J. Wolfart WiSe 2015/16

Funktionentheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen

Hausaufgaben und Informationen

Jede Woche wird es zwei Hausaufgaben geben, im ganzen Semester also knapp 30. Jede Aufgabe wird mit bis zu 4 Punkten bewertet, und für die Zulassung zur Klausur brauchen Sie 50 Hausaufgabenpunkte. Es zählen nur selbständig verfasste Lösungen! Die Klausur wird mit maximal 100 Punkten bewertet (46 davon genügen zum Bestehen), und für je 4 Hausaufgabenpunkte, welche die 50 Pflichtpunkte übersteigen, bekommen Sie einen Klausurpunkt als Bonus geschenkt.

1. Seien $r > 0$ reell und $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad - bc \neq 0$. Zeigen Sie, dass die Bedingung

$$\left|\frac{az+b}{cz+d}\right| < r \qquad\qquad (cz + d \neq 0)$$

an $z \in \mathbb{C}$ das Innere oder das Äußere eines Kreises oder eine Halbebene in $\mathbb{C}$ beschreibt.

2. $(z_n)_{n\geq 0}$ sei eine Folge komplexer Zahlen. Beweisen Sie: Wenn die reelle Betragsreihe $\sum_{n\geq 0} |z_n|$ konvergiert, dann auch $\sum_{n\geq 0} z_n$. Stimmt auch die Umkehrung dieser Aussage?
Zusatz: Begründen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, z^n$$

für $|z| < 1$ konvergiert und für $|z| > 1$ divergiert.

3. x und y bezeichnen (wie immer) Real– und Imaginärteil von $z \in \mathbb{C}$. Ermitteln Sie mit Hilfe Ihrer Kenntnisse aus Ana I und II, für welche Wahl des Vorzeichens die Funktion

$$f(z) := e^x \cos(y) \pm i\, e^x \sin(y)$$

holomorph in $\mathbb{C}$ ist.

4. $D \neq \emptyset$ sei eine offene Menge in $\mathbb{C}$. Beweisen Sie: D ist genau dann zusammenhängend, wenn D wegzusammenhängend ist.

Musterlösung zu Aufgabe 4

1. Sei D offen und zusammenhängend. Um zu zeigen, dass D auch wegzusammenhängend ist, wählen wir ein beliebiges $z_0 \in D$ (nichtleer!) und betrachten die Untermenge $D_1 \subset D$ aller z_1, die man durch einen von z_0 nach z_1 in D verlaufenden Weg γ verbinden kann. D_1 ist nichtleer, denn $z_0 \in D_1$ (man nehme den trivialen Weg $\gamma(s) \equiv z_0$) und offen, denn mit jedem $z_1 \in D_1$ gehört auch eine ε–Umgebung U von z_1 zu D (offen!), und wir können z_0 auch mit jedem $z_2 \in U$ durch einen Weg γ' in D verbinden: Man verlängere γ einfach durch die Strecke von z_1 nach z_2, die ja ganz in $U \subset D$ verläuft.

Genauso argumentiert man, um einzusehen, dass die Menge aller $z_2 \in D$, zu denen *kein* Weg von z_0 nach z_2 innerhalb von D führt, eine offene Menge $D_2 \subset D$ ist: Andernfalls gäbe es eine ε–Umgebung $U \subset D$ von z_2 und ein $z_1 \in U$ sowie einen Weg γ von z_0 nach z_1, der ganz in D verläuft. Diesen könnte man durch Anhängen der Verbindungsstrecke von z_1 nach z_2 zu einem Weg in D von z_0 nach z_2 machen, Widerspruch!

Also ist $D = D_1 \cup D_2$ eine disjunkte Vereinigung offener Mengen. Da D aber als zusammenhängend vorausgesetzt war und $D_1 \neq \emptyset$, muss $D_2 = \emptyset$ sein, daher ist $D = D_1$ wegzusammenhängend: Für je zwei Punkte $z_1, z_2 \in D = D_1$ gibt es nach Definition von D_1 Verbindungswege γ_1, γ_2 in D von z_0 nach z_1 bzw. z_2. Um einen Verbindungsweg von z_1 nach z_2 in D zu finden, durchlaufe man γ_1 in umgekehrter Richtung und anschließend γ_2 (und das kann man durch geeignete Parameterdarstellungen auch noch formalisieren).

2. Nun sei D offen und wegzusammenhängend. Wäre D unzusammenhängend, so hätten wir eine disjunkte Zerlegung $D = D_1 \cup D_2$ in nichtleere offene Teilmengen. Wir könnten also $z_1 \in D_1$ und $z_2 \in D_2$ finden sowie einen Weg γ von z_1 nach z_2, der ganz in D verläuft (wegzusammenhängend!). γ ist aber eine stetige Abbildung

$$[0,1] \to D \qquad \text{mit} \qquad \gamma(0) = z_1 \ , \quad \gamma(1) = z_2$$

und $[0,1]$ wäre somit die disjunkte Vereinigung der beiden nichtleeren Mengen $\gamma^{-1}(D_1)$ und $\gamma^{-1}(D_2)$. Als Urbilder offener Mengen unter einer stetigen Abbildung sind beide Mengen offen in $[0,1]$, dieses Intervall wäre also unzusammenhängend, Widerspruch!

Sollte der/die geneigte Leser/in noch nie davon gehört haben, dass reelle Intervalle zusammenhängend sind oder dass Urbilder offener Mengen unter stetigen Abbildungen offen sind, kann man auch elementarer argumentieren: Man betrachte z.B. den Punkt $s_0 := \sup \gamma^{-1}(D_1)$ im Intervall $[0,1]$ und überlege sich, dass s_0 weder zu $\gamma^{-1}(D_1)$ noch zu $\gamma^{-1}(D_2)$ gehören kann.

5. Der Konvergenzradius R der Potenzreihe $\sum a_n z^n$ sei wie in der Vorlesung definiert (Skriptum S. 10). Zeigen Sie, dass diese Definition übereinstimmt mit $R = (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$ und – falls alle $a_n \neq 0$ sind und dieser Limes existiert – mit $R = \lim |a_n/a_{n+1}|$.
Sei $a \in \mathbb{C}$; berechnen Sie die Konvergenzradien der Potenzreihen

$$\sum a^n z^n \quad , \qquad \sum a^{n^2} z^n \quad , \qquad \sum z^{n!} \quad .$$

6. Beweisen Sie die Quotientenregel für holomorphe Funktionen (Nenner $\neq 0$, natürlich). Wenn Sie wollen, dürfen Sie dabei die Gültigkeit der Produktregel und/oder der Kettenregel voraussetzen.

Die Lösungen der Aufgaben **5** und **6** sind vor der Vorlesung am 4.11. abzugeben.

Noch eine Bonusregelung: Hausaufgabenpunkte können Sie zusätzlich durch aktive Mitarbeit in den Tutorien erwerben, z.B. durch gutes Vorrechnen Ihrer Übungsaufgaben.

7. Sei $\mathbb{C}^*$ die Gauß'sche Zahlenebene ohne den Nullpunkt. Zeigen Sie, dass die Möbiustransformation $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^* : z \mapsto \frac{1}{z}$ die Kreise in der Gauß'schen Ebene in Kreise oder Geraden abbildet. Finden Sie heraus, unter welchen Bedingungen Geraden entstehen! Tipp: Überlegen Sie sich zunächst, dass Kreise in $\mathbb{C}$ durch Gleichungen vom Typ

$$a|z|^2 + bz + \overline{b}\overline{z} + c \;=\; 0 \quad \text{mit} \quad a, c \in \mathbb{R}\,,\; a \neq 0\,,\; b \in \mathbb{C}$$

beschrieben werden; und wie sehen Geradengleichungen aus?

8. f sei in einer Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}$ holomorph, f' sei stetig (später werden wir einsehen, dass diese Voraussetzung automatisch erfüllt ist) mit $f'(z_0) \neq 0$. Zeigen Sie, dass in einer Umgebung von $f(z_0)$ eine holomorphe Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ von f existiert mit der Eigenschaft $g'(f(z)) = 1/(f'(z))$. Sie dürfen den Satz über die Umkehrung stetig differenzierbarer Abbildungen im $\mathbb{R}^2$ verwenden!

Die Lösungen der Aufgaben **7** und **8** sind vor der Vorlesung am 11.11. abzugeben.

Musterlösung zu Aufgabe 7

Aus der Geometrie dürfte bekannt sein, dass Kreise im $\mathbb{R}^2$ durch Gleichungen

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + x_0^2 + y_0^2$$

beschrieben werden; mit

$$z = x + iy\,, \quad |z|^2 = x^2 + y^2\,, \quad a = 1\,, \quad c = x_0^2 + y_0^2 - r^2\,, \quad b = -x_0 + iy_0$$

erhält man also gerade die in der Aufgabe angegebene Form der Kreisgleichung

$$a|z|^2 + bz + \overline{b}\overline{z} + c \;=\; 0 \quad \text{mit} \quad a, c \in \mathbb{R}\,, \quad a \neq 0\,, \quad b \in \mathbb{C}\,.$$

Geradengleichungen entstehen entsprechend mit $a = 0$ und $b \neq 0$. Ersetzt man in dieser Gleichung nun z durch $1/w$ und multipliziert mit $|w|^2 = w\overline{w}$, so ergibt sich

$$a + b\overline{w} + \overline{b}w + c|w|^2 = 0\,,$$

was im allgemeinen wieder eine Kreisgleichung ist – nur sind jetzt die Rollen von a und c vertauscht und b ist durch $\overline{b}$ zu ersetzen. Allerdings erhält man im Fall $c = 0$ keinen Kreis, sondern nur eine Gerade; man beachte dabei, dass nicht gleichzeitig $b = 0$ sein kann, da $a|z|^2 = 0$ nur einen Punkt beschreibt an Stelle eines Kreises.

Geometrisch ist das Ergebnis sehr einleuchtend: Die Transformation $z \mapsto w = \frac{1}{z}$ bildet den Kreis in eine Gerade ab, wenn die Kreislinie den Punkt $z = 0$ enthält; klar, dass dann die Bildpunkte unter der Transformation nicht beschränkt sein können.

Was passiert eigentlich mit Geraden $bz + \overline{b}\overline{z} + c = 0$ unter der Möbiustransformation $z \mapsto 1/z$? (Gehört zwar nicht zur Aufgabe, ist aber aufschlussreich:) Die gleichen Rechnungen wie oben ergeben eine Gleichung

$$b\overline{w} + \overline{b}w + c|w|^2 = 0\,,$$

und das beschreibt

- einen Kreis, der durch 0 verläuft, wenn $c \neq 0$,
- eine Gerade, wenn $c = 0$, also wenn die Ausgangsgerade auch schon durch 0 verläuft.

In einigen Wochen werden wir sehen, dass nicht nur unsere spezielle Transformation, sondern alle Möbiustransformationen die Menge *Kreise und Geraden* in die Menge *Kreise und Geraden* überführen.

9. Seien $a, b \in \mathbb{C}$ mit $|a| > |b|$. Zeigen Sie, dass die Möbiustransformation

$$z \;\mapsto\; \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}$$

eine biholomorphe Abbildung der Einheitskreisscheibe Δ in sich definiert. Zeigen Sie ferner, dass alle Möbiustransformationen dieses Typs eine Gruppe bilden, welche transitiv auf Δ operiert.

10. Mit „ln" sei die reelle natürliche Logarithmusfunktion $\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass die *aufgeschlitzte Ebene* $\{w \in \mathbb{C} \mid w \notin \mathbb{R}_{\leq 0}\}$ durch

$$w \;\mapsto\; \ln(|w|) \,+\, i \arg(w)$$

biholomorph auf den Streifen $\{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$ abgebildet wird (natürlich ist das Argument von w im richtigen Intervall zu wählen!). Umkehrabbildung?

11. γ bezeichne den Weg $[0,1] \to \mathbb{C} \;:\; t \mapsto \exp(2\pi i t)$. Berechnen Sie die Integrale $\int_\gamma f(z)dz$ für die Funktionen

$$f(z) \;:=\; \sin(z^2)\,, \quad \sin(\frac{1}{z})\,, \quad \cos(\frac{1}{z})\,, \quad \frac{2}{2z-z^2} \quad .$$

Tipp: Warum dürfen Sie die Reihen gliedweise integrieren?

12. Sei $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Finden Sie eine biholomorphe Abbildung des Winkelbereichs $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 0\,,\, -\frac{\pi}{n} < \arg(z) < \frac{\pi}{n}\}$ auf die aufgeschlitzte Ebene $\{w \in \mathbb{C} \mid w \notin \mathbb{R}_{\leq 0}\}$. Beschreiben Sie die Umkehrabbildung mit Hilfe von $\exp$ und der in Aufgabe 10 gefundenen Abbildung.

Die Lösungen der Aufgaben **11** und **12** sind vor der Vorlesung am 25.11. abzugeben.

Musterlösung zu Aufgabe 10

Dass die fragliche Abbildung bijektiv ist, sieht man mit bloßem Auge. Da sie bereits in Real– und Imaginärteil aufgespalten ist, könnte man mit $u := \operatorname{Re}(w)$, $v := \operatorname{Im}(w)$ die Holomorphie mit Hilfe der Cauchy–Riemannschen Gleichungen überprüfen. Das ist leider lästig, weil die Definition von $\arg(w)$ mittels $\arctan(\frac{v}{u})$ Fallunterscheidungen erfordert. Viel einfacher ist es, mit der Zusatzfrage zu beginnen: Die Umkehrabbildung ist

$$w = \exp(z) = \exp(x+iy) = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) \quad \text{mit} \quad |w| = e^x\,, \quad \arg(w) = y\,,$$

siehe Satz 5.14 im Skriptum. Dass die Abbildung $f : z \mapsto w$ im angegebenen Streifen nicht nur bijektiv, sondern sogar biholomorph ist, folgt aus Aufgabe **8**, denn für alle z ist bekanntlich $f'(z) \neq 0$. Die gefragte Abbildung $g(w) = x + iy = \ln(|w|) + i\arg(w)$ erfüllt demnach

$$g'(w) = \frac{1}{f'(z)} = \frac{1}{\exp(z)} = \frac{1}{w} \quad .$$

g wird darum als *komplexe Logarithmusfunktion* bezeichnet, genauer als *Hauptzweig* der komplexen Logarithmusfunktion, denn man könnte genauso gut stattdessen $g(z) + 2\pi ik$ für ein beliebiges $k \in \mathbb{Z}$ als Umkehrfunktion von exp nehmen (natürlich mit einem anderen Bildstreifen) oder – noch allgemeiner – wir nehmen wie in Satz 5.14 ein beliebiges reelles y_0 und schlitzen die Ebene $\mathbb{C}$ dadurch auf, dass wir die Halbgerade $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot \exp(iy_0)$ entfernen und einen anderen *Zweig* von $\ln$ als

$$g : \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot \exp(iy_0)) \to \mathbb{C} \ : \ w \mapsto \ln(|w|) + i\arg(w) \quad \text{mit} \quad y_0 < \arg(w) < y_0 + 2\pi$$

definieren. Wenn y_0 kein ungerades Vielfaches von π ist, haben wir nun sogar eine Logarithmusfunktion auf den negativen reellen Zahlen! Nachteil: Weil sich die komplexe Logarithmusfunktion nicht als holomorphe Funktion auf ganz $\mathbb{C}^*$ definieren lässt, gilt das Additionstheorem $\ln(w_1 w_2) = \ln(w_1) + \ln(w_2)$ nicht uneingeschränkt (Beispiel?).

13. Zeigen Sie, dass die Funktion $\exp(\frac{1}{z^2})$ in jeder punktierten Kreisscheibe $B_r(0) \setminus \{0\}$ alle Werte $w \in \mathbb{C}^*$ unendlich oft annimmt.

14. Die Funktion $\sin(\frac{1}{1+z^4})$ ist in einer Umgebung von 0 holomorph, besitzt also in $z_0 = 0$ eine Potenzreihenentwicklung. Ermitteln Sie ihren Konvergenzradius! Tipp: Besser nicht versuchen, die Potenzreihenentwicklung zu bestimmen, um die üblichen Konvergenzradiusformeln anzuwenden, sondern lieber über das Definitionsgebiet der Funktion nachdenken!

Die Lösungen der Aufgaben **13** und **14** sind vor der Vorlesung am 2.12. abzugeben.

15. f sei holomorph auf dem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ und $\operatorname{Re}(f)$ besitze in $z_0 \in D$ ein lokales Maximum. Beweisen Sie, dass f eine konstante Funktion ist.

16. f sei in einer Umgebung des Nullpunkts holomorph mit einer einfachen Nullstelle in 0, also einer Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots \quad , \quad a_1 \neq 0 \quad .$$

Aus Aufgabe **8** wissen wir, dass in einer (möglicherweise kleineren) Umgebung von 0 eine holomorphe Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ existiert. Bestimmen Sie die ersten drei Glieder der Potenzreihenentwicklung von g in 0.

Die Lösungen der Aufgaben **15** und **16** sind vor der Vorlesung am 9.12. abzugeben.

Musterlösung zu Aufgabe 13

Jede Umgebung von 0 enthält eine offene Kreisscheibe $B_r(0)$, $r > 0$, und es ist

$$z \in B_r(0) \setminus \{0\} \qquad \Leftrightarrow \qquad |w| > \frac{1}{r^2} \quad \text{für} \quad w := \frac{1}{z^2} \quad .$$

Aus Satz 5.14 des Skriptums wissen wir, dass wegen $\exp(x+iy) = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$ jeder Streifen $y_0 \leq \mathrm{Im}\,(w) < y_0 + 2\pi$ bijektiv durch $\exp$ auf $\mathbb{C}^*$ abgebildet wird, und es gibt außerhalb des Kreises mit Radius $\frac{1}{r^2}$ unendlich viele solcher Streifen parallel zur reellen Achse. $\exp(w)$ nimmt dort also jeden Wert $\neq 0$ unendlich oft an.

Das Resultat ist ein Spezialfall des *großen Satzes von Picard*, dass in jeder Umgebung einer wesentlichen Singularität der holomorphen Funktion f jeder Wert mit höchstens einer Ausnahme unendlich oft angenommen wird – im Beispiel von Aufgabe 13 ist 0 also diese Ausnahme. In der Vorlesung beweisen wir diesen Satz allerdings nur in Billig–Version als *Satz von Casorati–Weierstrass*.

(Korrigiert am 9.12. nach freundlichem Hinweis von Herrn Appel.)

17. Für alle $w \in \mathbb{C}$, $w \notin \mathbb{R}_{\leq 0}$ und alle $z \in \mathbb{C}$ lässt sich die allgemeine Potenz w^z definieren als $:= \exp(z\ln(w))$, wenn wir unter $\ln$ den Hauptzweig des Logarithmus verstehen (s. Aufg. **10** bzw. die Musterlösung dazu). Beweisen Sie, dass mit dieser Definition die unendliche Reihe

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-z}$$

in der Halbebene $x = \mathrm{Re}\,(z) > 1$ normal konvergiert.

18. $f : \Delta \to \Delta$ sei holomorph in der offenen Einheitskreisscheibe mit Werten $|f(z)| < 1$ und $f(0) = 0$. Beweisen Sie

$$|f(z)| \;\leq\; |z| \qquad \text{für alle} \quad z \in \Delta$$

und noch mehr: Wenn ein $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq 0$, existiert mit $|f(z_0)| = |z_0|$, dann kann f nur von der Form

$$f(z) \;=\; \lambda \cdot z \qquad \text{sein mit} \quad |\lambda| = 1 \quad .$$

Tipps: Eigenschaften der Funktion $z \mapsto f(z)/z$ untersuchen: Holomorphie, Betragsmaximum auf der Kreislinie $|z| = 1 - \varepsilon$ und in Δ bzw. (für die Zusatzfrage) in z_0 ?

Die Lösungen der Aufgaben **17** und **18** sind vor der Vorlesung am 16.12. abzugeben.

Was Sie schon immer über die Klausur wissen wollten:

Zeit und Ort: Die Klausur wird geschrieben am **Mittwoch, 17. Februar 2016, von 11.30 bis 12.30 Uhr im Hörsaal III**, die Nachklausur dann am **Mittwoch, 6.4.2016 von 11.30 bis 12.30 Uhr im H III** (nicht verwechseln mit H3 !)

Sie dürfen die Nachklausur als Erstversuch nutzen, ich werde allerdings keine Nach–Nach–Klausur schreiben. In Zweifelsfällen erkundigen Sie sich bei Fr. Mrozik bzw. Herrn Dr. Madani, ob Sie zur Klausur zugelassen sind. Eine besondere **Anmeldung** zur Klausur ist nicht erforderlich; Sie sind automatisch (und unwiderruflich) angemeldet, wenn Sie Ihre Klausuraufgaben in Empfang genommen haben.

Ich hoffe, die **Ergebnisse** der Korrektur am Abend des Freitag, 19.2., **bekanntgeben** zu können (Zimmertür Raum 205 der Robert–Mayer–Str. 6–8 und Homepage, anonymisiert per Matrikelnummern – soweit Sie dagegen nicht Einspruch einlegen). Klausureinsicht gibt es dann am **Mittwoch, 24.2., von 14.15 bis 16 Uhr** bei mir **im Raum 205 der Robert–Mayer–Str. 6–8**. L3–Leute: Dort kann ich auch Modulzettel unterschreiben und stempeln; Vordrucke zur Klausureinsicht mitbringen, nicht mit der Klausur abgeben!

Sitzordnung und Spielregeln: (Gelten entsprechend auch für die Nachklausur) Jede zweite Reihe bleibt frei, zwischen Ihnen und Ihren nächsten Nachbarn sind mindestens drei Plätze frei zu halten.

Verboten ist die Verwendung von Mobiltelefonen, Taschenrechnern, Laptops, Büchern und Skripten. Am besten gar nicht erst mitbringen! Wenn Sie den Tag nicht ohne Ihr Handy verbringen können, dann dieses ausschalten und tief in eine verschlossene Tasche versenken. Jeder Betrugsversuch hat Ausschluss aus der Klausur und Note 6 zur Folge. Jeder Teilnehmer muss bis zum Ende der Klausur auf seinem Platz bleiben, die Klausur wird um 12.30 Uhr am Platz eingesammelt. Toilettenbesuch nur einzeln und unter Zurücklassung allen Materials.

Erlaubt ist ein eigenhändig handschriftlich hergestellter DIN A4 –Spickzettel, beidseitig beschrieben (keine Kopie!).

Mitzubringen sind mindestens zwei funktionsfähige Stifte als Schreibzeug sowie ausreichend Papier, ebenso Personalausweis oder Goethecard. Diese sichtbar auf den Tisch legen!

Klausurstil und Bewertung: Die Klausur wird aus vier Aufgaben bestehen, jede davon bringt bei komplett richtiger Lösung 25 Klausurpunkte. In der ersten Aufgabe sind nur die Ergebnisse anzugeben, und nur diese zählen, Rechenweg egal. Also einfach Resultat auf das Blatt eintragen, fertig. Aufgabe **2** ist eine *multiple–choice*–Aufgabe, in der Sie für neun Behauptungen entscheiden müssen, ob diese richtig oder falsch sind. Aufgaben **3** und **4** erfordern kleine Beweise; diese auf ein Extrablatt schreiben; auf alle Blätter Ihren Namen!!

Bis zu 100 Klausurpunkte können in der Klausur erreicht werden. Notenpunkte und Noten ergeben sich daraus wie folgt. Nicht bestanden ist die Klausur mit

Klausurpunkten	0–13	14–21	22–29	30–37	38–45
Notenpunkten	0	1	2	3	4
Noten	6	5	5	5	5

Bestanden ist sie mit (Zeilen geben wieder Klausurpunkte, Notenpunkte, Note an; für L3–Studierende werden die Noten gerundet)

46–50	51–55	56–60	61–65	66–70	71–75	76–80	81–85	86–90	91–95	> 95
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4	3,7	3,3	3	2,7	2,3	2	1,7	1,3	1	1

Inhalt: Es kann alles drankommen, was in der Vorlesung oder den Übungen behandelt wurde. Viele Klausuraufgaben sind Variationen von Hausaufgaben, also gut in den Übungen mitmachen und Musterlösungen aufmerksam studieren!

19. Berechnen Sie die folgenden Residuen. Nur das Ergebnis wird gewertet, Ansatz und Rechenweg egal; geben Sie also keine Rechnungen mit ab, tragen Sie einfach Ihr Resultat auf das Blatt ein.

$$\mathrm{Res}_0\left(\exp(-\frac{1}{z})\right) = \qquad , \ \mathrm{Res}_i\left(\frac{z+1}{z-2}\right) = \qquad , \ \mathrm{Res}_2\left(\frac{z+1}{z-2}\right) = \qquad , \ \mathrm{Res}_i\left(\frac{1}{(z^2+1)^2}\right) =$$

20. Von den folgenden neun Aussagen sind genau fünf richtig. Kreuzen Sie diese an! Für fünf richtig gesetzte Kreuze gibt's 4 Punkte, für vier richtige gibt's 2 Punkte, für drei richtige einen Punkt. Für die zweite Aussage vergleiche man die Definition von w^z aus Aufgabe **17**.

□ $(1+i\sqrt{3})^{12} = 4$
□ $i^i = \exp(-\pi/2)$
□ Die Ungleichung $(1-i)z + (1+i)\overline{z} > 0$ beschreibt eine Halbebene in $\mathbb{C}$.
□ Das Polynom $z^7 + 2z^4 - 1$ hat in ∞ einen Pol der Ordnung 7.
□ Die holomorphe Funktion $\sin(z)$ hat im Punkt $z_0 = \pi/2 \in \mathbb{C}$ ein Betragsmaximum.
□ Die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^{2n!}$ hat den Konvergenzradius 1.
□ $\mathbb{Z}$ hat zwei Häufungspunkte auf der Riemannschen Zahlenkugel $\hat{\mathbb{C}}$.
□ $f : z \mapsto \frac{1}{z}$ besitzt in $\mathbb{C}^*$ eine Stammfunktion.
□ $z \mapsto \frac{1}{z}$ ist in $\mathbb{C}^*$ holomorph.

Die folgenden beiden Behauptungen bitte auf einem Extrablatt beweisen!

21. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei eine biholomorphe Abbildung. Dann gibt es ein $a \in \mathbb{C}^*$ und ein $b \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = az + b$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

22.

$$f(z) := \sin\left(\frac{1}{(z^2+3)(z^2+15)}\right) \quad \text{besitzt eine Laurententwicklung} \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-1)^n ,$$

die genau im Kreisring $2 < |z-1| < 4$ konvergiert; *genau* soll heißen, dass der Konvergenzring der Laurentreihe von Kreisen der Radien 2 und 4 berandet wird.

Musterlösung zur Probeklausur (Aufgaben 19 bis 22)

19.

$$\operatorname{Res}_0\left(\exp(-\frac{1}{z})\right) = -1 \ , \ \operatorname{Res}_i\left(\frac{z+1}{z-2}\right) = 0 \ , \ \operatorname{Res}_2\left(\frac{z+1}{z-2}\right) = 3 \ , \ \operatorname{Res}_i\left(\frac{1}{(z^2+1)^2}\right) = -\frac{i}{4}$$

20. Die richtigen Aussagen sind angekreuzt. Die knappen Kommentare dienen Ihrer Information, haben in der Klausur nichts zu suchen.

□ $(1+i\sqrt{3})^{12} = 4$
Nein, weil schon für die Beträge $|1+i\sqrt{3}| = 2$, also $|1+i\sqrt{3}|^{12} = 2^{12}$
X $i^i = \exp(-\pi/2)$
weil $i = \exp(\pi i/2)$
X Die Ungleichung $(1-i)z + (1+i)\overline{z} > 0$ beschreibt eine Halbebene in $\mathbb{C}$
weil $(1-i)z + (1+i)\overline{z} = \operatorname{Re}((1-i)(x+iy)) = x+y$

X Das Polynom $z^7 + 2z^4 - 1$ hat in ∞ einen Pol der Ordnung 7.
(Skriptum S.44, Beispiel 2)
□ Die holomorphe Funktion $\sin(z)$ hat im Punkt $z_0 = \pi/2 \in \mathbb{C}$ ein Betragsmaximum.
Quatsch, siehe Satz 8.9
X Die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^{2n!}$ hat den Konvergenzradius 1.
Fast genau wie Aufgabe 5

□ $\mathbb{Z}$ hat zwei Häufungspunkte auf der Riemannschen Zahlenkugel $\hat{\mathbb{C}}$.
Nein, nur ∞
□ $f : z \mapsto \frac{1}{z}$ besitzt in $\mathbb{C}^*$ eine Stammfunktion.
Nein, $\ln$ ist in $\mathbb{C}^*$ nicht wohldefiniert, oder: Integral über $\partial B_1(0)$ ist $\neq 0$, s. Prop. 6.5
X $z \mapsto \frac{1}{z}$ ist in $\mathbb{C}^*$ holomorph.
Das schon, vgl. Satz 3.5 im Skriptum.

21. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei eine biholomorphe Abbildung. Dann gibt es ein $a \in \mathbb{C}^*$ und ein $b \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = az + b$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Beweis. f ist eine ganze Funktion, hat also eine Potenzreihenentwicklung $\sum a_n z^n$, die in ganz $\mathbb{C}$ konvergiert. Wären unendlich viele $a_n \neq 0$, so wäre ∞ eine wesentliche Singularität von f, und nach Casorati–Weierstrass kämen auch Werte z.B. aus $f(B_1(0))$ nochmals als Werte von f in einer Umgebung von ∞ vor; f wäre also nicht injektiv, damit nicht biholomorph. Bleibt nur die Möglichkeit, dass fast alle $a_n = 0$ sind, dass f also ein Polynom ist. Der Grad von f kann nicht 0 sein (konstante Funktion). Wenn $n > 0$ der Grad von f ist, wird fast jeder Wert n–mal angenommen (Fundamentalsatz der Algebra und seine Folgerungen), bleibt also nur die Möglichkeit $n = 1$.

22.

$$f(z) := \sin\left(\frac{1}{(z^2+3)(z^2+15)}\right) \quad \text{besitzt eine Laurententwicklung} \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-1)^n \,,$$

die genau im Kreisring $2 < |z-1| < 4$ konvergiert; *genau* soll heißen, dass der Konvergenzring der Laurentreihe von Kreisen der Radien 2 und 4 berandet wird.

Beweis. f ist auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph mit Ausnahme der vier (echten!) Singularitäten $\pm i\sqrt{3}$ und $\pm i\sqrt{15}$. Diese haben vom Entwicklungspunkt $z_0 = 1$ den Abstand 2 bzw. 4. In dem genannten Kreisring muss also eine Laurententwicklung existieren (und normal konvergieren). Der Radius 2 kann dabei nicht verkleinert und der Radius 4 nicht vergrößert werden; andernfalls wäre die Reihe auch in Umgebungen der Punkte $\pm i\sqrt{3}$ bzw. $\pm i\sqrt{15}$ holomorph, könnte somit unsere Funktion f nicht darstellen.

23. Man beweise: Wenn die Funktion $y : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}_{>0}$ die Differentialgleichung $y'' = -\gamma M y^{-2}$ erfüllt, ist

$$(y')^2 \; - \; \frac{2\gamma M}{y}$$

eine Konstante. Können Sie daraus ein systematisches Lösungsverfahren ableiten?

Musterlösung zu Aufgabe 23 : Die Ableitung verschwindet wegen

$$2y''y' \; + \; \frac{2\gamma M y'}{y^2} \; = \; 0 \quad ,$$

was direkt aus der Gravitations–Dgl. folgt. Wir können diese darum auch in der Form

$$y' \; = \; \sqrt{c + \frac{2\gamma M}{y}}$$

schreiben mit einer Konstanten c, die von den Anfangsbedingungen abhängt. Da die rechte Seite nur noch von y und nicht mehr von der Zeit–Variablen t abhängt, ist die Lösung (für die Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$) implizit gegeben durch die Umkehrfunktion von

$$G(y) \; = \; \int_{y_0}^{y} \frac{du}{\sqrt{c + \frac{2\gamma M}{u}}} \; = \; \int_{t_0}^{t} dv \; = \; t - t_0 \; .$$

(Die Konstante c wäre dann durch eine weitere Anfangsbedingung etwa an $y'(t_0)$ festzulegen.) Die Funktion G kann man (aber sehr mühsam!) durch ,,elementare" Funktionen ausdrücken, vgl. z.B. Forster/Szymczak, Übungsbuch zur Analysis 2, Aufg. 14A. Achtung: elementar $\neq$ einfach, und die Umkehrfunktion von G wird hoffnungslos kompliziert.

24. Lösen Sie die Dgl. $y' = e^y \sin(x)$ für die Anfangswerte $y(0) = 0$ und $y(0) = 1$.

25. Seien $a, b > 0$ reelle Konstante. Suchen Sie alle positiven Lösungen der Dgl.

$$y' \; = \; ay \; - \; by^2$$

und skizzieren Sie die Lösungskurven. Tipp: Suchen Sie eine geeignete Substitution $z := y^c$, welche die Dgl. in eine lineare Dgl. überführt.

26. Die Funktion $f : [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \to \mathbb{R}$ sei nach y differenzierbar und $\partial f(x,y)/\partial y$ sei stetig im Definitionsrechteck. Zeigen Sie, dass f Lipschitz–stetig in y–Richtung ist.

27. Gesucht ist eine in einer Umgebung von 0 holomorphe Funktion f, welche die Dgl. $f'' + f = 0$ und die Anfangsbedingungen $f(0) = f'(0) = 1$ erfüllt. Da f eine Potenzreihenentwicklung $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ um den Punkt $z_0 = 0$ besitzen sollte, versuchen Sie, aus der Dgl. einen Algorithmus zur Berechnung der Koeffizienten a_n abzuleiten. Konvergenz? Kennen Sie die entstehende Funktion?

28. Suchen (und finden) Sie die allgemeine Lösung des linearen Dgl.–Systems

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} y \quad \text{für} \quad y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix} \quad .$$

(Die Theorie der Dgl.–Systeme kommt vielleicht erst am 3.2. dran, kann aber hier durch Nachdenken ersetzt werden. Soviel sei aber verraten, und das dürfen Sie auch verwenden: Es wird ein 3–dimensionaler Vektorraum von Lösungen.)

29. A sei eine reelle $n \times n$–Matrix, $M \in \mathbb{R}$ beliebig positiv. Beweisen Sie, dass im Raum der Matrizen $\mathbb{R}^{n\times n}$ die Reihe $\exp(Ax) := \sum_{j\geq 0} A^j \frac{x^j}{j!}$ gleichmäßig in $|x| \leq M$ konvergiert. Erläutern Sie, was das mit Lösungen des Dgl.–Systems

$$y' = A\,y$$

zu tun hat. Gibt es Matrizen A, für welche alle Komponenten aller Lösungsfunktionen Polynome sind? Geben Sie ein nichttriviales Beispiel an!

30. Seien ω, ω_1 reell > 0. Lösen Sie die Differentialgleichungen

$$y'' + \omega^2 y = x \qquad \text{und} \qquad y'' + \omega^2 y = \sin(\omega_1 x) \quad .$$

Vorsicht: Der Fall $\omega = \omega_1$ macht Ärger.

Musterlösung dazu : Ein Lösungs–Fundamentalsystem für die homogene Dgl. ist – wie hoffentlich bekannt –

$$e^{\pm i\omega x} \qquad \text{bzw.} \qquad \sin(\omega x)\ ,\ \cos(\omega x)\ .$$

Fehlt also nur eine spezielle Lösung der inhomogenen Dgl. Raten ist erlaubt, und für die erste Dgl. führt einfach $y = x/\omega^2$ zum Ziel. Bei der zweiten Dgl. darf man sich von der Physik inspirieren lassen: Die homogene Dgl. beschreibt ein frei schwingendes und reibungsfrei gelagertes Pendel. Unterwirft man es einer periodischen Kraft (proportional zu $\sin(\omega_1 x)$, sollte es letztlich im gleichen Rhythmus schwingen, also probiert man es mit $y(x) = c \cdot \sin(\omega_1 x)$. Einsetzen in die Dgl. ergibt

$$c \cdot (-\omega_1^2 + \omega^2) = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = \frac{1}{\omega^2 - \omega_1^2} \sin(\omega_1 x)$$

als plausibles Ergebnis, wenn $\omega \neq \omega_1$ ist. Im Fall der Gleichheit (*Resonanz* genannt) sollte man erwarten, dass die äußere Kraft das Pendel aufschaukelt, d.h. immer weiter auslenkt. Plausibel ist also die Multiplikation trigonometrischer Funktionen mit Polynomen. Natürlich kann man systematisch vorgehen (*Variation der Konstanten ...*), aber etwas Herumprobieren führt schnell auf die Lösung

$$y(x) = -\frac{x}{2\omega} \cos(\omega x) \quad .$$