege, dieses Konzept auf die uns aus der Analysis vertrauten (nicht lokal konstanten) Funktionen zu übertragen. Nicht die beste, aber die begrifflich einfachste Methode funktioniert folgendermaßen:

Definition 5.2 (Das Riemann–Integral) *$f : [a, b] \to \mathbf{R}$ heißt ,,Riemann–integrierbar", wenn eine Zahl*

$$c \;=:\; \int_a^b f(x)dx$$

existiert mit folgender Eigenschaft: c ist die größte Zahl $\leq \int_a^b t(x)dx$ für alle Treppenfunktionen $t \geq f$ und die kleinste Zahl $\geq \int_a^b s(x)dx$ für alle Treppenfunktionen $s \leq f$.

Eigenschaften des Riemann–Integrals. (Zum Teil nicht so leicht zu beweisen!)

1. Stetige Funktionen sind Riemann–integrierbar.

2. Wenn f stetig ist, gibt es eine Folge von Treppenfunktionen t_n auf $[a, b]$, die $\lim_{n\to\infty} t_n(x) = f(x)$ für alle x erfüllen, und für welche gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n(x)dx \;=\; \int_a^b f(x)dx \qquad .$$

3. Diese Folge von Treppenfunktionen lässt sich z.B. so auswählen, dass man für alle n eine Intervall–Unterteilung $a = a_{n,0} < a_{n,1} < a_{n,2} < \ldots < a_{n,n-1} < a_{n,n} = b$ nimmt, deren ,,Feinheit" $\delta_n := \max\{a_{n,i} - a_{n,i-1}\}$ mit wachsendem n gegen 0 konvergiert, und

$t_n(x) := f(\alpha_{n,i})$ für jeweils ein $\alpha_{n,i} \in [a_{n,i-1}, a_{n,i}]$ und alle $a_{n,i-1} < x \leq a_{n,i}$ setzt. Die entstehende Approximation

$$\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_{n,i}) \cdot (a_{n,i} - a_{n,i-1}) \qquad \text{von} \qquad \int_a^b f(x)dx$$

nennt man eine *Riemann–Summe.*

4. Seien $c \in \mathbf{R}$ und f, g zwei Riemann–integrierbare Funktionen auf $[a, b]$ Dann sind cf und $f + g$ Riemann–integrierbar und es ist

$$\int_a^b cf(x)dx \;=\; c\int_a^b f(x)dx \qquad \text{und} \qquad \int_a^b (f{+}g)(x)dx \;=\; \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \qquad .$$

Aus $f(x) \leq g(x)$ für alle x folgt

$$\int_a^b f(x)dx \;\leq\; \int_a^b g(x)dx \qquad .$$

5. Sei $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ Riemann–integrierbar und $a < c < b$. Dann ist

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; \int_a^c f(x)dx \;+\; \int_c^b f(x)dx \qquad .$$

Diese Gleichung gilt sogar ohne die Voraussetzung an die Anordnung von a, b, c, wenn f zwischen den angegebenen Grenzen definiert ist und die Konventionen

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; -\int_b^a f(x)dx \quad , \qquad \int_a^a f(x)dx \;=\; 0$$

benutzt werden.

Satz 5.1 (Mittelwertsatz der Integralrechnung) $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *sei stetig. Dann gibt es ein* $\xi \in [a, b]$ *mit*

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; f(\xi) \cdot (b - a) \qquad .$$

Zum *Beweis* erinnere man sich an den Satz vom Maximum und Minimum für stetige Funktionen: Es gibt $M, m \in [a, b]$ mit $f(m) \leq f(x) \leq f(M)$ für alle $x \in [a, b]$, nach der Abschätzung in **4** oben folgt also

$$f(m)(b - a) \;\leq\; \int_a^b f(x)dx \;\leq\; f(M)(b - a) \qquad ,$$

wenn man $f(m), f(M)$ als konstante (Treppen–)Funktionen auffasst. Die Existenz von ξ zwischen m und M folgt dann aus dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen. □

Satz 5.2 (Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung) *$f : [a,b] \to \mathbf{R}$ sei stetig. Dann ist die Funktion*

$$F(x) \; := \; \int_a^x f(t)dt$$

differenzierbar auf $[a,b]$ mit Ableitung $F'(x) = f(x)$.

Beweis. Nach Bemerkung **5** oben und nach dem Mittelwertsatz ist

$$\frac{1}{h}\left(F(x+h) - F(x)\right) \; = \; \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right) \; = \; \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \; = \; f(\xi)$$

für ein ξ zwischen x und $x+h$. Der Limes für $h \to 0 \;\Rightarrow\; \xi \to x$ existiert also auf beiden Seiten und ergibt $f(x)$. $\square$

Die Funktion F heißt *Stammfunktion* von f. Sie ist natürlich nicht eindeutig bestimmt, denn man könnte die untere Integrationsgrenze verschieben, womit sich F nur um eine additive Konstante $\int_a^c f(t)dt$ ändert. Andererseits unterscheidet sich jede andere Stammfunktion G von f nur um eine konstante Funktion von F, denn

$$(F-G)' \; \equiv \; 0 \quad \Longrightarrow \quad F - G \equiv C \qquad .$$

Darum sind Stammfunktionen – manchmal auch als *unbestimmtes Integral* $\int f(x)dx$ (ohne Angabe von Integrationsgrenzen) bezeichnet – immer nur bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Wenn es gelingt, eine Stammfunktion zu finden, ist Integralrechnung leicht:

Satz 5.3 *Für jede Stammfunktion F der stetigen Funktion f ist $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.*

Ein erstes Beispiel einer Stammfunktion ist natürlich

$$\int x^n dx \; = \; \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbf{Z}\,,\; n \neq -1 \quad .$$

Den Regelvorrat der Differentialrechnung übersetzt man in ein Regel–Repertoire zum Auffinden von Stammfunktionen. Außer den üblichen Regeln über Summen von Funktionen und Multiplikation mit Konstanten sind hier vor allem die *partielle Integration* und die *Substitutionsregel* zu nennen:

Satz 5.4 *Wenn die stetig differenzierbaren Funktionen u, v passende gemeinsame Definitionsbereiche besitzen, gilt*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx \; = \; u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

und wenn zusätzlich v streng monoton ist, gilt

$$\int_a^b (u \circ v)(x)v'(x)dx \; = \; \int_{v(a)}^{v(b)} u(s)ds \qquad .$$

In späteren Abschnitten werden wir noch viele Beispiele hierzu behandeln. Einstweilen soll nur ein kurzer Einblick in ein paar Sachverhalte der Elementargeometrie gegeben werden, die eng mit den Ideen der Integralrechnung zusammenhängen.

Satz 5.5 (Volumen von Rotationskörpern) *$f : [a,b] \to \mathbf{R}$ sei stetig und ≥ 0. Lässt man den Graphen von f um die x–Achse rotieren, so besitzt der entstehende Rotationskörper das Volumen $\pi \int_a^b f^2(x)dx$.*

Zum *Beweis* denke man sich den Rotationskörper approximiert durch eine Vereinigung zylindrischer Scheiben: Zerlege das Intervall $[a,b]$ in $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$; die Zylinderscheibe zum Achsenstück $[a_{i-1}, a_i]$ und dem Radius $f(a_i)$ hat dann das Volumen $\pi \cdot f(a_i)^2 \cdot (a_i - a_{i-1})$, und die Summe aller dieser Zylinder–Volumina

$$\pi \cdot \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) f^2(a_i)$$

enthält als wichtigsten Bestandteil gerade eine Riemann–Summe zum Integral $\int_a^b f^2(x)dx$ (vgl. Eigenschaft **3** des Integrals), um so näher am Integral, je feiner die Intervall–Unterteilung gewählt wird. □

Als Beispiel nehme man das *Volumen der Einheitskugel*: Diese entsteht als Rotationskörper, wenn man den Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ (positive Wurzel) um das reelle Intervall $[-1,+1]$ rotieren lässt. Das Ergebnis ist

$$V(\text{Kugel}) \;:=\; \pi \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx \;=\; \pi \int_{-1}^{1} (1-x^2)dx \;=\; \pi \left(2 - \frac{2}{3}\right) \;=\; \frac{4\pi}{3} \quad .$$

Um das Volumen eines *Kreiskegels* von Radius R und Höhe h zu bestimmen, lasse man den Graphen der Funktion $f : [0,h] \to \mathbf{R} : x \mapsto Rx/h$ um das Intervall $[0,h]$ rotieren. Satz 5.5 ergibt hier

$$V(\text{Kegel}) \;=\; \pi \int_0^h \frac{R^2 x^2}{h^2} dx \;=\; \frac{R^2 h \pi}{3} \quad .$$

Eigentlich ist dieser Sachverhalt nur ein Spezialfall eines sehr viel allgemeineren Resultats:

Satz 5.6 (Kegelvolumen) *In einer Ebene E_0 sei eine messbare Figur $\mathcal{F}$ vom Flächeninhalt F gegeben, dazu ein Punkt Z in der Höhe h über dieser Ebene. Der Kegel K bestehe aus allen Verbindungsstrecken von Z zu den Punkten $P \in \mathcal{F}$. Dann besitzt K das Volumen*

$$V(K) \;=\; \frac{1}{3} h \cdot F \quad .$$

Der *Beweis* beruht darauf, dass der Schnitt von K mit Ebenen E_x parallel zu E_0 eine Figur ergibt, welche ähnlich zu $\mathcal{F}$ ist, allerdings verkleinert um einen linearen Faktor $(h-x)/h$, wenn E_x von E_0 den Abstand x besitzt. Der Flächeninhalt von $K \cap E_x$ ist dann natürlich $F \cdot (h-x)^2/h^2$. Ähnlich wie bei der Approximation des Kreiskegels durch zylindrische Scheiben approximiere man jetzt K durch Scheiben der Dicke $a_i - a_{i-1}$ und des Flächeninhalts $F \cdot (h-a_i)^2/h^2$. Als Summe der Volumina ensteht wieder eine Riemann–Summe zum Integral

$$\int_0^h F \cdot \frac{(h-x)^2}{h^2} dx \;=\; \frac{1}{3}\, h \cdot F \qquad . \qquad \Box$$

Es sei ausdrücklich angemerkt, dass man Flächeninhalte von Polygonen in der Ebene elementar durch Zerlegen und neu Zusammensetzen ermitteln kann, wenn nur die Fläche des Rechtecks mit Kantenlängen a, b bekannt ist. Im Raum ist das ganz anders (Max Dehn 1902): Selbst bei Prismen über Dreiecks–Grundflächen lässt sich das in Satz 5.6 gefundene Volumen i.a. nicht auf elementarem Weg bestimmen – man braucht Grenzprozesse in irgendeiner Form. Dies gilt genauso auch für das *Prinzip von Cavalieri*, welches eng verwandt zur eben verwendeten Schlussweise ist: *Zwei Körper* $K_1, K_2 \subset \mathbf{R}^3$ *besitzen das gleiche Volumen, wenn es eine Ebene* E *gibt, so dass für alle dazu parallelen Ebenen* E_x *die Flächeninhalte* $K_1 \cap E_x$ *und* $K_2 \cap E_x$ *übereinstimmen.*

Noch schwieriger als die Bestimmung von Volumina ist das Messen von Oberflächen. Wir beginnen mit der Kurvenlänge jener Kurven, die in der elementaren Analysis auftreten, nämlich der Funktionsgraphen.

Satz 5.7 $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *sei stetig differenzierbar. Die Bogenlänge des Graphen von* f *ist dann*

$$s \;:=\; \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\; dx \qquad .$$

Vor einem *Beweis* sollte man eigentlich erst das Wort *Bogenlänge* präzisieren. Was ist damit gemeint? Unterteilt man das Intervall sehr fein in Teilintervalle $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$ und ersetzt man den Graphen durch den Polygonzug, der sich aus allen Strecken zwischen $(a_{i-1}, f(a_{i-1}))$ und $(a_i, f(a_i))$ besteht, dann hat dieser Polygonzug eine wohldefinierte Länge, nach Pythagoras nämlich

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sqrt{(a_i - a_{i-1})^2 + (f(a_i) - f(a_{i-1}))^2} \;&=\; \sum_{i=1}^n \sqrt{(a_i - a_{i-1})^2 (1 + f'(\xi_i)^2)} \\ &=\; \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}\;, \end{aligned}$$

wenn wir auf die Teilintervalle jeweils den Mittelwertsatz der Differentialrechnung anwenden. Diese Summe ist ein Integral über eine typische Treppenfunktion, und mit zunehmender Feinheit der Intervalleinteilung konvergieren diese Integrale (vgl. Eigenschaften **1** bis

3) gegen das im Satz angegebene Integral – egal, wie die Intervalleinteilungen im einzelnen aussehen. Damit ist gleichzeitig klar, dass dieses Integral ein vernünftiges Maß für die Bogenlänge ist. □

Probiert man Satz 5.7 am Beispiel eines Viertelkreises aus (Bogenlänge des Graphen für die Funktion $f : [0, r] \to \mathbf{R} : x \mapsto \sqrt{r^2 - x^2}$, so wird man auf das Integral

$$\int_0^r \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx \;=\; \int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\, dx \;=\; r \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$$

geführt, dessen Behandlung wir auf später verschieben, ebenso wie die Ableitung der Wurzelfunktion.

Satz 5.8 (Mantel eines Rotationskörpers) $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *sei stetig differenzierbar und* ≥ 0*. Durch Rotation des Graphen um die* x*–Achse entsteht eine Rotationsfläche mit Flächeninhalt (Oberfläche des Rotationskörpers, ohne die begrenzenden Kreisscheiben)*

$$2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx \qquad .$$

Zum *Beweis* ersetzt man genau wie im Beweis von Satz 5.7 den Graph der Funktion durch einen hinreichend fein unterteilten Polygonzug. Die Rotationsfläche wird angenähert durch Stücke von Kegelmänteln, deren Radien jeweils zwischen $f(a_{i-1})$ und $f(a_i)$ liegen und eine Mantellinie der Länge

$$\sqrt{(a_i - a_{i-1})^2 + (f(a_i) - f(a_{i-1}))^2}$$

besitzen. Die Fläche dieses Kegelmantelstücks liegt also nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung bei $2\pi f(\xi_i)(a_i - a_{i-1})\sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}$ für einen Wert ξ_i zwischen a_i und a_{i-1}. Aufsummiert ergibt sich eine Riemann–Summe zu dem im Satz genannten Integral. □

Als erstes Beispiel möge wieder die *Mantelfläche des Kreiskegels* der Höhe h und vom Basisradius R dienen. Wie vorhin benutze man die Funktion $f : [0, h] \to \mathbf{R} : x \mapsto Rx/h$, dann ergibt Satz 5.8 die Mantelfläche

$$2\pi \int_0^h \frac{Rx}{h} \sqrt{1 + \frac{R^2}{h^2}}\, dx \;=\; \pi R \sqrt{h^2 + R^2} \qquad ,$$

was man in diesem Fall auch durch Abwickeln des Kegelmantels in die Ebene hätte ermitteln können.

Anders ist es bei der *Oberfläche der Einheitskugel.* Hier lassen wir den Graphen von $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ um das Intervall $[-1, 1]$ rotieren; mit der gleichen Rechnung wie für die Kurvenlänge des Einheiskreises ergibt sich

$$2\pi \int_{-1}^1 f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx \;=\; 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2}\, \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \;=\; 4\pi \qquad .$$

6 Komplexe Zahlen. Ebene Bewegungen

Vom Standpunkt der elementaren Arithmetik haben reelle Zahlen – abgesehen davon, dass sie kompliziert zu definieren sind – nur den Nachteil, dass nicht alle *algebraischen Gleichungen* eine Lösung besitzen, d.h. Gleichungen der Bauart $p(x) = 0$ mit einem nichtkonstanten Polynom p. Typisches Beispiel ist $x^2 + 1 = 0$. Diesen Nachteil beseitigen wir jetzt durch eine letzte Zahlbereichserweiterung der rellen zu den *komplexen Zahlen*, auch wenn diese außerhalb des Horizonts der Schulmathematik (zumindest der Sek. I) liegen; sie liefern nämlich über das Lösen algebraischer Gleichungen hinaus ein tieferes Verständnis für ebene Bewegungsgeometrie ebenso wie für viele Eigenschaften der Exponentialfunktion und der trigonometrischen Funktionen.

Definition 6.1 *Die Menge* $\mathbf{C}$ *der ,,komplexen Zahlen" ist die Menge* $\mathbf{R}^2$ *der geordneten Paare*

$$(x, y) \; =: \; x + iy \; =: \; z \quad ,$$

reeller Zahlen x, y, *versehen mit der Addition* $(x, y) + (u, v) := (x + u, y + v)$ *und der Multiplikation*

$$(x, y) \cdot (u, v) := (xu - yv, xv + yu) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x + iy)(u + iv) := xu - yv + i(xv + yu) \quad .$$

Satz 6.1 $\mathbf{C}$ *ist ein Körper; er enthält* $\mathbf{R}$ *vermöge der Einbettung*

$$\mathbf{R} \to \mathbf{C} \; : \; x \mapsto (x, 0) = x + i0 \quad ,$$

die alle Operationen mit reellen Zahlen in die entsprechenden Operationen für komplexe Zahlen überführt.

Beweis, viele *Bemerkungen* und neue *Begriffe*.
0. Unter *Einbettung* versteht man eine injektive Abbildung, zumeist verträglich mit Zusatzstrukturen auf Urbild– und Bildmenge, hier also mit Addition und Multiplikation, aber auch mit Abständen.
1. Die Addition auf $\mathbf{C}$ ist einfach die (komponentenweise) Vektor–Addition auf $\mathbf{R}$. Die Gruppenaxiome für die Addition sind also sehr leicht nachzurechnen; insbesondere ist $(0, 0) = 0 + i0 = 0$ das neutrale Element. Das additive Inverse ist $-(x, y) = (-x, -y)$.
2. Dass die Multiplikation kommutativ ist, lässt sich fast durch scharfes Hinsehen begründen, wenn man nur $xu = ux$ etc. für reelle x, u in Rechnung stellt. Das Assoziativgesetz der Multiplikation und das Distributivgesetz sind viel mühsamer nachzurechnen, aber zu langweilig, um sie aufzuschreiben. Jedenfalls spielt $(1, 0)$ die Rolle des neutralen Elements der Multiplikation, und offenbar ist für alle $x, u \in \mathbf{R}$

$$(x, 0) \pm (u, 0) = (x \pm u, 0) \qquad \text{und} \qquad (x, 0) \cdot (u, 0) = (xu, 0) \quad ,$$

die Einbettung von $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ überträgt also alle algebraischen Operationen auf reellen Zahlen in die gleichen Operationen mit ihren komplexen Bildern.

3. Es ist also vernünftig, die reellen x mit den komplexen $(x, 0)$ zu identifizieren. Definiert man $i := (0, 1)$, so rechnet man leicht nach, dass

$$x \cdot i = i \cdot x = (x, 0) \cdot (0, 1) = (0, 1) \cdot (x, 0) = (0, x)$$

mit der oben gewählten Schreibweise $0 + ix$ übereinstimmt. Man beachte nun, dass $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$, dass man also alle gewohnten Rechenregeln übernehmen darf, wenn man $i^2 = -1$ in Rechnung stellt.
4. In der Schreibweise $z = x + iy$ heißt x der *Realteil*, y der *Imaginärteil* von z. Sie spielen die Rolle der Koordinaten von z, wenn $\mathbf{C}$ als die *Gaußsche Zahlenebene* dargestellt wird analog zur reellen Zahlengeraden, die hier die Rolle der *reellen Achse* $\mathbf{R}$ übernimmt. Die dazu orthogonale Koordinatenachse $i\mathbf{R}$ heißt die *imaginäre Achse*, ihre Punkte die *rein imaginären Zahlen*.
5. Geometrisch lässt sich die Addition komplexer Zahlen einfach als Vektor–Addition sehen, vgl. Abbildung 2.

Um zu verstehen, warum multiplikative Inverse in $\mathbf{C}$ existieren, betrachtet man am besten zunächst die *komplexe Konjugation*, die jedes $z = x + iy$ überführt in $\overline{z} := x - iy$, geometrisch gesehen eine Spiegelung der Gaußschen Ebene an der reellen Achse. Man beachte, dass

$$|z|^2 \ := \ z\overline{z} \ = \ (x + iy)(x - iy) \ = \ x^2 + y^2$$

immer reell ≥ 0 ist, $= 0$ nur für $z = 0$. Nach Pythagoras misst $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ den Abstand von z zum Nullpunkt und wird als *Absolutbetrag* von z bezeichnet; auf der rellen Zahlengeraden stimmt $|z|$ offenbar mit dem reellen Absolutbetrag überein. Für alle $z \neq 0$ ist das multiplikative Inverse darum gegeben durch

$$z^{-1} \ = \ \frac{1}{z} \ := \ \frac{\overline{z}}{|z|^2} \ = \ \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \quad .$$

Damit sind die Körperaxiome für $\mathbf{C}$ alle verifiziert. Da für reelle z die Gleichung $z = \overline{z}$ gilt, stimmt die Inversenbildung auf $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ auch wieder mit der gewohnten Inversenbildung überein. Nebenbei sei noch angemerkt, dass Real– und Imaginärteil von z durch z und $\overline{z}$ leicht zu ermitteln sind als

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2} \qquad \text{bzw.} \qquad y = \frac{z - \overline{z}}{2i} \quad .$$

6. Gibt es eine geometrische Interpretation der Multiplikation komplexer Zahlen? Dazu mache man sich zunächst einige einfache Rechenregeln für den Umgang mit komplexer Konjugation klar: Für alle $z, w \in \mathbf{C}$ ist

$$\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w} \ , \quad \overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w} \ , \quad \overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1} \ , \quad \text{letzteres wenn} \quad z \neq 0 \ ,$$

und daraus leiten sich Rechenregeln für den Absolutbetrag ab:

$$|zw| \ = \ |z| \cdot |w| \quad \text{und} \quad \left|\frac{1}{z}\right| \ = \ \frac{1}{|z|}$$

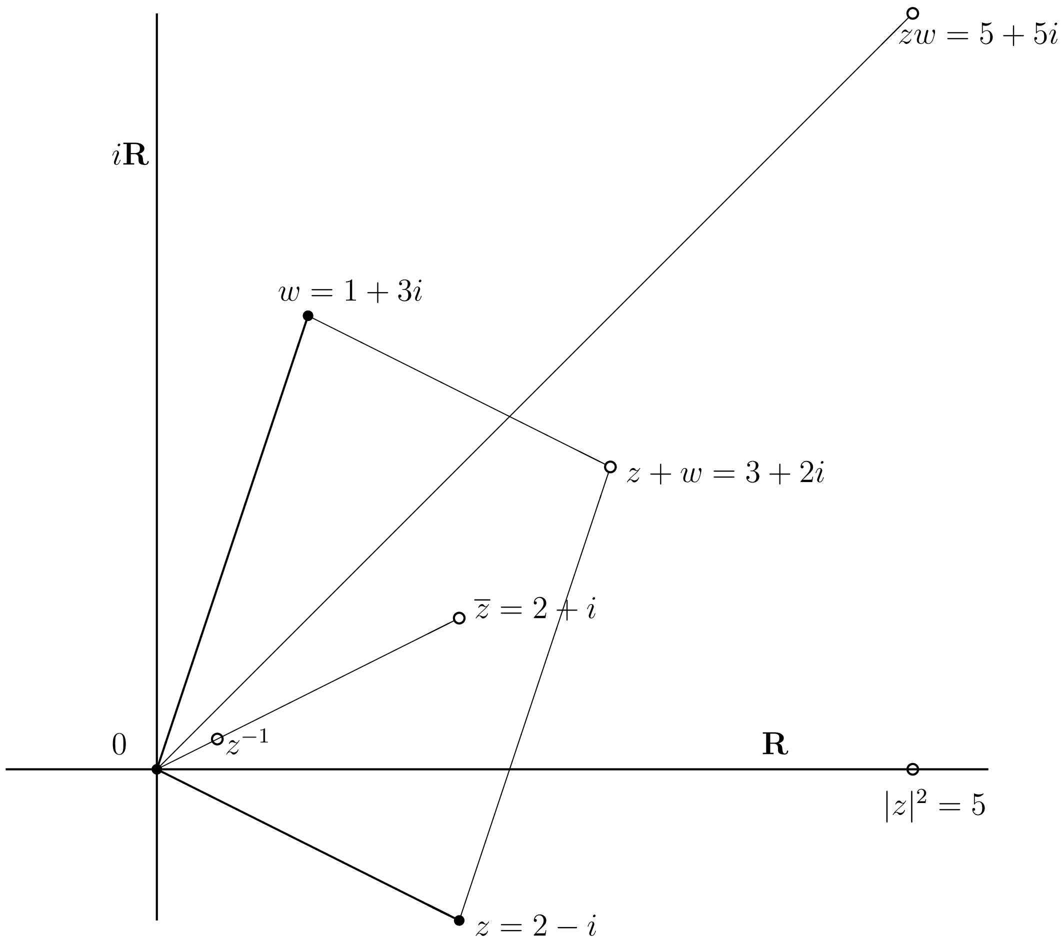

Abbildung 2: Addition, Multiplikation, komplexe Konjugation und Inversenbildung in $\mathbf{C}$

Damit ist immerhin schon der Abstand von zw zum Nullpunkt festgelegt als Produkt von $|z|$ und $|w|$.

7. Bleibt noch der Winkel zur positiven reellen Achse zu bestimmen; dieser Winkel wird positiv gegen den Uhrzeigersinn gerechnet, negativ mit dem Uhrzeigersinn; jeder Winkel φ kann identifiziert werden mit $\varphi + 2\pi k$ für beliebige $k \in \mathbf{Z}$. Wir machen aus der Zerlegung in Real– und Imaginärteil nun eine Zerlegung in Polarkoordinaten, indem wir

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad , \qquad w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$$

setzen und die Regel für die Multiplikation verwenden:

$$\begin{aligned} zw &= |zw|\,(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + i(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)) \\ &= |zw|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)) \end{aligned}$$

nach den Additionstheoremen für Cosinus und Sinus. Resultat: Bei der Multiplikation addiert man die Winkel zur positiven reellen Achse. Den zu z gehörigen Winkel φ nennt man auch das *Argument* $\arg z$ von z. Insbesondere gilt – vgl. auch Abb. 2 –
$\arg z^{-1} = -\arg z$. □

Die verschiedenen Punkte des letzten Beweises liefern gleich die Brücke zur ebenen Bewegungsgeometrie:

Satz 6.2 *Identifiziert man die Ebene E mit der Gaußschen Zahlenebene, so kann man*

1. *jede Translation als Additionsabbildung $\mathbf{C} \to \mathbf{C} : w \mapsto w + z$ beschreiben,*
2. *jede Drehung darstellen als eine Abbildung*

$$\mathbf{C} \to \mathbf{C} \;:\; w \mapsto z \cdot w + t \quad mit \quad t, z \in \mathbf{C}\,,\ |z| = 1\,,\ z \neq 1 \quad ,$$

3. *jede Drehstreckung darstellen als eine Abbildung*

$$\mathbf{C} \to \mathbf{C} \;:\; w \mapsto z \cdot w + t \quad mit \quad t, z \in \mathbf{C}\,,\ z \neq 0\,,1 \quad ,$$

4. *jede Geradenspiegelung beschreiben als eine Abbildung*

$$\mathbf{C} \to \mathbf{C} \;:\; w \mapsto z \cdot \overline{(w - t)} + t \quad mit \quad t, z \in \mathbf{C}\,,\ |z| = 1 \quad .$$

Als Beispiel für einen *Beweis* greifen wir den letzten Punkt heraus. Sei $g \subset E$ eine Gerade, an der gespiegelt werden soll. Diese kann zunächst durch eine Translation $w \mapsto w - t$ in eine Gerade durch den Nullpunkt 0 übergeführt werden, dann durch eine Drehung $(w - t) \mapsto a(w - t)$ nach $\mathbf{R}$, also mit $|a| = 1$, vgl. Punkt 2. Auf das Ergebnis wende man die komplexe Konjugation an (= Spiegelung an $\mathbf{R}$) und führe zunächst die inverse Drehung, dann die inverse Translation aus. Insgesamt erhält man die Abbildung

$$\mathbf{C} \to \mathbf{C} \;:\; w \mapsto a^{-1}\overline{a \cdot (w - t)} + t \quad ,$$

also gerade die Behauptung mit $z = a^{-1}\overline{a}$. Übungsaufgabe: a) Man zeige, dass in der Tat $|a^{-1}\overline{a}| = 1$ ist, genauer sogar $z = a^{-2}$, b) dass umgekehrt jede Transformation vom Typ $w \mapsto z \cdot \overline{(w - t)} + t$ mit $|z| = 1$ eine Geradenspiegelung beschreibt. □

Die Gleichung $z^2 = -1$ besitzt offensichtlich zwei Lösungen, nämlich $\pm i$. Der große Vorzug der komplexen Zahlen besteht aus der Sicht der Algebra darin, dass *jedes nichtkonstante Polynom $p(z) \in \mathbf{C}[z]$ in $\mathbf{C}$ eine Nullstelle besitzt* (der sogenannte *Hauptsatz der Algebra*, dessen Beweis uns hier allerdings zu weit führen würde). Ist z_1 eine solche Nullstelle von p, so ist $z - z_1$ ein Linearfaktor von p (Polynomdivision!), demnach $p(z)/(z - z_1)$ wieder ein Polynom (kleineren Grades), auf das wir den Hauptsatz wieder anwenden können. Sukzessive Division durch Linearfaktoren ergibt darum die folgende Umformulierung des Haupstsatzes:

Satz 6.3 *Jedes komplexe Polynom $p(z) \in \mathbf{C}[z]$ vom Grad $n > 0$ zerfällt in Linearfaktoren*

$$p(z) \;=\; a(z - z_1)(z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n) \qquad \mathit{mit} \qquad a \neq 0 \quad .$$

Die Linearfaktoren sind als Primfaktoren im Polynomring sogar eindeutig bestimmt bis auf ihre Reihenfolge; der Beweis benutzt den euklidischen Algorithmus genau wie bei der eindeutigen Primfaktorzerlegung in $\mathbf{Z}$. Ein besonders schönes Beispiel zum Schluss:

Satz 6.4

$$z^n - 1 \;=\; \prod_{k \bmod n} (z - \zeta_n^k) \quad ,$$

wobei die „n–ten Einheitswurzeln" $\zeta_n^k := \cos\frac{2\pi k}{n} + i \sin\frac{2\pi k}{n}$ die Eckpunkte eines regelmäßigen n–Ecks auf dem Einheitskreis $|z| = 1$ bilden.

7 Die Exponentialfunktion, Cosinus und Sinus

Genau wie in Satz 6.4 wird für jedes positive reelle r durch die Gleichung $|z| = r$ eine Kreislinie mit Mittelpunkt 0 beschrieben, denn die Gleichung ist äquivalent zu $|z|^2 = x^2 + y^2 = r^2$. Ganz entsprechend wird durch $|z| < r$ die *offene Kreisscheibe* beschrieben, also die Menge der Punkte innerhalb der Kreislinie. Da der Betrag den Abstand zum Nullpunkt misst, und da sich (euklidische) Abstände unter Translationen nicht ändern, ist $|z - w|$ ein vernünftiges Maß für den Abstand zwischen den Punkten z und $w \in \mathbf{C}$. Für diese Abstände gilt insbesondere auch die sogenannte *Dreiecksungleichung*

$$|z_1 - z_3| \;\leq\; |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| \quad \text{für alle} \quad z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$$

mit Gleichheit höchstens dann, wenn z_1, z_2, z_3 auf einer Geraden liegen. Die Dreiecksungleichung folgt aus

$$|z + w| \;\leq\; |z| + |w|$$

(mit Gleichheit genau dann, wenn z, w auf einer von 0 ausgehenden Halbgeraden liegen, wenn also z und w positive reelle Vielfache voneinander sind), was man am besten durch Übergang zum Betragsquadrat $(z + w)\overline{(z + w)}$ beweist.

Eine offene Kreisscheibe mit Radius ε um den Mittelpunkt w wird gegeben durch

$$U_\varepsilon(w) \;:=\; \{z \in \mathbf{C} \mid |z - w| < \varepsilon\} \quad ,$$

die ε–*Umgebung* von w. Im Fall $w \in \mathbf{R}$ ist $U_\varepsilon(w) \cap \mathbf{R} =]w - \varepsilon, w + \varepsilon[$ genau die reelle ε–Umgebung, die wir für die Konvergenz–Definition in $\mathbf{R}$ gebraucht haben. Obwohl $\mathbf{C}$ kein angeordneter Körper ist (in dem eine mit Addition und Multiplikation verträgliche Anordnung existiert), kann man also Konvergenz ganz analog wie in $\mathbf{R}$ definieren:

Definition 7.1 *Eine komplexe Zahlenfolge* $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *heißt ,,konvergent" gegen* $z := \lim z_n \in \mathbf{C}$, *wenn für alle positiven reellen* $\varepsilon > 0$ *fast alle* $z_n \in U_\varepsilon(z)$ *sind; ausführlicher: wenn ein* $N = N(\varepsilon)$ *existiert, so dass für alle* $n \geq N$ *gilt* $|z_n - z| < \varepsilon$.

Geometrisch oder rechnerisch überlegt man sich leicht, dass die Folge der $z_n = x_n + iy_n$ genau dann gegen $z = x+iy$ konvergiert, wenn die Realteile x_n gegen x und die Imaginärteile y_n gegen y konvergieren. Genauso das Cauchy–Kriterium: Die Folge konvergiert genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein N existiert, so dass $|z_n - z_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$. Und ganz entsprechend wie in $\mathbf{R}$ definiert man die Konvergenz unendlicher Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$, nämlich als Konvergenz der (Folge der endlichen) Partialsummen $p_n := \sum_{k=0}^{n} z_k$. Das Cauchy–Kriterium für unendliche Reihen lautet dann so:

Satz 7.1 *Die unendliche Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ *konvergiert in* $\mathbf{C}$ *genau dann, wenn es für alle* $\varepsilon > 0$ *ein* N *gibt, so dass für alle* $m > n \geq N$

$$\left|\sum_{k=n}^{m} z_k\right| \;<\; \varepsilon \qquad .$$

Wir wenden dieses Kriterium an, um zu zeigen, dass die unendliche Reihe in der folgenden Definition für alle $z \in \mathbf{C}$ konvergiert:

Definition 7.2 *Die ,,Exponentialfunktion"* $\exp : \mathbf{C} \to \mathbf{C} : z \mapsto \exp(z)$ *ist definiert durch*

$$\exp(z) \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \;=\; 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \ldots \qquad .$$

Es genügt natürlich, ein (beliebig großes reelles) $M > 0$ zu wählen und die Konvergenz simultan für alle z mit $|z| \leq M$ zu zeigen (also ,,gleichmäßige Konvergenz" in abgeschlossenen Kreisscheiben). Wir wenden dazu die Dreiecksungleichung auf die Partialsumme in Satz 7.1 an:

$$\left|\sum_{k=n}^{m} z_k\right| \;\leq\; \sum_{k=n}^{m} |z_k| \;=\; \sum_{k=n}^{m} \frac{|z|^k}{k!} \;\leq\; \sum_{k=n}^{m} \frac{M^k}{k!} \;<\; \frac{M^n}{n!}\left(1 + \frac{M}{n} + \frac{M^2}{n^2} + \ldots\right)$$

In der Klammer rechts steht eine geometrische Reihe, die z.B. < 2 wird, sobald $\frac{M}{n} < \frac{1}{2}$ ist, also sobald $n > 2M$ gewählt wird. Weil Fakultäten sehr viel schneller wachsen als alle Potenzen, dürfen wir außerdem für jedes $\varepsilon > 0$ den ersten Index N so groß wählen, dass $M^N/N! < \varepsilon/2$ und somit für alle $n \geq N$

$$\frac{M^n}{n!}\left(1 + \frac{M}{n} + \frac{M^2}{n^2} + \ldots\right) \;<\; \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2 \qquad .$$

Es ist klar, dass die Restriktion von exp auf die reelle Zahlengerade eine reellwertige Funktion ergibt, dass $\exp(0) = 1$ ist und für alle $x > 0$ alle Reihenglieder > 0 sind, also

$\exp(x) > 0$ erfüllt ist. Ebenso sieht man mit bloßem Auge, dass für positive reelle x die Exponentialfunktion streng monoton wächst – sogar schneller als jedes vorgegebene Polynom, wenn nur x hinreichend groß ist. Für feinere Eigenschaften brauchen wir das *Additionstheorem*

Satz 7.2 *Für alle* $z, w \in \mathbf{C}$ *ist* $\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$.

Der *Beweis* beruht einerseits auf dem binomischen Satz und andererseits auf einer geschickten Umordnung des Produkts der beiden unendlichen Reihen auf der rechten Seite. Dass so eine Umordnung erlaubt ist, folgt nicht einfach aus dem Kommutativgesetz der Addition, sondern erfordert eine Rechtfertigung, dass auch nach der Umordnung alles gegen den gleichen Grenzwert konvergiert wie vorher. Wir übergehen diesen Punkt, weil im wesentlichen nur ähnliche Ideen wie oben dabei eingehen, und konzentrieren uns auf den Rechentrick:

$$\begin{aligned}\exp(z+w) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+w)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} z^j w^{k-j} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{z^j w^{k-j}}{j!(k-j)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m,n \geq 0,\, m+n=k} \frac{z^m}{m!} \cdot \frac{w^n}{n!} \right) = \left(\sum_{m \geq 0} \frac{z^m}{m!} \right) \left(\sum_{n \geq 0} \frac{w^n}{n!} \right) = \exp(z) \cdot \exp(w)\end{aligned}$$

Das Additionstheorem hat eine ganze Reihe wichtiger **Folgerungen:**

1. Für alle $z \in \mathbf{C}$ ist $\exp(-z) = \exp(z)^{-1}$. Insbesondere hat die Exponentialfunktion keine Nullstelle.

2. Wegen $\exp(-x) = \exp(x)^{-1}$ ist die reelle Exponentialfunktion überall positiv und streng monoton wachsend, und es gilt $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$.

3. Setzt man

$$e := \exp(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \approx 2,71828\ldots \quad ,$$

so ergibt sich $\exp(n) = e^n$ und $\exp(\frac{1}{n}) = \sqrt[n]{e} = e^{1/n}$ (positive Wurzel) für alle ganzen $n \neq 0$, daher ist die Schreibweise $e^z := \exp(z)$ ebenso für alle komplexen z angemessen.

4. Die reelle Exponentialfunktion ist überall differenzierbar und erfüllt $\exp' = \exp$, denn

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} = e^x \left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{6} + \ldots + \frac{h^{n-1}}{n!} + \ldots \right)$$

hat für $h \to 0$ den Limes e^x , wie eine einfache Konvergenzüberlegung zeigt. Insbesondere ist exp eine stetige Funktion.

5. Als differenzierbare und streng monotone Funktion auf $\mathbf{R}$ besitzt exp eine differenzierbare Umkehrfunktion auf $\mathbf{R}_{>0}$, den positiven reellen Zahlen. Diese Umkehrfunktion wird „natürlicher Logarithmus" ln genannt. Nach den Differentiationsregeln gilt

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} , \quad \text{umgekehrt also} \quad \int \frac{dx}{x} = \ln(x) + C \quad .$$

6. Für komplexe z ist $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$. Für rein imaginäre Argumente ist darum

$$\overline{\exp(iy)} \;=\; \exp(-iy) \;=\; \exp(iy)^{-1} \;, \quad \text{also} \quad |\exp(iy)| \;=\; 1 \quad .$$

Unter Verwendung von $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ u.s.w. lässt sich die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion für rein imaginäre Argumente wie folgt nach Real– und Imaginärteil sortieren: Es ist $\exp(iy) = e^{iy} = c(y) + is(y)$ mit

$$\begin{aligned} c(y) &= 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} \pm \ldots = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} \\ s(y) &= y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} \pm \ldots = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

Die Funktionen c und s sind nichts anderes als Cosinus und Sinus, beides als Funktionen des Bogenmaßes, also der Kurvenlänge vom Punkt $1 \in \mathbf{C}$ zum Punkt e^{iy} auf der Einheitskreislinie gegen den Uhrzeigersinn. Vergessen wir einfach die übliche elementargeometrische Definition von Cosinus und Sinus und definieren wir

$$\cos(x) \;:=\; c(x) \qquad \text{und} \qquad \sin(x) \;:=\; s(x) \quad ,$$

dann können wir aus der „Eulerschen Identität"

$$e^{ix} \;=\; \cos(x) + i\sin(x)$$

bzw. aus den Reihendarstellungen alle wichtigen Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen ableiten:

Satz 7.3 *Für alle* $x, y \in \mathbf{R}$ *gilt*

1. $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ *(„trigonometrischer Pythagoras")*
2. $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ *und*
   $\sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)$ *(Additionstheoreme)*
3. $\cos(-x) = \cos(x)$, $\quad \sin(-x) = -\sin(x)$
4. $\cos'(x) = -\sin(x)$, $\quad \sin'(x) = \cos(x)$
5. *Für alle* $x \in]0,2]$ *gelten die Ungleichungen*

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos(x) < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \;, \qquad x - \frac{x^3}{6} < \sin(x) < x$$

Insbesondere ist $\sin(x) > 0$ *in* $]0,2]$.

6. *In diesem Intervall gibt es eine eindeutig bestimmt Nullstelle von* $\cos$ *, genannt* $\pi/2$ *.*

$$\begin{array}{llll} \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \ , & \cos(\pi) = -1 \ , & \cos(\frac{3\pi}{2}) = 0 \ , & \cos(2\pi) = 1 \\ \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \ , & \sin(\pi) = 0 \ , & \sin(\frac{3\pi}{2}) = -1 \ , & \cos(2\pi) = 0 \end{array}$$

7. $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$, $\quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$,
$\cos(x + \pi) = -\cos(x)$, $\quad \sin(x + \pi) = -\sin(x)$,
$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$, $\quad \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$

Ein paar Ideen für die zugehörigen *Beweise:* 1. folgt aus $|e^{ix}|^2 = 1$,
2. aus $e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy}$.
3. Die Reihenentwicklung von $\cos(x)$ besteht nur aus geraden x–Potenzen, für $\sin(x)$ nur aus ungeraden.
4. zeigt man ähnlich wie die Ableitung von exp mit Hilfe des Additionstheorems.
5. Im angegebenen Intervall ist

$$\frac{x^2}{5 \cdot 6} < 1 \quad \text{also} \quad \frac{x^4}{4!} > \frac{x^6}{6!} > \frac{x^8}{8!} > \dots \quad ,$$

somit bilden die Partialsummen der Cosinus–Reihe die Randpunkte einer Intervallschachtelung, welche $\cos(x)$ einschließen. Für $\sin(x)$ argumentiert man ähnlich.
6. cos ist im angegebenen Intervall streng monoton fallend, weil $\sin(x) > 0$ (Satz 4.2), und $\cos(0) = 1 > 0 > \cos(2)$. Zwischenwertsatz! Die speziellen Werte folgen aus $\cos(\pi/2) = 1$, dem trigonometrischen Pythagoras und dem Additionstheorem,
ebenso die Periodizität 7. □

Zum Schluss noch ein Spezialfall des Eulerschen Satzes, der gelegentlich als die *schönste Formel der Mathematik* bezeichnet wird.

Satz 7.4 $\quad e^{\pi i} = -1$

8 Noch mehr verwandte Funktionen

8.1 Potenzfunktionen und Logarithmen

Wir haben bereits gesehen, dass als reelle Funktion $\exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_{>0} : x \mapsto e^x$ surjektiv, streng monoton wachsend und differenzierbar ist mit differenzierbarer Umkehrfunktion $\ln : \mathbf{R}_{>0} \to \mathbf{R} : x \mapsto \ln(x)$ und deren erster Ableitung $x \mapsto \frac{1}{x}$. Das gibt uns die Möglichkeit, allgemeinere Potenzfunktionen zu definieren:

Definition 8.1 *Sei* $a > 0$ *reell. Dann heißt* $x \mapsto a^x := \exp(x \ln(a)) = e^{x \ln(a)}$
die ,,Potenzfunktion zur Basis" a .

Man überzeuge sich, dass diese Definition nicht im Widerspruch steht zu früheren Potenz–Definitionen: Wenn $x = n \in \mathbf{N}$ ist, haben wir in der Tat

$$a^n = e^{n \cdot \ln(a)} = e^{\ln(a)+\ln(a)+\ldots+\ln(a)} = e^{\ln(a)} \cdot e^{\ln(a)} \cdot \ldots \cdot e^{\ln(a)} = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$$

wie schon früher verwendet (Summen und Produkte jeweils mit n Gliedern). Auch $a^0 = 1$ und $a^{-n} = 1/a^n$ folgt aus den Eigenschaften der Exponentialfunktion. Einzig bei rationalen Potenzen ist Vorsicht geboten: Für $n \in \mathbf{N}$ ist

$$a^{\frac{1}{n}} \;=\; \sqrt[n]{a}$$

konsistent mit der üblichen Wurzeldefinition, liefert aber nur die reell positive Lösung der Gleichung $x^n = a$, nicht die übrigen komplexen Lösungen.

Man sollte stets im Auge behalten, dass $\ln(1) = 0$, $\ln(a) > 0$ für $a > 1$ und $\ln(a) < 0$ für $a < 1$ ist. Dann ist $1^x \equiv 1$, und ein Blick auf die Reihenentwicklung von exp zeigt, dass a^x für $x \to \infty$ schneller wächst als jedes Polynom, wenn $a > 1$; wenn allerdings $a < 1$, geht a^x für $x \to \infty$ schneller gegen 0 als jedes x^{-n}.

Direkt aus der Definition und den Eigenschaften von exp folgen die üblichen Rechenregeln für den Umgang mit Potenzen. Für $a, b > 0$ und alle $x, y \in \mathbf{R}$ gelten

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \quad \text{und} \quad (ab)^x = a^x \cdot b^x \quad .$$

In der zweiten Formel haben wir das *Additionstheorem für den Logarithmus* mitverwendet: $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, das direkt aus dem Additionstheorem für exp folgt. Aus der Kettenregel erhalten wir

$$(a^x)' \;=\; a^x \cdot \ln(a) \quad .$$

Man sieht daran, dass für $a > 0$, $a \neq 1$, auch die Funktion $x \mapsto a^x$ eine Umkehrfunktion besitzt, ebenfalls streng monoton und differenzierbar, nämlich

$$\log_a(y) \;:=\; \frac{\ln(y)}{\ln(a)} \qquad \text{mit Ableitung} \qquad \frac{1}{y\ln(a)} \quad ,$$

den *Logarithmus zur Basis* a. Am bekanntesten und in Technik und Naturwissenschaft am häufigsten verwendet ist der *Zehnerlogarithmus*, häufig einfach log geschrieben; in der Informatik ist mindestens ebenso wichtig der Logarithmus zur Basis 2, manchmal *Binärlogarithmus* $\mathrm{lb} := \log_2$ genannt. Natürlich ist $\log_e = \ln$, und für alle Logarithmen gilt

$$\log_a(xy) \;=\; \log_a(x) + \log_a(y) \qquad \text{und} \qquad \log_a(\frac{1}{x}) \;=\; -\log_a(x) \quad ,$$

Grundlage des Rechnens mit den – heute außer Gebrauch gekommenen – Instrumenten *Rechenschieber* und *Logarithmentafel*. Schließlich sollte man erwähnen, dass Logarithmen zwar beliebig große Werte annehmen, aber äußerst langsam wachsen:

Satz 8.1 *Sei* $\varepsilon > 0$ *(beliebig klein) und* $C > 0$ *(beliebig groß). Dann gibt es ein* $M > 0$*, so dass für alle* $x \geq M$

$$x^\varepsilon \ > \ C \cdot \ln(x) \qquad .$$

Zum *Beweis* benutze man beispielsweise die Äquivalenz

$$\frac{1}{C}\, x^\varepsilon > \ln x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exp(\frac{x^\varepsilon}{C}) > x$$

und beachte, dass in der Reihenentwicklung von $\exp$ beliebig hohe x–Potenzen vorkommen. □

Sehr wichtig: Alle Logarithmusfunktionen sind konstante Vielfache voneinander, wie man nicht nur an ihrer Definition sieht, sondern auch an

$$\log_b(x) \ = \ \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)} \quad .$$

Für alle natürlichen Zahlen $g > 1$ gibt $1 + [\log_g(x)]$ die Anzahl der Vorkommastellen in der g–adischen Ziffernentwicklung an.

8.2 Tangens und Arcusfunktionen

Aus der Trigonometrie sind außer Cosinus und Sinus noch *Tangens* und *Cotangens* bekannt als ,,Gegenkathete durch Ankathete" bzw. umgekehrt, als Funktionen einfacher definiert durch

$$\tan(x) \ := \ \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \text{und} \qquad \cot(x) \ := \ \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \ = \ \tan(x)^{-1}$$

an allen Stellen x , an denen cos bzw. sin nicht verschwinden. Ebenso wie cos und sin sind beide Funktionen periodisch, allerdings nicht mit Periode 2π , sondern bereits mit Periode π , d.h. für alle $x \in \mathbf{R}$ gilt

$$\tan(x + \pi) \ = \ \tan(x) \qquad \text{und} \qquad \cot(x + \pi) \ = \ \cot(x) \quad .$$

Beide sind *antisymmetrisch*, d.h. erfüllen $f(-x) = -f(x)$, und (natürlich außerhalb ihrer *Pole*, d.h. der Nullstellen ihrer Nenner) differenzierbar, nämlich mit

$$\tan'(x) \ = \ \frac{1}{\cos^2(x)} \qquad \text{und} \qquad \cot'(x) \ = \ -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

nach Quotientenregel und trigonometrischen Pythagoras.

An diesen Formeln sieht man bereits (vgl. Satz 4.2), dass beide Funktionen streng monoton sind, allerdings nur in Intervallen wie z.B. $]0, \pi[$ für den Cotangens, welche keinen Pol enthalten. Ganz entsprechend sind auch geeignete Restriktionen von Sinus und Cosinus streng monoton, z.B. in den Intervallen $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ bzw. $]0,\pi[$. In solchen Teilintervallen besitzen alle diese Funktionen differenzierbare Umkehrfunktionen, die *Arcusfunktionen*

$$\arcsin \quad , \quad \arccos \quad , \quad \arctan \quad , \quad \operatorname{arccot}$$

mit den Ableitungen – vgl. Regel **6** in §4 – in geeigneten x–Intervallen

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \;, \quad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \;, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \;.$$

8.3 Nochmal Integrieren

Durch den mittlerweile vergrößerten Zoo an Funktionen können wir jetzt ein paar offengebliebene Fragen beantworten. Im Anschluss an Satz 5.7 haben wir die Länge des Viertelkreises als das folgende Integral bestimmt, dessen Stammfunktion wir mittlerweile kennen:

$$r\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \;=\; r(\arcsin(1)-\arcsin(0)) \;=\; \frac{r\pi}{2}$$

Genauso können wir jetzt rechtfertigen, dass für die Funktionen $c(y), s(y)$, die im vorigen Paragraphen ,,vom Himmel gefallen" sind, das Argument y tatsächlich die Rolle des Winkels spielt, gemessen im Bogenmaß: Im Intervall $[0,2]$ fällt c und wächst s streng monoton, beide erfüllen den trigonometrischen Pythagoras, also durchlaufen die Punkte $(c(y),s(y))$ den Einheitskreis vom Punkt $(1,0)$ an gegen den Uhrzeigersinn. Die Länge des durchlaufenen Weges vom Punkt $(1,0)$ bis zum Punkt $(c(y),s(y))=(x,\sqrt{1-x^2})$ ist also nach Satz 5.7 (jetzt mit $f(t)=\sqrt{1-t^2} \Rightarrow f'(t)=-t(1-t^2)^{-1/2}$)

$$\int_x^1 \sqrt{1+f'(t)^2}dt \;=\; \int_x^1 \sqrt{1+\frac{t^2}{1-t^2}}dt \;=\; \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \;=\; -\arccos(1)+\arccos(x) \;=\; y$$

wie vorausgesagt. Sehr wichtig: *Beim Differenzieren und Integrieren im Zusammenhang mit trigonometrischen Funktionen sind diese unbedingt im Bogenmaß, niemals im Gradmaß, zu verwenden!*

Ein fundamentaler Unterschied zwischen Differenzieren und Integrieren elementarer Funktionen besteht darin, dass Ableitungen stets wieder durch rationale Operationen oder Zusammensetzen elementarer Funktionen geschrieben werden können. Für das Aufsuchen von Stammfunktionen ist das nicht länger richtig, z.B. haben e^{x^2} oder $\sqrt{x^3-1}$ zwar (außerhalb von $x=1$ beliebig oft differenzierbare) Stammfunktionen, diese lassen sich aber nicht mit Hilfe unseres bisher aufgebauten Zoos von Funktionen schreiben. Selbst wenn elementare Stammfunktionen existieren, sind diese oft schwer zu finden, und man tut gut daran, sich ein Repertoire an Tricks zur Behandlung von Integralen anzueignen. Hier ein paar Beispiele:

1. Nach Satz 5.4 ist

$$\int \ln(x)dx = \int 1\cdot\ln(x)dx = x\cdot\ln(x) - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln(x)-x+C \quad .$$

2. Sucht man die Stammfunktion von $\sin^2$, so kann man entweder Additionstheorem und trigonometrischen Pythagoras einsetzen, um zunächst die Funktion umzuwandeln in

$$\sin^2(x) = -\cos(2x) + \cos^2(x) = -\cos(2x) + 1 - \sin^2(x) \quad \Longrightarrow \quad \sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$

und dann Additions– und Substitutionsregel anzuwenden:

$$\int \sin^2(x)dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\int \cos(2x)dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) + C = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin(x)\cos(x) + C$$

Eine zweite Möglichkeit besteht darin, zunächst partielle Integration anzuwenden

$$\int \sin^2(x)dx = -\sin(x)\cos(x) + \int \cos^2(x)dx = -\sin(x)\cos(x) + \int (1 - \sin^2(x))dx$$

und $\int \sin^2(x)dx$ auf die linke Seite zu schaffen:

$$2\int \sin^2(x)dx = -\sin(x)\cos(x) + \int 1dx = -\sin(x)\cos(x) + x + C$$

3. Die Integration rationaler Funktionen hat in klassischen Analysis–Vorlesungen eine große Rolle gespielt; durch den Einsatz immer besserer Mathematik–Software wie Maple oder Mathematica hat das Einüben solcher Techniken mittlerweile sein Bedeutung eingebüßt (auch wenn sich das noch nicht überall herumgesprochen hat). Darum sei nur an einem Beispiel vorgeführt, welche Ideen beim Suchen von Stammfunktionen eingehen – natürlich auch bei der Konstruktion der zugehörigen Software. Also: Wie integriert man die Funktion $f(x) = (x^3 + x^2 + x + 1)/(x^2 + 4)$?

a) Vereinfachung durch Polynomdivision:

$$\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + 4} = x + 1 - \frac{3x + 3}{x^2 + 4} \quad ,$$

Stammfunktion ist also $\frac{x^2}{2} + x - \int \frac{3x+3}{x^2+4}dx$.

b) Ein Spezialfall der Substitutionsregel ist die Verwendung von *logarithmischen Ableitungen*: Für stetig differenzierbare Funktionen f ohne Nullstellen ist

$$(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad , \qquad \text{also}$$

$$\int \frac{3x + 3}{x^2 + 4}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2 + 4}dx + \int \frac{3}{x^2 + 4}dx = \frac{3}{2}\ln(x^2 + 4) + \int \frac{3}{x^2 + 4}dx \ .$$

c) Schließlich nochmals die Substitutionsregel mit $x = 2y$, $dx = 2dy$ und unserem Repertoire an elementaren Stammfunktionen:

$$\int \frac{3}{x^2 + 4}dx = 3\int \frac{2dy}{4y^2 + 4} = \frac{3}{2}\int \frac{dy}{y^2 + 1} = \frac{3}{2}\arctan(y) + C = \frac{3}{2}\arctan(\frac{x}{2}) + C$$

d) Was ist zu tun, wenn der Nenner in mehrere Faktoren zerfällt? Hier wird *Partialbruchzerlegung* der rationalen Funktion verwendet, ganz analog zum Vorgehen bei rationalen Zahlen in Satz 1.3. Auch hier nur ein einfaches Beispiel:

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \int \frac{dx}{(x+1)(x-1)} = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \frac{1}{2}(\ln|x-1| - \ln|x+1|) + C$$

Warum eigentlich Betragsstriche im Logarithmus? Ganz einfach: Wenn t reell negativ ist, wende man die Sustitutionsregel mit $x := -t > 0$ an und erhält

$$\int \frac{dt}{t} = \int \frac{dx}{x} = \ln(x) = \ln|t| \quad .$$

8.4 Nachtrag: Sinus in Schulversion

In der Schule, zumal in der Sek I, wird man natürlich niemals Sinus und Cosinus auf dem Weg über die komplexe Exponentialfunktion einführen, sondern anhand rechtwinkliger Dreiecke als

$$\sin(h) := \quad \text{Länge der Gegenkathete : Länge der Hypotenuse} ,$$

oder auch als y–Koordinate des Punktes am Einheitskreis, wenn h den Winkel zur positiven x–Achse bezeichnet; nach wie vor messen wir h nicht in Grad, sondern im Bogenmaß, d.h. als Bogenlänge am Einheitskreis. Wenn man so vorgeht, ist das Differenzieren der trigonometrischen Funktionen schwieriger als mit Hilfe unendlicher Reihen; die nötigen Ideen hierzu sollen hier kurz nachgetragen werden.

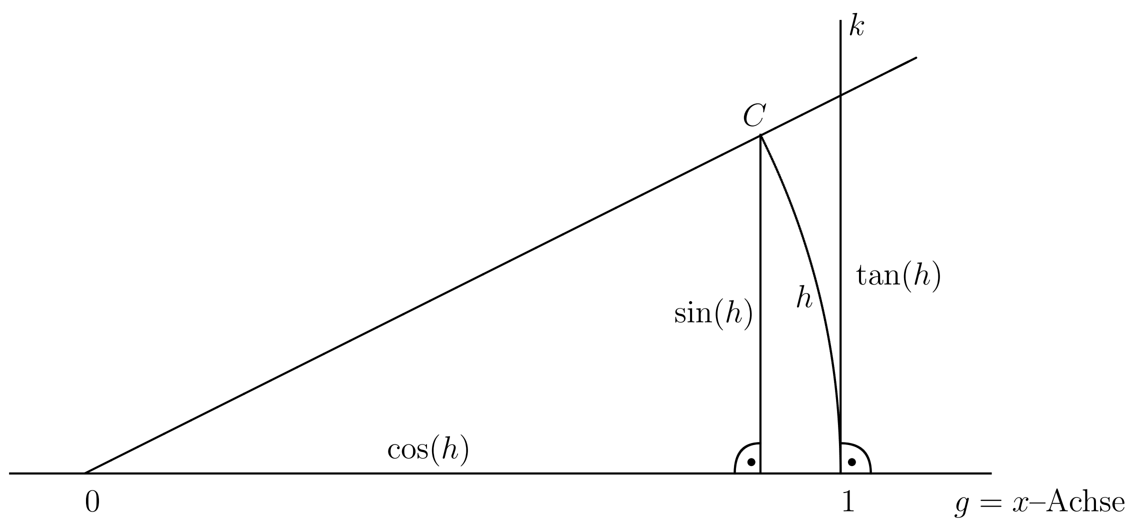

Abbildung 3: Sinus–Abschätzungen

Satz 8.2 $\quad \sin'(x) = \cos(x) \quad , \qquad \cos'(x) = -\sin(x)$

Beweis. **1.** Wenn man die Ableitung des Sinus kennt, kann man z.B. mit Hilfe der beiden letzten Formeln aus Satz 7.3.7 und der Kettenregel die Ableitung des Cosinus ermitteln. Wir beschränken uns also auf die Bestimmung von $\sin'$. Aus dem Additionstheorem 7.3.2 (kann man elementargeometrisch beweisen, also ohne Kenntnis von $\exp$) erhalten wir

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h} \;=$$

$$\cos(x)\cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} \;+\; \sin(x)\cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} \quad .$$

Zu zeigen ist also, dass beide Limites in der zweiten Zeile existieren, dass der erste $= 1$ und der zweite $= 0$ ist.
2. In Abbildung 3 ist ein Teil des Kreises mit Radius 1 um den Punkt $0 \in g$ (x–Achse) mit Bogenlänge $0 < h < \pi/2$ zu sehen. Dieser endet im Punkt C. Seine kürzeste Verbindung zur Geraden g hat die Länge $\sin(h)$, sie ist offenbar $\leq h$. Die Länge dieses Kreisbogens ist (vgl. die Überlegungen in Satz 5.7) die kleinste obere Schranke aller Längen von Polygonzügen, die man dem Kreisbogen vom Punkt 1 zum Punkt C einbeschreiben kann. Die Längen all dieser Strecken werden vergrößert, wenn man sie von 0 auf die Gerade k projiziert; mit k bezeichnen wir das Lot auf g im Punkt 1 . Deshalb gilt sicher $h \leq \tan(h)$. Mit $\tan(h) = \sin(h)/\cos(h)$ gilt haben wir darum

$$\frac{\sin(h)}{h} \;\leq\; 1 \;\leq\; \frac{\sin(h)}{h\cos(h)} \quad , \qquad \text{also} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} \;=\; 1$$

wegen $\lim_{h\to 0}\cos(h) = 1$. Dass wir hier nur positive h betrachtet haben, rechtfertigt man durch $\sin(-h)/(-h) = \sin(h)/h$.
3. Für den zweiten Limes sollte man so etwas wie den Satz 7.3.5 beweisen, allerdings nun ohne Verwendung unendlicher Reihen. Wir setzen wieder eine Konsequenz aus dem (elementargeometrisch beweisbaren) Additionstheorem ein:

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) \quad\Longrightarrow\quad \cos(h) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right) \geq 1 - \frac{h^2}{2} \;,$$

wobei wir wieder unsere Sinus–Abschätzung aus Teil **2** des Beweises verwenden. Für alle $0 < h < \pi/2$ ist damit klar, dass

$$0 < \frac{1-\cos(h)}{h} \leq \frac{h}{2} \quad , \qquad \text{also} \quad \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos(h)}{h} \;=\; 0 \quad ,$$

denn für negative h gelten entsprechende Ungleichungen in der anderen Richtung. □

Index