

Geometrie

für L3 und Bachelor, SoSe 2008

JÜRGEN WOLFART

Literatur: Die Bücher von Bröcker und Fischer über Lineare Algebra und Analytische Geometrie, zur Geometrie im engeren Sinn die Bücher von Scheid, Knörrer, Agricola/Friedrich und das Buch über Projektive Geometrie von Beutelspacher/Rosenbaum.

Die Herstellung der Bilder verdanke ich Claudia Baden, die Erstellung des Textes Cristina Sarti.

1 Euklidische Punkträume

Erinnerung an die affinen Punkträume $\mathbf{A}(\mathbf{R}^n)$: $\{\text{Punkte}\} = \mathbf{R}^n$, affine Unterräume sind von der Form $U = P + L$, wobei $P \in \mathbf{R}^n$ Punkt auf U ist und L Untervektorraum des \mathbf{R}^n . Anders gesagt sind affine Unterräume also additive Restklassen der Untergruppe $L \subset (\mathbf{R}^n, +)$. U und U' heißen *parallel*, wenn sie zu Untervektorräumen $L = L'$ gehören (oder allgemeiner $L \subset L'$ bzw. $L \supset L'$). Insbesondere: U ist eine *Gerade* in $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{R}^n) \Leftrightarrow \dim L = 1$, *Ebene* für $\dim L = 2$.

Soweit kann man affine Räume für beliebige Körper anstelle von \mathbf{R} einführen, nicht aber *Strecken* $\overline{PQ} := P + \{x(Q - P) \mid x \in [0, 1]\} = \{xQ + yP \mid x, y \geq 0, x + y = 1\}$, *Halbgeraden* oder *konvexe Mengen*. Neu sind jetzt

Euklidische Punkträume: $\mathbf{E}(\mathbf{R}^n)$ ist als Punktraum identisch mit $\mathbf{A}(\mathbf{R}^n)$, zusätzlich aber mit Längen- und Winkelmessung: Wir fassen den \mathbf{R}^n auf als euklidischen Vektorraum, also mit *Skalarprodukt* $\langle \cdot, \cdot \rangle$, *euklidischem Abstand*

$$d(P, Q) := \|Q - P\| := \sqrt{\langle Q - P, Q - P \rangle},$$

Orthogonalität von Unterräumen

$$U \perp U' \Leftrightarrow \langle u, u' \rangle = 0 \quad \forall u \in L, u' \in L',$$

wo L und L' die zu U und U' gehörigen Unter(vektor)räume sind, *Winkel*

$$\angle(PQR) := \angle(P - Q, R - Q) := \arccos \frac{\langle P - Q, R - Q \rangle}{\|P - Q\| \cdot \|R - Q\|}$$

(natürlich nur für $P \neq Q \neq R$).

Anwendungen in der Elementargeometrie: 1. Winkel zwischen Diagonalen des Würfels. Zweckmäßigerweise verwendet man hier das Standard-Skalarprodukt und legt sich den

Würfel in eine komfortable Lage mit Ecken $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Die Diagonalen verbinden gegenüberliegende Ecken e und $-e$ (0 ist der Mittelpunkt). Der Winkel α zwischen irgend zwei Diagonalen erfüllt also

$$\cos \alpha = \frac{\langle e, e' \rangle}{\|e\| \cdot \|e'\|} = \frac{\pm 1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \pm \frac{1}{3}.$$

2. Entsprechend: Winkel zwischen den Diagonalen des vierdimensionalen Würfels. Hier hat man 16 Eckpunkte $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$, die inneren Diagonalen — die sich also in 0 schneiden — verbinden jeweils e mit $-e$, dabei sind alle $\|e\| = 2$. Die Berechnung des Schnittwinkels führt bis aufs Vorzeichen auf zwei typische Möglichkeiten

$$\langle e, e' \rangle = \langle (1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, -1) \rangle = 2 \quad \text{oder} \quad \langle (1, 1, 1, 1), (1, 1, -1, -1) \rangle = 0.$$

Die Winkel zwischen den Diagonalen sind also $\pi/2$ (wenn $\cos = 0$) oder $\pi/3$ (wenn $\cos = \pm \frac{1}{2}$).

3. Der Satz vom Höhenschnittpunkt im Dreieck. Der Schnittpunkt H der Höhenlinien h_a und h_c sei o.B.d.A. der Nullpunkt 0, dann sind

$$\langle A, B - C \rangle = 0 = \langle C, A - B \rangle.$$

Mit Bilinearität und Symmetrie folgt daraus

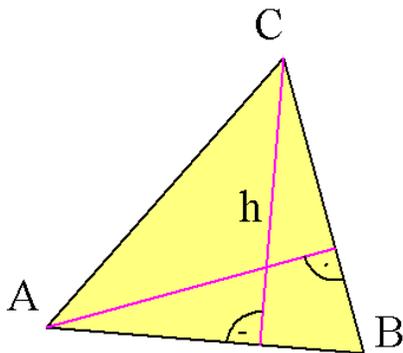


Abbildung 1: Höhenschnittpunkt

$$\langle A, B \rangle = \langle B, C \rangle = \langle C, A \rangle, \quad \text{also auch} \quad \langle B, A - C \rangle = 0,$$

und das heißt: H liegt auch auf der Höhenlinie h_b .

4. Der Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck ABC mit Hypotenuse \overline{AB} : Sei 0 der Fußpunkt der Höhe auf der Hypotenuse. Die Höhe habe die Länge h , dann ist also $h^2 = \|C\|^2$ und

$$A \perp C \perp B \quad \Leftrightarrow \quad \langle A, C \rangle = 0 = \langle B, C \rangle.$$

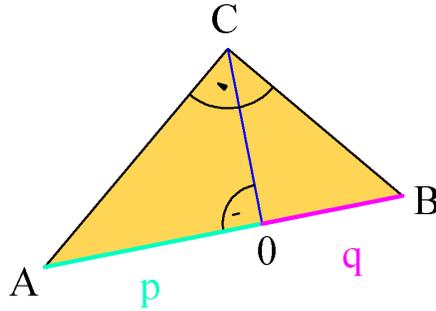


Abbildung 2: Höhensatz

Da das Dreieck in C einen rechten Winkel hat, haben wir außerdem

$$\langle A - C, B - C \rangle = 0, \quad \text{also} \quad \langle A, B \rangle + \|C\|^2 = 0.$$

Als Vektoren zeigen A und B in entgegengesetzte Richtungen und haben die Längen p bzw. q (Hypotenusenabschnitte). Dann ist die letzte Gleichung die gewohnte Form des Höhensatzes $h^2 = pq$.

Dieser Beweis ist strenggenommen eine Mogelpackung: Der Höhensatz ist äquivalent zum Satz des Pythagoras, und bei einer elementargeometrischen Interpretation des Standard-Skalarprodukts steckt man den Pythagoras bereits in die Definition hinein!

Satz 1.1 *Eine Gerade in der euklidischen Ebene $\mathbf{E}(\mathbf{R}^2)$ bzw. eine Ebene im euklidischen Raum $\mathbf{E}(\mathbf{R}^3)$ mit Standard-Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wird stets beschrieben durch eine lineare Gleichung $\langle a, x \rangle = d$ mit einem $a \in \mathbf{R}^2$ bzw. \mathbf{R}^3 , $a \neq 0$. O.B.d.A. darf man $\|a\| = 1$ annehmen, dann heißt die Gleichung „HESSEsche Normalform“ der Geraden- bzw. Ebenengleichung. In der Hesseschen Normalform bedeutet $|d|$ den Abstand zum Nullpunkt, und für alle $Q \in \mathbf{R}^2$ bzw. \mathbf{R}^3 ist $|\langle a, Q \rangle - d|$ der Abstand von Q zur Geraden bzw. zur Ebene.*

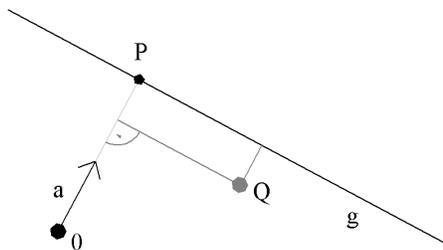


Abbildung 3: Hesse'sche Normalform

Beweis. $\langle a, x \rangle = 0$ beschreibt die Parallele durch den Nullpunkt, darum steht a senkrecht auf der Geraden g bzw. der Ebene. Der Punkt P auf g mit dem kürzesten Abstand zu 0 ist aber $\pm da$, denn jeder andere Punkt auf g ist von der Form $P + x$ mit $\langle a, x \rangle = 0$, also

$$\|P + x\|^2 = d^2\|a\|^2 + \|x\|^2 \pm 2d\langle a, x \rangle = d^2 + \|x\|^2 \geq d^2$$

mit „ $=$ “ nur für $x = 0$, also ist $|d|$ der Abstand zu 0 (für Ebenen geht's genauso).
 Für jedes Q ist $\langle a, x \rangle = \langle a, Q \rangle$ die Gleichung der Parallelen zu $\langle a, x \rangle = d$ durch den Punkt Q ,
 darum ist $\langle a, Q \rangle - d$ die Differenz der beiden Abstände zum Nullpunkt.

2 Bewegungsgruppen und Abbildungsgeometrie

Problem: Welche Bijektionen $f : \mathbf{E}(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{R}^n)$ erhalten euklidische Längen und Winkel? Klar: alle Translationen

$$t = t_v : P \mapsto P + v \quad (v \in \mathbf{R}^n).$$

Diese bilden eine kommutative Gruppe T , isomorph zur additiven Gruppe \mathbf{R}^n (Erinnerung: Das war mal eine Motivation zur Einführung von Vektoren in der Linearen Algebra, §1).

Definition. Die Längen-erhaltenden Bijektionen $f : \mathbf{E} := \mathbf{E}(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{R}^n)$ nennen wir *euklidische Bewegungen*. Bezüglich Hintereinanderausführung bilden sie offenbar eine Gruppe $\text{Aut } \mathbf{E} \supset T$.

Satz 2.1 *Aut* \mathbf{E} ist das semidirekte Produkt $O_n \rtimes T$ aus dem Normalteiler T und der orthogonalen Gruppe O_n des euklidischen Vektorraums \mathbf{R}^n (mit Standard-Skalarprodukt).

(Für *semidirektes Produkt* vgl. die Musterlösung zur Aufgabe 8.)

Beweis. 1. *Aut* \mathbf{E} enthält außer T auch noch O_n als Untergruppe, denn alle $M \in O_n \subset \text{GL}_n \mathbf{R}$ erfüllen $\|M(v)\| = \|v\|$, also

$$d(M(P), M(Q)) = \|M(P) - M(Q)\| = \|M(P - Q)\| = \|P - Q\|$$

für alle Punktepaare P, Q . Anschaulich beschreibt O_n die Untergruppe der Bewegungen mit Fixpunkt 0.

2. *Aut* $\mathbf{E} \subset O_n \cdot T$: Sei f eine euklidische Bewegung mit $f(P) = 0$ und wähle dazu die Translation $t = t_{-P}$ mit $t^{-1} = t_P : 0 \mapsto P$, dann wird $g := f \circ t^{-1} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ eine Vektorraum-Bijektion mit $\|g(u)\| = \|u\|$ für alle $u \in \mathbf{R}^n$. Daraus folgt bereits

3. $g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ erfüllt auch $\langle g(u), g(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ und ist außerdem linear, also $g \in O_n$. Grund: Das Skalarprodukt ist durch die euklidischen Längen bereits eindeutig bestimmt, denn (nachrechnen!)

$$2\langle u, v \rangle = \|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2 = \|g(u + v)\|^2 - \|g(u)\|^2 - \|g(v)\|^2 = 2\langle g(u), g(v) \rangle \quad \Rightarrow$$

g führt jede Orthonormalbasis v_1, \dots, v_n des \mathbf{R}^n in eine Orthonormalbasis über. Fehlt nur noch die Linearität: Für eine Orthonormalbasis sind die Koordinaten $\xi_i \in \mathbf{R}$ von $x = \sum \xi_i v_i$ bestimmt durch $\xi_i = \langle x, v_i \rangle$, also ist

$$g(x) = \sum \langle g(x), g(v_i) \rangle g(v_i) \quad \text{mit} \quad \langle g(x), g(v_i) \rangle = \langle x, v_i \rangle = \xi_i \quad \Rightarrow$$

g linear.

4. Dass $O_n \cap T = \{\text{id}\}$ ist, sieht man an der Wirkung auf den Nullpunkt. Also sind in der Zerlegung $f = g \circ t \in \text{Aut } \mathbf{E}$ die Translation t und die orthogonale Abbildung g eindeutig bestimmt, als Menge ist darum $\text{Aut } \mathbf{E} = O_n \times T$; aber Vorsicht: Es gilt **nicht** $g_1 t_1 g_2 t_2 = g_1 g_2 t_1 t_2$, es handelt sich also nicht um ein *direktes Produkt* von Gruppen.

5. Immerhin ist die Untergruppe T aber ein *Normalteiler* von $\text{Aut } \mathbf{E}$, und das bedeutet

$$fTf^{-1} = T \quad \text{für alle } f \in \text{Aut } \mathbf{E} .$$

Begründung: Sei $t' : P \mapsto P + v'$ für alle P , dann ist für alle $g \in O_n$ und alle Punkte Q

$$gt'g^{-1}(Q) = gt'(g^{-1}(Q)) = g(g^{-1}(Q) + v') = Q + g(v') ,$$

somit auch $gt'g^{-1}$ wieder eine Translation, nur eben um $g(v')$, nicht um v' . Da sich jedes f als gt schreiben lässt mit $g \in O_n$, $t \in T$ und T kommutativ ist, gilt

$$ft'f^{-1} = gtt't^{-1}g^{-1} = gt'g^{-1} \in T ,$$

und so entsteht sogar jede Translation, also haben wir die Normalteilereigenschaft $fTf^{-1} = T$ und zusammen mit den anderen Punkten des Beweises die Behauptung des Satzes.

Erinnerung an die Klassifikation der ebenen orthogonalen Transformationen in der Linearen Algebra (§15):

$$M \in O_2 \quad \text{heißt Drehung, wenn} \quad M = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \in SO_2$$

(Eigenwerte $e^{i\varphi}, e^{-i\varphi} \in \mathbf{C}$),

$$M \in O_2 \quad \text{heißt Spiegelung, wenn} \quad M = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} \in O_2 \setminus SO_2$$

(Eigenwerte $+1, -1$).

Definition. $f \in \text{Aut } \mathbf{E}$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{R}^2)$ heißt *Drehung*, wenn $t \in T$ und $g \in SO_2$ existieren mit $f = tgt^{-1}$, m.a.W. wenn man vermöge einer Translation t den Nullpunkt des Koordinatensystems so legen kann, dass $f \in SO_2$. Entsprechend heißt f *Spiegelung*, wenn $t \in T$ und $g \in O_2 \setminus SO_2$ so existieren, dass $f = tgt^{-1}$.

Satz 2.2 *In der euklidischen Ebene wird $\text{Aut } \mathbf{E}$ von Spiegelungen erzeugt, genauer: jedes $f \in \text{Aut } \mathbf{E}$ ist Produkt von höchstens drei Spiegelungen — sogar von höchstens zwei, wenn f orientierungserhaltend ist.*

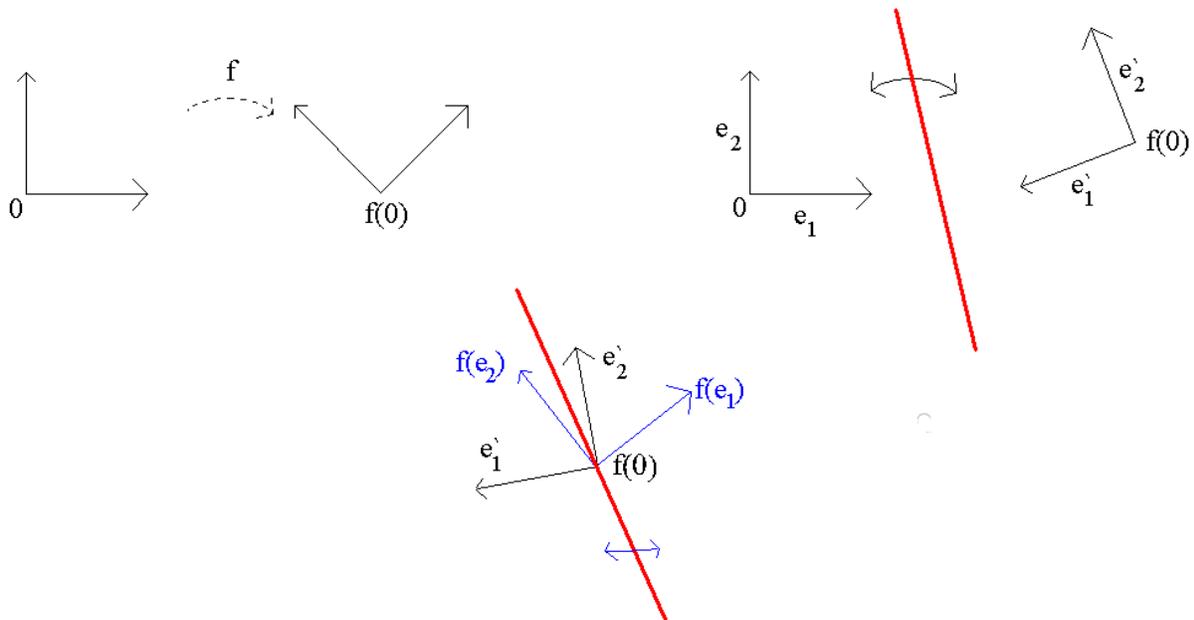


Abbildung 4: Dreispiegelungssatz

Beweis. f wird eindeutig bestimmt durch seine Wirkung auf 0 und ein Orthonormalsystem. Rezept: Man spiegele die Ebene zunächst an der Mittelsenkrechten von 0 und $f(0)$, dann wird das so abgebildete Orthonormalsystem e_1, e_2 durch eine oder zwei Spiegelungen an Geraden durch $f(0)$ in $f(e_1), f(e_2)$ übergeführt.

Wichtige Bemerkung. Hintereinanderausführung zweier Spiegelungen an zwei Geraden durch den Punkt A mit Schnittwinkel α ergibt eine Drehung mit Fixpunkt A und Drehwinkel 2α . Spiegelung an zwei parallelen Geraden mit Abstand d gibt eine Translation um einen Vektor v orthogonal zu den beiden Geraden und mit Länge $2d$.

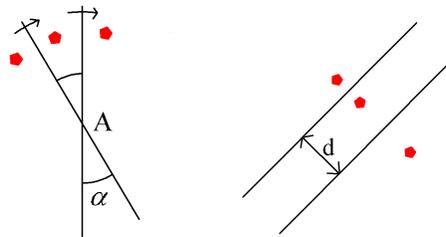


Abbildung 5:

Satz 2.3 Ebene Bewegungen f zerfallen in die folgenden Typen:

- a) Identität
- b) Translationen
- c) Drehungen
- d) Spiegelungen an Geraden

e) Gleitspiegelungen (d.h. Kombination von einer Spiegelung an einer Geraden g und einer Translation um einen Vektor $v \neq 0$ parallel zu g)

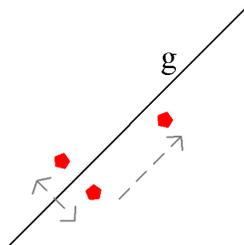


Abbildung 6: Gleitspiegelung

Beweis. Klar, dass diese Klassen von Bewegungen disjunkt sind. Die Klassifikation lässt sich nach Fixelementen folgendermaßen durchführen.

f lässt alle Punkte fest \Leftrightarrow a)

f lässt nur die Punkte einer Geraden fest \Leftrightarrow d)

f lässt die Geraden einer Parallelschar fest, hat aber keine Fixpunkte \Leftrightarrow b)

f hat genau einen Fixpunkt \Leftrightarrow c)

f führt genau eine Gerade in sich über, hat aber keine Fixpunkte \Leftrightarrow e)

Dass diese Äquivalenzen gelten, sieht man ein, wenn man bedenkt, dass Parallelität, Orthogonalität und Abstände unter f erhalten bleiben.

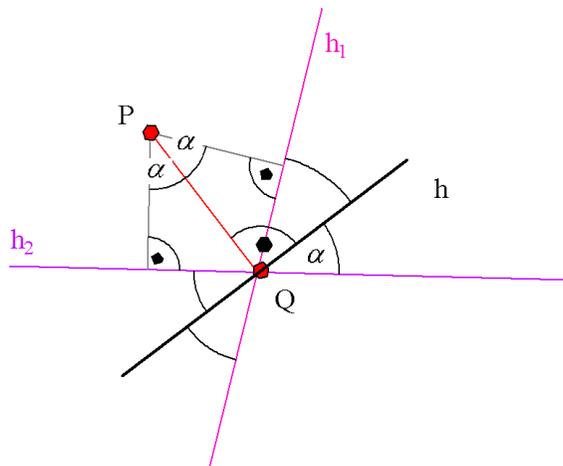


Abbildung 7:

Bleibt zu zeigen, dass mindestens einer dieser Fälle eintritt. Dazu verwenden wir Satz 2.2 :

f ist Produkt von 0 Spiegelungen \Rightarrow a)

f ist Produkt von 1 Spiegelung \Rightarrow d)

f ist Produkt von 2 Spiegelungen \Rightarrow b) oder c)

Bleibt der Fall, dass f Produkt von drei Spiegelungen ist, o.B.d.A. an Geraden ohne gemeinsamen Punkt und nicht alle parallel zueinander. Dann kann man f als $f = \delta \circ s$ schreiben, wo s Spiegelung an einer Geraden h ist, δ Drehung um einen Punkt $P \notin h$ mit Drehwinkel 2α . Man kann zwei Geraden h_1, h_2 konstruieren mit der Eigenschaft

$$s(h_1) = h_2, \quad \delta(h_2) = h_1 \quad \Rightarrow f(h_1) = h_1$$

(sie schneiden sich in einem Punkt $Q \in h$, dem Fußpunkt des Lots von P auf h , und schneiden beide die Gerade h unter dem Winkel α .) Wegen $f(Q) \neq Q$ ist aber zu sehen, dass f die Gerade h_1 nicht punktweise festlässt, genauer sogar keinen Fixpunkt auf h_1 hat. Da f nicht orientierungserhaltend ist, kommt „Translation“ nicht in Frage. Es bleibt also nur die Gleitspiegelung.

Warum ist das Studium von Abbildungen so wichtig? Ein erster Grund: Abbildungen und ihre Invarianten sind wichtige Werkzeuge für den Beweis elementargeometrischer Sätze. Ein kleines Beispiel dafür ist der folgende

Satz 2.4 (FERMAT) *Einem spitzwinkligen Dreieck ABC seien drei gleichseitige Dreiecke ABC' , ACB' , BCA' aufgesetzt. Dann schneiden sich die drei Verbindungsstrecken $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ in einem Punkt F unter dem Winkel $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$ und ihre Längen sind gleich.*

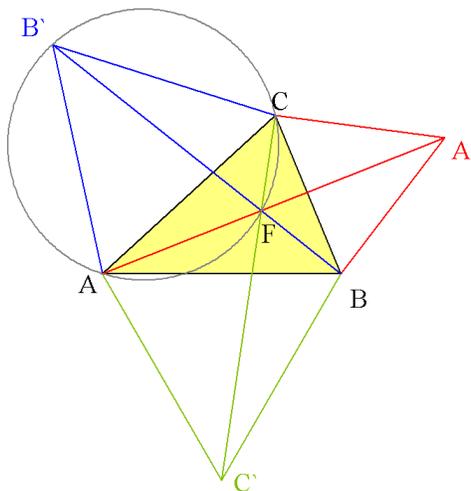


Abbildung 8: Sätze von Fermat und Napoléon

Beweis. Sei $F := AA' \cap BB'$. Eine $\pi/3$ -Drehung um den Punkt C bewirkt

$$B' \mapsto A, \quad B \mapsto A', \quad \overline{B'B} \mapsto \overline{AA'},$$

also sind die Längen gleich, außerdem $\angle B'FA = \angle A'FB = \pi/3$, und $\angle B'FA = \angle B'CA$ sind Peripheriewinkel eines Kreises über der Sehne $\overline{AB'}$. Für den gleichen Kreis ist auch

$\angle B'FC$ Peripheriewinkel über der Sehne $\overline{B'C}$. Alle Winkel bei F sind somit $\pi/3$, also liegt F auch auf CC' .

Eine kleine Folgerung daraus ist

Satz 2.5 (NAPOLÉON) *Die Mittelpunkte der drei aufgesetzten Dreiecke ACB' , CBA' , ABC' bilden ein gleichseitiges Dreieck.*

Beweis. Mittelpunkte = Schwerpunkte = $\frac{1}{3}(A + C + B')$ bzw. $\frac{1}{3}(C + B + A')$ bzw. $\frac{1}{3}(A + B + C')$. Die Längenquadrate der Verbindungsstrecken sind darum

$$\frac{1}{9} \|A - A' - (B - B')\|^2 = \frac{1}{9} (\|A - A'\|^2 + \|B - B'\|^2 - 2\langle A - A', B - B' \rangle)$$

etc., nach Satz 2.4 also unabhängig von der Wahl der Verbindungsstrecke.

Über solche Beispiele hinaus haben Abbildungen und ihre Invarianten eine erhebliche systematische Bedeutung für den Aufbau der Geometrie. FELIX KLEIN hat in seinem *Erlanger Programm* sogar vorgeschlagen, Geometrie als die Wissenschaft von den Invarianten der verschiedenen möglichen Abbildungsgruppen zu betreiben. Davon mehr im letzten Kapitel der Vorlesung, einstweilen seien aber schon mal einige andere **wichtige Abbildungsgruppen** erwähnt, die auf dem \mathbf{R}^n operieren:

- 1) Die Gruppe $\mathbf{R}^* O_n \times T$ der *zentrischen Streckungen* auf \mathbf{E} , in der \mathbf{R}^* zu lesen ist als die Matrizengruppe, welche aus den reellen Vielfachen $\neq 0$ der Einheitsmatrix besteht. Diese Matrizen kommutieren natürlich mit allen orthogonalen Matrizen und bewirken geometrisch Expansionen bzw. Kontraktionen der Ebene mit Zentrum (Fixpunkt) 0 . Wichtig für alle Strahlensatz-Argumente!
- 2) *Volumenerhaltende Abbildungen* entstehen, wenn man O_n durch $SL_n \mathbf{R}$ ersetzt. Beispiele dafür sind *Scherungen*, welche eine $n - 1$ -dimensionale Hyperebene punktwise festlassen, ihre Parallelen aber (in sich) parallel verschieben. Man mache sich an Hand der geometrischen Wirkung einer Elementarmatrix klar, wie das zustande kommt. Man kann zeigen, dass alle volumenerhaltenden Abbildungen durch euklidische Bewegungen und Scherungen erzeugt werden können.
- 3) *Affine Abbildungen* entstehen, wenn man in der euklidischen Be-

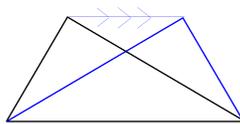


Abbildung 9: Scherung

wegungsgruppe den Faktor O_n durch $GL_n \mathbf{R}$ ersetzt. Unter dieser Gruppe bleiben Längen, Winkel und Volumina nicht erhalten, wohl aber Parallelität und Streckenverhältnisse auf parallelen Geraden. Es gibt sogar Anwendungen geometrischer Abbildungen, welche nicht



Abbildung 10: Grund- und Aufriss; Kavalierprojektion

bijektiv sind. Die **darstellende Geometrie** befasst sich mit Projektionen räumlicher Gebilde auf Ebenen, z.B. in *Grund- und Aufriss* (senkrechte Projektionen auf zwei Koordinatenebenen) oder schrägen Parallelprojektionen wie der *Kavalierperspektive*, charakterisiert durch Maßstabverkürzung in bestimmten Richtungen. Fotografie und perspektivische Zeichnungen liefern die anschaulichsten Bilder, mathematisch beschrieben durch die *Zentralprojektion*. Davon wird noch im Kap. 6 über Projektive Geometrie die Rede sein.

3 Bilinearformen und Hauptachsentransformation

Erinnerung an *Bilinearformen*: Es sind bilineare Abbildungen $[\ , \] : V \times V \rightarrow K$ von Vektorräumen V in ihren Grundkörper K . Wenn a_1, \dots, a_n Basis von V ist und $[a_i, a_j] = b_{ij} \in K$, so ist $[\ , \]$ durch die Matrix $B := (b_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ eindeutig bestimmt, und zwar — wenn wir $x \in V$ als Spaltenvektor $x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$ mit korrespondierender Zeile $x^T = (x_1, \dots, x_n)$ schreiben — in der Form

$$[x, y] = x^T B y .$$

Die Bilinearform heißt *symmetrisch*, wenn $[x, y] = [y, x]$ für alle $x, y \in V$ ist. Symmetrie liegt genau dann vor, wenn die Matrix $B = B^T$ symmetrisch ist.

Voraussetzungen: Von nun an werden wir hier immer $K = \mathbf{R}$, $V = \mathbf{R}^n$ voraussetzen und annehmen, dass $[\ , \]$ symmetrische Bilinearform ist. Außerdem sei mit $\langle \ , \ \rangle$ das euklidische Skalarprodukt in Standardform bezeichnet.

Satz 3.1 a) Zu $[\ , \]$ existiert eine lineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow V$ mit

$$[x, y] = \langle x, \varphi(y) \rangle = \langle \varphi(x), y \rangle \quad \forall x, y \in V .$$

Ein $\varphi \in \text{End } V$ mit $\langle x, \varphi(y) \rangle = \langle \varphi(x), y \rangle$ heißt „selbstadjungiert“.

b) Umgekehrt definiert jede selbstadjungierte Abbildung $\varphi \in \text{End } V$ durch $[x, y] := \langle x, \varphi(y) \rangle$ eine symmetrische Bilinearform.

Beweis mit $\varphi(y) := B y$ und $\langle \varphi(x), y \rangle = (B x)^T y = x^T B^T y$.

Der nächste Satz ist unter den Namen *Hauptachsentransformation* bekannt (wird im nächsten Kapitel erklärt, warum) oder als *Spektralsatz* (wegen seiner Anwendungen in Funktionalanalysis und Quantenmechanik, aber „das ist ein weites Feld, Luise“).

Satz 3.2 a) Zu jedem selbstadjungierten $\varphi \in \text{End } V$ gibt es eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von φ . Insbesondere ist φ diagonalisierbar.

b) Zu jeder symmetrischen Bilinearform $[\cdot, \cdot]$ auf V gibt es eine Orthonormalbasis a_i ($i = 1, \dots, n$) von V mit $[a_i, a_j] = 0 \forall i \neq j$.

c) Jede symmetrische reelle Matrix in $\mathbf{R}^{n \times n}$ ist diagonalisierbar und hat reelle Eigenwerte.

Beweis. a) \Rightarrow b), denn Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda \neq \mu$ sind orthogonal: $\varphi(a) = \lambda a$ und $\varphi(b) = \mu b \Rightarrow$

$$\mu \langle a, b \rangle = \langle a, \varphi(b) \rangle = \langle \varphi(a), b \rangle = \lambda \langle a, b \rangle \Rightarrow \langle a, b \rangle = 0.$$

Zu jedem einzelnen Eigenraum liefert eine beliebige Basis eine Darstellung von φ durch eine Diagonalmatrix, also kann man auch eine Orthonormalbasis nehmen.

b) \Rightarrow c): Wechsel der Orthonormalbasis des \mathbf{R}^n heißt Übergang von $y \in \mathbf{R}^n$ zu Cy mit einem $C \in O_n$. Bekanntlich ist $C^T = C^{-1}$, also können wir mit $[x, y] = x^T B y$ die Aussage b) umformulieren in: Es existiert eine Diagonalmatrix D und ein $C \in O_n$ mit

$$(Cx)^T B Cy = x^T C^T B Cy = x^T D y$$

für $D = C^{-1} B C$, also sind D und B ähnlich.

Der Beweis von a) ist klar für $n = 1$ und ebenso für $B = 0$ (Nullmatrix, also $[\cdot, \cdot] \equiv 0$). Hat man einen Eigenvektor v von φ gefunden, dann ist $[\cdot, \cdot]$ auch symmetrische Bilinearform auf dem Orthogonalraum

$$v^\perp := \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle v, x \rangle = 0\}$$

der Dimension $n-1$. Es genügt also, für φ einen Eigenvektor zu finden und dann Induktion über die Dimension anzuwenden. In Matrixsprache: Man finde zu der symmetrischen $n \times n$ -Matrix $B \neq 0$ ein $\lambda \in \mathbf{R}$ und eine symmetrische $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix B' und ein $S \in \text{GL}_n \mathbf{R}$ derart, dass

$$B = S \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix} S^T$$

(die Matrix ist in Kästchen zerlegt, so dass 0 eine Nullzeile bzw. -spalte des \mathbf{R}^{n-1} bezeichnet). Wie? Man darf davon ausgehen, dass ein $v \in \mathbf{R}^n$ existiert mit $[v, v] \neq 0$, andernfalls wäre die Bilinearform

$$2[x, y] = [x + y, x + y] - [x, x] - [y, y] \equiv 0.$$

Man wähle also $a_1 := v$ als ersten neuen Basisvektor, dazu $\lambda = [a_1, a_1]$, ergänze diesen durch a_2, \dots, a_n zu einer Basis. In dieser schreibt sich φ bzw. $[\cdot, \cdot]$ als Matrix

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & w^T \\ w & U \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \lambda \neq 0, \quad U = U^T \in \mathbf{R}^{(n-1) \times (n-1)}, \quad w \in \mathbf{R}^{n-1}$$

(Spaltenvektor). Mit genau der gleichen Kästchenzerlegung und der $(n-1) \times (n-1)$ -Einheitsmatrix E definiert man sich $B' := U - \frac{1}{\lambda} w w^T$ und

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\lambda} w & E \end{pmatrix}, \text{ dann wird } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\lambda} w & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda} w^T \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & w^T \\ w & U \end{pmatrix} = B.$$

Vorsicht: Der Satz ist über beliebigen Körpern nicht ohne weiteres richtig. Man nehme das Beispiel $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ über dem Körper \mathbf{F}_2 : Hier ist $[\cdot, \cdot] \not\equiv 0$, aber für alle $v \in \mathbf{F}_2^2$ ist $[v, v] = v_1 v_2 + v_2 v_1 = 0$.

4 Quadratische Formen. Kegelschnitte

Definition und viele **Bemerkungen.** Eine *Quadrik* ist die Nullstellenmenge aller $x := (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n$ mit der Eigenschaft

$$p(x) := \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c = 0.$$

Der \mathbf{R}^n wird also als affiner Punktraum betrachtet (wird in Kap. 6 verallgemeinert werden) und lässt sich für viele Fragen durch K^n ersetzen. Für allgemeinere Polynome entsteht eine *algebraische Hyperfläche*, Objekt der *algebraischen Geometrie*. O.B.d.A. darf man für alle Indizes i, j voraussetzen, dass $a_{ij} = a_{ji}$ ist, also

$$p(x) = x^T A x + b^T x + c$$

schreiben mit einem Spaltenvektor $b \in \mathbf{R}^n$ und einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$. Ferner setzen wir $A \neq 0$ voraus, da man sonst eine affine Hyperebene erhielte. Der Hauptbestandteil von p ist also die *quadratische Form* $[x, x]$, welche zu der durch A definierten symmetrischen Bilinearform $[\cdot, \cdot]$ gehört. Vermöge einer Hauptachsentransformation (Satz 3.2) durch eine orthogonale Matrix M dürfen wir darum annehmen, dass A eine Diagonalmatrix $[a_1, \dots, a_p, -a_{p+1}, \dots, -a_{p+q}, 0, \dots, 0]$ ist; Schreibweise: In der eckigen Klammer stehen die Diagonalelemente der Matrix, außerhalb der Diagonalen stehen in der Matrix nur Nullen. Man darf also voraussetzen, dass das quadratische Polynom von der Form

$$p(x) = \sum_1^p a_i x_i^2 - \sum_{p+1}^{p+q} a_i x_i^2 + \sum b_i x_i + c$$

ist, dabei alle $a_i > 0$. Die Gestalt dieser Koeffizienten a_i, b_i, c hängt sehr vom gewählten Koordinatensystem ab (was wir gleich ausnutzen werden, um p noch weiter zu vereinfachen, nicht aber die Anzahlen p und q ; das sagt der *Trägheitssatz von SYLVESTER*, den wir hier nicht beweisen). Für $i \leq p+q$ erreicht man sogar $b_i = 0$ durch eine geeignete Translation, elementarer: durch *quadratische Ergänzung*, für $a_i > 0$ probiere man $x_i = \tilde{x}_i - \frac{b_i}{2a_i}$.

Gewisse Entartungsfälle werden wir künftig ausschließen, nämlich

- 1) wenn $p(x) = 0$ keine Lösung hat, z.B. für $x^2 + y^2 + 1 = 0$,
- 2) wenn $p(x) = 0$ nur einen Lösungspunkt hat wie z.B. $x^2 + y^2 = 0$, oder
- 3) wenn $p(x) = l_1(x) \cdot l_2(x)$ für zwei lineare Polynome l_1, l_2 . Dann heißt die Quadrik *reduzibel* und ist Vereinigung der beiden affinen Hyperebenen $l_i(x) = 0, i = 1, 2$.

Lässt man über die euklidischen Bewegungen hinaus auch noch affine Transformationen zu, nämlich

$$x_i = \frac{\tilde{x}_i}{\sqrt{a_i}} \quad \text{für } i \leq p+q \quad \text{bzw.} \quad x_j = \frac{\tilde{x}_j}{b_j} \quad \text{für } j > p+q, b_j \neq 0,$$

so werden alle Koeffizienten der Gleichung $p(x) = 0$ zu 0 oder 1. Für $p+q < n$, ein $b_j \neq 0$, kann man durch Translation auch noch $c = 0$ erreichen, sonst — via Multiplikation der Gleichung mit $1/c$ — immerhin noch $c = 1$. Bleiben für $n = 2$, also in der euklidischen Ebene, noch die folgenden Fälle übrig.

1. Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, affines Bild des Kreises $x^2 + y^2 = 1$.
2. Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, affin normierbar auf $x^2 - y^2 = 1$.
3. Im Fall $p+q = 1 < n = 2$ oben erhält man die Parabel $x^2 = y$.

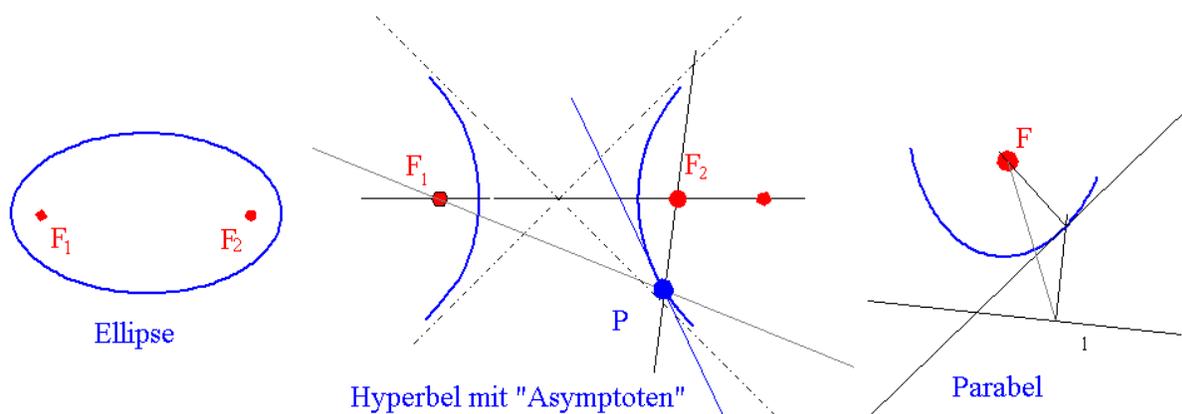


Abbildung 11: Kegelschnitte

Es handelt sich um die sogenannten *Kegelschnitte*; sie entstehen durch Schnitte des Kreiskegels $K : x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$ mit einer Ebene $E \subset \mathbf{R}^3$. Dabei kann $E \cap K$ entartet sein — wenn $0 \in E$ — oder aber genau eine Kurve der oben genannten Arten ergeben. In der hier gefundenen Normierung ist die y -Achse Symmetrieachse der Parabel und beide Koordinatenachsen Symmetrieachsen von Ellipse und Hyperbel, daher der Name *Hauptachsentransformation* für das wichtigste Werkzeug dieser Normierung.

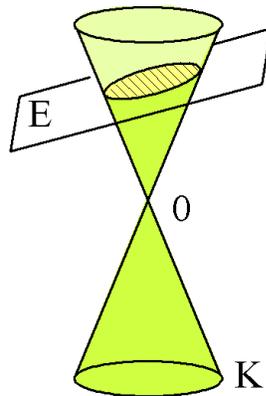


Abbildung 12: Kegel

Kegelschnitte treten in der Natur auf als Bahnkurven von Himmelskörpern (1. Keplersches Gesetz) und haben viele geometrisch oder sogar technisch interessante Eigenschaften (z.B. Parabolspiegel). Wählt man die Zeichenebene senkrecht zur Schnittebene E , so sieht man im Aufriss, dass es genau zwei Kugeln (die DANDELINSchen Kugeln) gibt, welche K in einer Kreislinie κ_i und die Ebene E in je einem *Brennpunkt* F_1 bzw. F_2 berühren; bei der Parabel ist es nur eine Kugel und nur ein Punkt F . Dann gelten u.a. die folgenden Sätze.

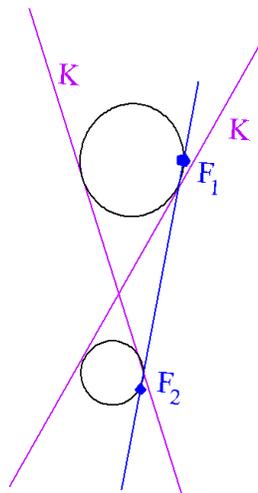


Abbildung 13: Dandelin'sche Kugeln

Satz 4.1 Die Differenz der Abstände $|\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}|$ ist für jeden Hyperbelpunkt P dieselbe.

Satz 4.2 Die Summe der Abstände $|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}|$ ist für jeden Ellipsenpunkt P dieselbe.

Man nutzt dabei jeweils aus, dass $|\overline{PF_i}| = \text{Distanz von } P \text{ zum jeweiligen Berührungskreis } \kappa_i$ ist und dass die fragliche Differenz bzw. Summe gerade die Distanz von κ_1 zu κ_2 ist.

Satz 4.3 Für alle Hyperbel- bzw. Ellipsenpunkte werden die Winkel zwischen den beiden Geraden F_1P und F_2P von der Tangente und der Normale durch P halbiert.

Satz 4.4 Zur Parabel gibt es eine „Leitlinie“ l mit der Eigenschaft, dass für alle Parabelpunkte P die Entfernungen zu l und zu F gleich sind.

Man vergleiche hierzu Übungsaufgabe 10. Auch zu Satz 4.3 gibt es ein Analogon für die Parabel: Lichtstrahlen, die parallel zur Symmetrieachse in die Parabel einfallen, werden von der Parabel in den Brennpunkt F gespiegelt.

5 Der Dualraum

Erinnerung. V sei ein K -Vektorraum. Eine *Linearform* $f : V \rightarrow K$ ist eine lineare Abbildung in den Grundkörper. Mit Wahl einer Basis v_1, \dots, v_n von V und der Basis 1 von K lässt sich f schreiben als

$$f(x) = f(x_1v_1 + \dots + x_nv_n) = x_1f(v_1) + \dots + x_nf(v_n) = \sum_i a_i x_i = (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

wenn die $a_i := f(v_i)$ bezeichnen und wir x mit dem Spaltenvektor $(x_1, \dots, x_n)^T$ seiner Koordinaten bezüglich der gewählten Basis identifizieren. Offensichtlich ist der

Satz 5.1 Die Linearformen auf V bilden bezüglich punktweiser Addition und Multiplikation mit Skalaren einen K -Vektorraum V^* . Wenn $\dim V = n < \infty$, kann man ihn durch Basiswahl in V mit dem Vektorraum $K^{1 \times n}$ der 1-zeiligen und n -spaltigen Matrizen identifizieren. Insbesondere ist

$$\dim V^* = \dim V \quad \Rightarrow \quad V^* \cong V.$$

Der Isomorphismus hängt allerdings von der Basiswahl ab.

V^* heißt der *Dualraum* zu V , die Linearformen $v_i^* := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) : v_j \mapsto \delta_{ij}$ bilden die zu den v_j *duale Basis*.

Bemerkung. Klar, dass dann auch $V^{**} \cong V$ ist. Dieser Isomorphismus lässt sich aber sogar basisunabhängig wählen („kanonisch“), nämlich so: Jedes $x \in V$ definiert eine lineare Abbildung — ein Element von V^{**} vermöge der Auswertungsabbildung

$$x : V^* \rightarrow K \quad : \quad f \mapsto f(x).$$

Für alle x betrachtet, ergibt sich dadurch eine Abbildung $V \rightarrow V^{**}$, von der man leicht zeigen kann, dass sie linear und injektiv ist. Surjektiv ist sie leider nur bei endlicher Dimension!

Für endlichdimensionale euklidische Vektorräume liefert auch das Skalarprodukt eine Identifikation von V mit V^* , nämlich jedes $y \in V$ ergibt eine lineare Abbildung

$$\langle y, \rangle : x \mapsto \langle y, x \rangle \in \mathbf{R},$$

und zwar genau eine, denn $\langle y_1, \rangle = \langle y_2, \rangle \Leftrightarrow y_1 = y_2$; warum wohl?

Satz 5.2 Sei $F : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung von K -Vektorräumen. Dann wird durch $f \mapsto f \circ F$ eine lineare Abbildung $F^* : W^* \rightarrow V^*$ definiert, die zu F „adjungierte Abbildung“ mit den Eigenschaften

- $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$ für alle linearen Abbildungen $G : U \rightarrow V$, und mit
- $F^{**} = F$, wenn $\dim V < \infty$.

Wird zu den Basen B, C von V bzw. W die entsprechende duale Basis von V^* und W^* gewählt, und wenn $M = {}_B M_C(F)$ die Matrix von F in diesen Basen ist, dann wird F^* in den dualen Basen durch M^T dargestellt.

Beweis von $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$ einfach durch Nachrechnen — oder bei geeigneter Basiswahl mit Hilfe von $(MN)^T = N^T M^T$, denn bei Verwendung der dualen Basis für V^* und W^* schreibt sich wie oben $f \in W^*$ als $f(x) = (a_1, \dots, a_m)x = a^T x$, d.h. mit $x = F(y) = My$ wird

$$F^*(f)(y) = f(F(y)) = a^T My = (M^T a)^T y \quad \Rightarrow$$

$f \mapsto F^*(f)$ wird beschrieben durch $a \mapsto M^T a$. Ebenso folgt $F^{**} = F$.

Definition. Sei U Untervektorraum des K -Vektorraums V . Dann sei

$$U_0 := \{ f \in V^* \mid f(v) = 0 \forall v \in U \}$$

(manchmal auch etwas irreführend mit U^\perp bezeichnet).

Satz 5.3 Sei V ein K -Vektorraum der Dimension n . Für alle Untervektorräume $U, U' \subset V$ sind U_0, U'_0 Untervektorräume von V^* mit

1. $\dim U_0 = n - \dim U$
2. $U_{00} = U \subset V^{**} = V$
3. $(U + U')_0 = U_0 \cap U'_0$
4. $(U \cap U')_0 = U_0 + U'_0$
5. $U \subset U' \Leftrightarrow U_0 \supset U'_0$.

Beweis. 5) ist evident. 1) folgt z.B. durch geschickte Basiswahl: Man ergänze eine Basis e_1, \dots, e_r von U durch e_{r+1}, \dots, e_n zu einer Basis von V , dann bilden e_{r+1}^*, \dots, e_n^* eine Basis von U_0 .

2) Entsprechend ist dann e_1, \dots, e_r wiederum eine Basis von U_{00} .

Für 3) und 4) siehe Übungsaufgabe 12.

Durch Vertauschen von Vektorraum und Dualraum folgt darum eine wichtige „Meta-Aussage“, nämlich das *Dualitätsprinzip der linearen Algebra*

Satz 5.4 *Aus jedem Satz über endlichdimensionale K -Vektorräume, der mit „+“, „ \subset “ und „ \cap “ und Dimensionen formuliert ist, folgt ein weiterer Satz durch Vertauschung von „+“ und „ \cap “, von „ \subset “ und „ \supset “ und Übergang zu den jeweiligen Codimensionen.*

6 Projektive Geometrie

Begriffe und einfache Eigenschaften. Sei V ein K -Vektorraum der Dimension $n + 1$. Auf $V \setminus \{0\}$ sei durch

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad \exists r \in K^* : x = ry$$

eine Äquivalenzrelation definiert. Die Menge der Äquivalenzklassen $[x] = K^*x$ bildet die Punktmenge des n -dimensionalen projektiven Raumes $\mathbf{P}^n(K) = \mathbf{P}(V)$. Geraden im $\mathbf{P}^n(K)$ sind die Mengen

$$g := \{ [x] \in \mathbf{P}(V) \mid x \in G \setminus \{0\} \},$$

wenn G ein 2-dimensionaler (!) Untervektorraum von V ist. Entsprechend bestehen *projektive Unterräume* der Dimension m aus den Punkten $[x]$ mit $x \in U$, $x \neq 0$, für die U ein Untervektorraum in V von Dimension $m + 1$ ist.

Veranschaulichung. Sei $\mathbf{A} = \mathbf{A}(K^n)$ der n -dimensionale affine Raum, eingebettet in den K^{n+1} vermöge

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (1, x_1, \dots, x_n).$$

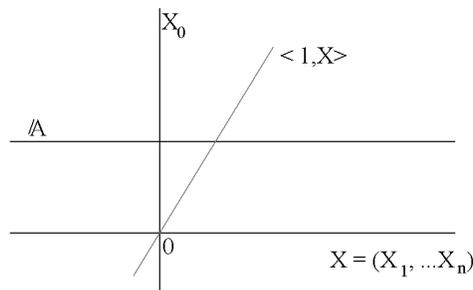


Abbildung 14: Affiner Unterraum eines projektiven Raums

Dann besitzt jeder Punkt von \mathbf{A} genau einen Repräsentanten in \mathbf{P} , und alle $[x_0, x_1, \dots, x_n] \in \mathbf{P}$ liegen in \mathbf{A} , wenn sie nur $x_0 \neq 0$ erfüllen, denn dann sind sie ebenso repräsentiert von $(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0})$. Was zu \mathbf{A} neu hinzukommt, sind jene $[x]$ mit $x_0 = 0$, die Punkte am *Horizont* von \mathbf{A} , auch *Fernpunkte* oder *unendlich ferne Punkte* genannt — von \mathbf{A} aus gesehen. Wir werden noch sehen, dass die neuen Punkte die Rolle von Schnittpunkten der bisherigen affinen Parallelen übernehmen. Parallelen gibt es nämlich nicht mehr in dieser neuen Geometrie:

Satz 6.1 1) Zu je zwei Punkten $A \neq B \in \mathbf{P}^n(K)$ gibt es genau eine Verbindungsgerade $A \vee B = g \subset \mathbf{P}$, d.h. mit $A \in g, B \in g$.
 2) Zwei Geraden $g \neq h \subset \mathbf{P}^2(K)$ der projektiven Ebene haben genau einen Schnittpunkt.

Beweis. 1) Seien $\langle a \rangle, \langle b \rangle$ die beiden eindimensionalen Unterräume des K^{n+1} , die — nach Entfernung des Nullvektors — die Punkte A, B ergeben. Wegen $A \neq B$ sind a und b linear unabhängig, also ist $\langle a, b \rangle$ ein zweidimensionaler Unterraum des K^{n+1} (leider die gleiche Notation wie das Skalarprodukt, zu dumm), und zwar der einzige, welcher a und b enthält. Er definiert also eine eindeutig bestimmte Verbindungsgerade von A und B .
 2) G und H seien die beiden 2-dimensionalen Unterräume des K^3 , welche die Geraden g und h definieren.

$g \neq h \Rightarrow G \neq H \Rightarrow G + H = K^3 \Rightarrow \dim G \cap H = \dim G + \dim H - \dim K^3 = 1 \Rightarrow G \cap H$ definiert genau einen Punkt in $\mathbf{P}^2(K)$, natürlich in g und h gelegen.

Satz 6.2 Zu jeder projektiven Hyperebene $H \subset \mathbf{P}^n(K)$, also mit $\dim H = n - 1$, bildet $\mathbf{A} := \mathbf{P}^n(K) \setminus H$ einen affinen Raum der Dimension n .

Beweis am einfachsten durch einen geschickten Koordinatenwechsel: H wird durch eine *homogene lineare Gleichung*

$$\sum_0^n a_i x_i = a^T x = 0, \quad a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^{n+1},$$

definiert, $a \neq 0$. Man wähle also einfach eine lineare Abbildung $K^{n+1} \rightarrow K^{n+1} : x \mapsto Mx = y$, $y^T = (y_0, y_1, \dots)$, mit a^T als erster Zeile von M . Dann wird H durch $y_0 = 0$ definiert, auf $\mathbf{P}^n \setminus H$ darf man also wie oben die Normierung $y_0 = 1$ vornehmen.

Definitionen. Die x_i in $[x_0, \dots, x_n]$ heißen *homogene Koordinaten*. Sie sind nur bis auf gemeinsame Vielfache eindeutig durch den Punkt $[x]$ bestimmt. Jedes $M \in \text{GL}_{n+1}(K)$ definiert eine *projektive lineare Abbildung*. Diese hat genau dann die gleiche Wirkung wie $M' \in \text{GL}_{n+1}(K)$, wenn $M = rM'$ ist mit einem $r \in K^*$. Die Gruppe $\text{GL}_{n+1}(K)$ modulo der skalaren Vielfachen der Einheitsmatrix besitzt eine wohldefinierte Gruppenstruktur und wird darum als *projektive lineare Gruppe* $\text{PGL}_{n+1}(K)$ für $\mathbf{P}^n(K)$ bezeichnet.

Satz 6.3 Die Wirkung einer projektiven linearen Abbildung auf den affinen Unterräumen kann als Kombination einer affinen Abbildung mit einer Zentralprojektion beschrieben werden.

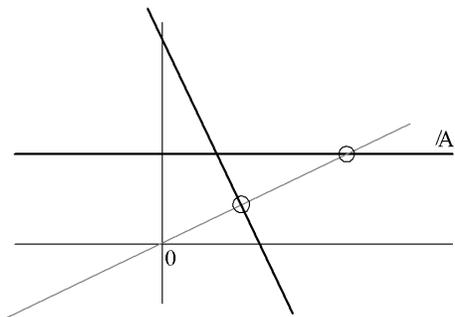


Abbildung 15: Zwei affine Unterräume im \mathbf{P}^n

Beweis. M bildet den affinen Teilraum \mathbf{A} in einen anderen affinen Teilraum $M(\mathbf{A})$ ab. Will man die Auswirkung auf \mathbf{A} selbst studieren, muss man dann alle Repräsentanten in $M(\mathbf{A})$ durch Repräsentanten in \mathbf{A} ersetzen; geometrisch ist das eine Zentralprojektion mit Zentrum 0 von $M(\mathbf{A})$ auf \mathbf{A} .

Vorsicht: Die Zentralprojektion ist keine Abbildung im üblichen Sinn, denn es gibt i.a. Punkte in $M(\mathbf{A})$, welche von \mathbf{A} aus gesehen am Horizont liegen, die also bei der Zentralprojektion keinen Bildpunkt haben, und ebenso kann es Punkte in \mathbf{A} geben, die kein Urbild in $M(\mathbf{A})$ haben, weil sie für $M(\mathbf{A})$ zu den Fernpunkten gehören.

Satz 6.4 Zentralprojektionen lassen selbst für $K = \mathbf{R}$ i.a. weder Längen noch Winkel noch Längenverhältnisse fest, wohl aber das „Doppelverhältnis“

$$\frac{|P_1P_3|}{|P_1P_4|} : \frac{|P_2P_3|}{|P_2P_4|}$$

von vier Punkten P_1, \dots, P_4 auf einer Geraden.

In der Formulierung tun wir stillschweigend so, als wäre $K = \mathbf{R}$ und sowohl die Punkte wie die Bildpunkte auf dem affinen Teil einer Geraden gelegen, den wir dann in der üblichen Weise mit einer euklidischen Metrik versehen können. Beides lässt sich vermeiden, indem man etwa den Horizont so legt, dass kein P_i und keines seiner Bilder unendlich ferner Punkt wird, und die Längen mag man ersetzen, indem man den affinen Teil der Geraden mit K identifiziert und die Längen einfach durch Differenzen in K .

Für den *Beweis* beschränken wir uns auf den Fall $K = \mathbf{R}$ und nehmen an, dass die vier Punkte auf (dem endlichen Teil) einer Geraden g liegen, der das Zentrum 0 der Zentralprojektion natürlich nicht enthält. Mit α_{ij} sei der Winkel $\angle P_i0P_j$ bezeichnet, mit γ_i

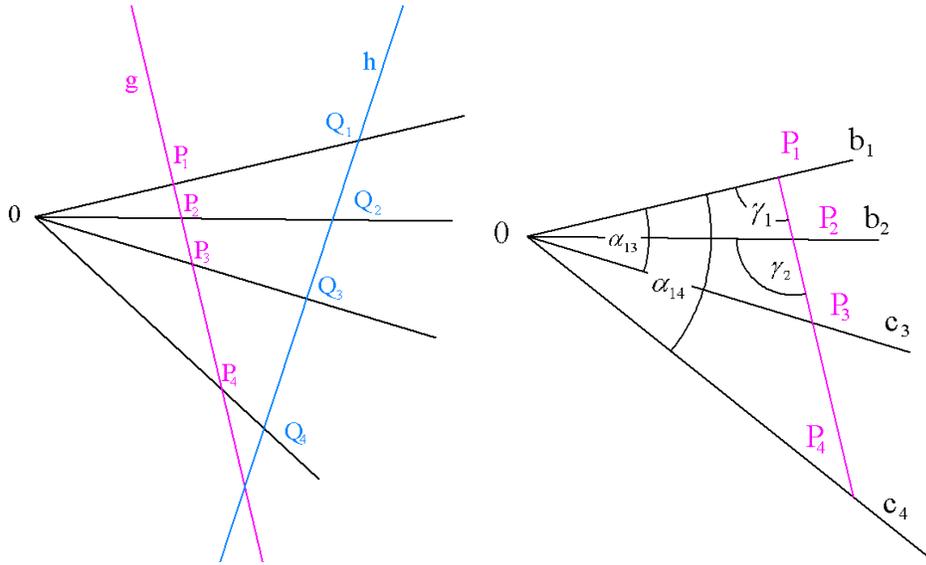


Abbildung 16: Invarianz des Doppelverhältnisses

der Winkel $\angle 0P_iP_j$, also der Winkel zwischen der Gerade g und dem Projektionsstrahl $0P_i$. Längen und Winkel sind also gemeint in einer euklidischen Ebene, welche 0 und g enthält; in diesem Sinne sei auch $c_i := |\overline{0P_i}|$. Wir wenden jetzt auf alle Dreiecke $0P_jP_i$ den Sinussatz der Elementargeometrie an und erhalten z.B.

$$\frac{|\overline{P_1P_3}|}{\sin \alpha_{13}} = \frac{c_3}{\sin \gamma_1} \quad , \quad \frac{|\overline{P_1P_4}|}{\sin \alpha_{14}} = \frac{c_4}{\sin \gamma_1} .$$

In ihrem Quotient kürzt sich $\sin \gamma_1$ weg; macht man dasselbe für P_2 anstelle von P_1 und bildet das Doppelverhältnis, kürzen sich auch noch c_3, c_4 weg, das Doppelverhältnis wird zu

$$\frac{\sin \alpha_{13}}{\sin \alpha_{14}} : \frac{\sin \alpha_{23}}{\sin \alpha_{24}} ,$$

hängt darum nur noch von den Richtungen der Projektionsstrahlen, nicht mehr von der Lage von g ab. Klar, dass dann die Bildpunkte auf der Geraden h das gleiche Doppelverhältnis besitzen.

Erinnerung an die Lineare Algebra, Kapitel Affine Räume. Dort konnte man affine Ebenen axiomatisch beschreiben durch Vorgabe einer Punktmenge \mathcal{P} , einer Menge \mathcal{G} von nichtleeren Geraden $g \subset \mathcal{P}$ und einer *Inzidenzrelation* $P \in g$, welche die folgenden Axiome erfüllt.

- 1) Verbindungsaxiom: Zu je zwei $P \neq Q \in \mathcal{P}$ gibt es genau ein $P \vee Q =: g \in \mathcal{G}$ mit $P, Q \in g$.
- 2A) $\forall g \in \mathcal{G}, \forall P \in \mathcal{P}$ gibt es genau ein $h \in \mathcal{G}$ mit $P \in h$ und $h = g$ oder $h \cap g = \emptyset$, kurz $h \parallel g$ geschrieben (*parallel* zu g).
- 3) Reichhaltigkeitsaxiom: Es gibt vier Punkte *in allgemeiner Lage*, d.h. so dass keine drei unter ihnen auf einer Geraden liegen (*kollinear* sind).

Um projektive Ebenen zu erhalten, ersetzen wir einfach nur das Parallelenaxiom 2A) durch 2P) $\forall g \neq h \in \mathcal{G}$ gibt es genau einen *Schnittpunkt* $P \in g \cap h$.
 Man beachte: 1), 2P) und 3) sind für alle $\mathbf{P}^2(K)$ erfüllt. 1) und 2P) sind in folgendem Sinne *dual* zueinander.

Satz 6.5 *Was man aus dem Axiomensystem 1), 2P), 3) für Punkte, Geraden und Inzidenz \in beweisen kann, bleibt gültig, wenn man diese Begriffe jeweils ersetzt durch Geraden, Punkte und Inzidenz \ni . Bei dieser Ersetzung werden die Begriffe „Verbindungsgerade“ und „Schnittpunkt“ vertauscht.*

Dies gilt nicht nur für die axiomatischen projektiven Ebenen, sondern ebenso für alle projektiven Ebenen $\mathbf{P}^2(K)$ über Körpern.

Der *Beweis* des ersten Teils folgt direkt aus der Formulierung der Axiome, der zweite Teil ist unmittelbare Konsequenz des Dualitätsprinzips der Linearen Algebra (Satz 5.4). Man beachte dazu, dass Punkte der projektiven Ebene im wesentlichen 1–dimensionale Unterräume von K^3 , Geraden im wesentlichen 2–dimensionale Unterräume sind.

Das nächste Kapitel wird den Nutzen dieses Dualitätssatzes verdeutlichen, zunächst soll der Zusammenhang zwischen projektiver und affiner Geometrie aber noch an zwei Punkten erläutert werden.

Satz 6.6 *a) Entfernt man aus der projektiven Ebene \mathbf{P} eine Gerade u , so entsteht eine affine Ebene. In dieser sind zwei Geraden g und h parallel, wenn sie in \mathbf{P} ihren Schnittpunkt in u hatten.*

b) Gegeben eine affine Ebene \mathbf{A} . Zu jeder Äquivalenzklasse $[h]$ paralleler Geraden (also der Parallelschar von h) definiert man sich einen neuen „unendlich fernen“ Punkt $[h]$ sowie eine neue Gerade $H := \{[h] \mid h \in \mathcal{G}\}$. Dann bilden

$$\mathcal{P} \cup \{[h] \mid h \in \mathcal{G}\} \quad \text{die Punktmenge und} \quad \mathcal{G} \cup \{H\} \quad \text{die Geradenmenge}$$

einer projektiven Ebene.

Der *Beweis* ergibt sich direkt durch Vergleich der Axiomensysteme.

Satz 6.7 *Die Kegelschnitte Ellipse, Parabel, Hyperbel sind affine Teilkurven der gleichen projektiven Kurve im $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$. Sie entstehen durch Zentralprojektion auseinander.*

Zum *Beweis* kann man zunächst an die geometrische Einsicht appellieren: Der Kegel $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$ im \mathbf{R}^3 ist durch eine homogene Gleichung definiert und liefert darum eine wohldefinierte Punktmenge im $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ (Aufgabe 15), genauer eine *projektive Quadrik*. Affine Teilkurven dieser Quadrik sind einfach Schnitte mit affinen Ebenen, die man auf verschiedene Weise in den \mathbf{P}^2 legen kann, d.h. indem man zweidimensionale affine Unterräume im \mathbf{R}^3 auszeichnet, welche allerdings den Nullpunkt nicht enthalten dürfen. Mit anderen

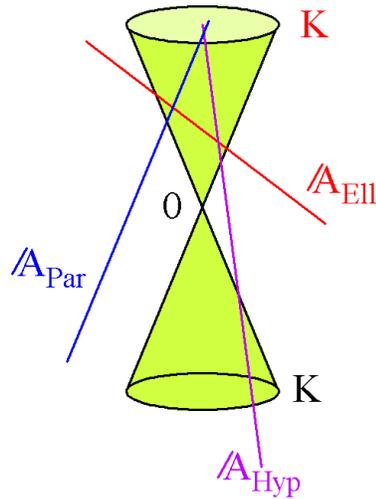


Abbildung 17: Drei affine Teilräume des \mathbf{P}^2

Worten hat man den Kegel zu schneiden mit Ebenen, die nicht durch 0 gehen, und genau das liefert bekanntlich alle Kegelschnitte. Diese verschiedenen affinen Teilkurven gehen — genau wie verschiedene affine Ebenen im \mathbf{P}^2 — auseinander hervor durch Zentralprojektion mit Zentrum 0. Dabei werden die verschiedenen Versionen der Kegelschnitte ineinander übergeführt.

Rechnerisch sieht man sofort, dass die affine Ebene mit $x_3 = 1$ auf einen Kreis führt und jene mit $x_1 = 1$ auf eine Hyperbel. Für die Parabel vgl. Aufgabe 16.

Es ist ganz aufschlussreich, sich zu überlegen, welche Punkte der projektiven Quadrik für die jeweils gewählte affine Ebene „im unendlichen“ liegen. Die beiden *Asymptoten* $x_2 = \pm x_3$ der Hyperbel $x_3^2 - x_2^2 = 1$ werden zu Tangenten in den beiden Horizontpunkten $(0, \pm 1, 1)$, wie man etwa in der anderen affinen Ebene $x_3 = 1$ sieht, in der die Quadrik den Kreis $x_1^2 + x_2^2 = 1$ darstellt: Hier sind sie die Tangenten $x_2 = \pm 1$.

7 Die Sätze von Desargues und Pappos

Satz 7.1 („Großer Satz von DESARGUES“) *Im $\mathbf{P}^2(K)$ seien zwei Dreiecke ABC , $A'B'C'$ in „perspektiver Lage“ gegeben, d.h. die Geraden AA' , BB' , CC' haben einen gemeinsamen Schnittpunkt Z . Dann sind die drei Schnittpunkte $L := AB \cap A'B'$, $M := AC \cap A'C'$ und $N := BC \cap B'C'$ kollinear.*

Beweis 1. Man wähle eine Horizontgerade u so aus, dass alle Punkte im endlichen $\mathbf{A} \subset \mathbf{P}^2(K)$ liegen, liest das Bild als Grundriss einer Dreieckspyramide mit Spitze Z , die von zwei Ebenen E und E' in zwei Dreiecken geschnitten wird. $E \cap E'$ ist eine Gerade und muss die drei Schnittpunkte M , L , N enthalten.

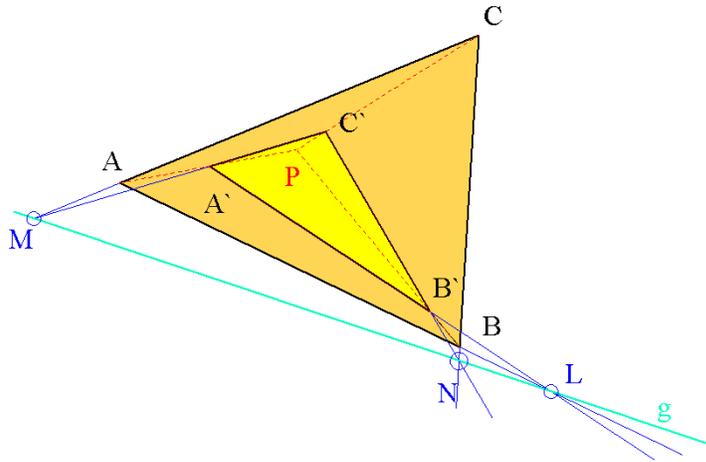


Abbildung 18: Großer Satz von Desargues

Beweis 2. Die Aussage des Satzes ist invariant gegen *Projektivitäten*, d.h. inzidenzerhaltenden Abbildungen $\mathbf{P}^2 \rightarrow \mathbf{P}^2$, das sind insbesondere die schon besprochenen projektiv-linearen Abbildungen. Wir können u also als Verbindungsgerade von M und L wählen; für \mathbf{A} bedeutet das $AC \parallel A'C'$ und $AB \parallel A'B'$. Zu zeigen bleibt $(B \vee C) \cap (B' \vee C') = N \in u$, in \mathbf{A} also $BC \parallel B'C'$. Diese Aussage folgt z.B. aus den Strahlensätzen oder vektoriell.

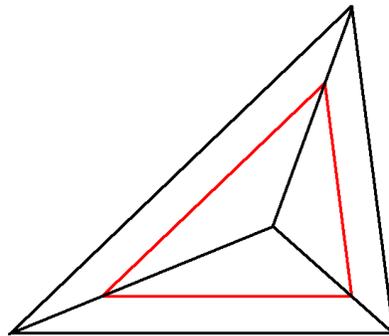


Abbildung 19:

Folgerung. Legt man das Perspektiv-Zentrum Z ins Unendliche, so ergibt sich im Affinen der *kleine Satz des DESARGUES*: Wenn $AA' \parallel BB' \parallel CC'$, dann sind die drei Schnittpunkte $L := AB \cap A'B'$, $M := AC \cap A'C'$ und $N := BC \cap B'C'$ kollinear.

Dualisierung des großen Desargues vermöge Satz 6.5 ergibt die folgende Umkehrung.

Satz 7.2 Gegeben eine Gerade z , darauf drei Punkte, in denen sich jeweils die Geraden

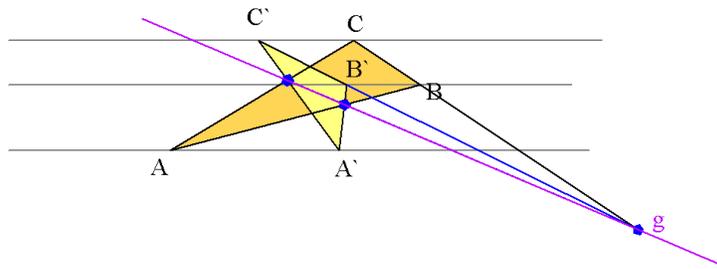


Abbildung 20: Kleiner Satz des Desargues

a, a' bzw. b, b' bzw. c, c' treffen. Dann treffen sich die drei Verbindungsgeraden

$$(a \cap b) \vee (a' \cap b') \quad , \quad (a \cap c) \vee (a' \cap c') \quad , \quad (b \cap c) \vee (b' \cap c')$$

in einem Punkt.

Satz 7.3 (PAPPUS) Auf den Geraden $g \neq g'$ des $\mathbf{P}^2(K)$ seien zwei Punktetripel ABC bzw. $A'B'C'$ gelegen. Dann sind die drei Schnittpunkte

$$AB' \cap A'B \quad , \quad BC' \cap B'C \quad AC' \cap A'C$$

kollinear.

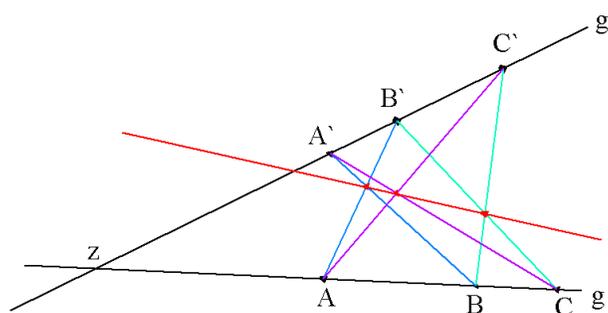


Abbildung 21: Satz des Pappos

Beweis. Sei u die Verbindungsgerade der beiden Schnittpunkte $AB' \cap A'B$ und $BC' \cap B'C$. Entfernen wir u aus der projektiven Ebene, bleibt eine affine Ebene \mathbf{A} übrig, in der $AB' \parallel A'B$, $BC' \parallel B'C$ ist; zu zeigen ist dann $AC' \parallel A'C$. Wenn in \mathbf{A} die beiden Geraden

parallel sind, ist der Satz dann der *kleine Satz des Pappos*, leicht zu beweisen durch Translation längs der Richtung von g bzw. g' . Setzen wir also voraus, dass $g \cap g' \in \mathbf{A}$ liegt und identifizieren diesen Schnittpunkt mit dem Nullpunkt 0 des K^2 , A und C' mit den beiden Basisvektoren $v, w \in K^2$. Genauso identifizieren wir B mit tv und B' mit sw , dabei $t, s \in K$ und $\neq 0, 1$. Die Voraussetzung $AB' \parallel A'B$, $A' \in g'$ ist dann äquivalent zu $A' = tsw$ und die Voraussetzung $BC' \parallel B'C$, $C \in g$ bedeutet $C = stv$. Wegen $st = ts$ folgt daraus mit $C - A' = st(A - C')$ die gewünschte Parallelität.

Wie wir noch sehen werden, ist die unscheinbare Eigenschaft „Kommutativität“ tatsächlich ein Schlüssel zum Satz von Pappos. Der Satz des Desargues hingegen bleibt auch dann gültig, wenn K nur ein *Schiefkörper* ist, in dem die Kommutativität der Multiplikation nicht notwendig richtig ist; Beispiel dafür sind die HAMILTONSchen Quaternionen.

Zunächst aber noch zwei Ergänzungen zum Satz des Pappos. Die erste ist seine Dualisierung vermöge des Satzes 6.5, die zweite eine Verallgemeinerung auf Kegelschnitte, die wir hier allerdings nicht beweisen werden — man erinnere sich daran, dass zwei sich schneidende Geraden eigentlich ein entarteter Kegelschnitt sind.

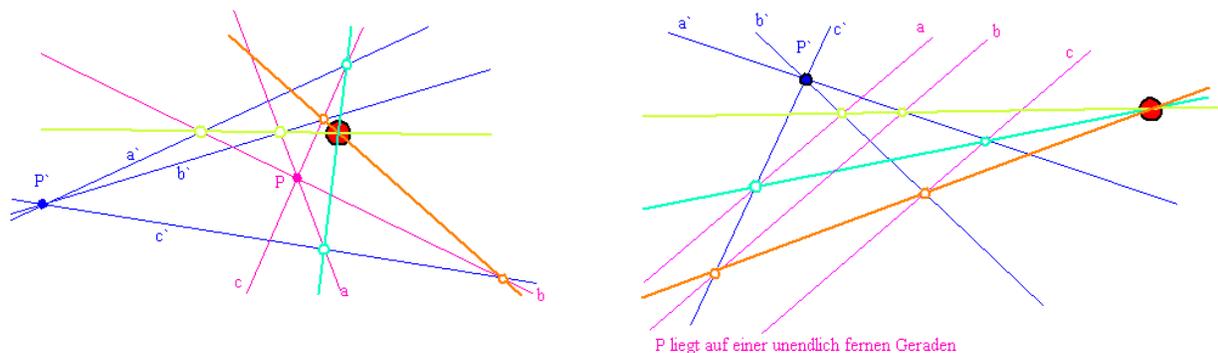


Abbildung 22: Satz von Brianchon

Satz 7.4 (BRIANCHON) Gegeben zwei Punkte $P, P' \in \mathbf{P}^2(K)$ und zwei Geradenbüschel a, b, c bzw. a', b', c' durch P bzw. P' . Dann verlaufen die drei Verbindungsgeraden

$$l := (a \cap b') \vee (a' \cap b) \quad , \quad m := (a \cap c') \vee (a' \cap c) \quad , \quad n := (b \cap c') \vee (b' \cap c)$$

durch einen Punkt.

Satz 7.5 (PASCAL) Die Aussage des Satzes von PAPPUS gilt ebenso für je sechs Punkte A, A', B, B', C, C' auf einem Kegelschnitt.

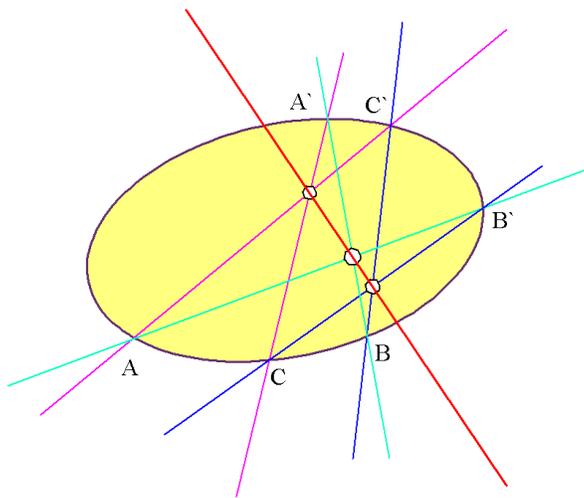


Abbildung 23: Satz von Pappos–Pascal

8 Axiomatik und Koordinateneinführung: ein Bericht

Die „**Grundlagen der Geometrie**“ behandeln das Problem, ein Axiomensystem für die Geometrie zu finden, aus dem sich alle geometrischen Aussagen ableiten lassen. Insbesondere möchte man daran erkennen können, dass man sich in der vertrauten Geometrie z.B. des $\mathbf{A}^2(K)$ befindet. M.a.W. sollte die Existenz und das genaue Aussehen eines Koordinatenkörpers aus den Axiomen der Geometrie folgen. Was lässt sich z.B. aus den Axiomen 1), 3), 2A) bzw. 2P) (vgl Kap. 6) für die Ebene herleiten? Beispiele einiger Aussagen für endliche Ebenen:

Satz 8.1 1) *Alle Geraden besitzen gleich viele Punkte (n im affinen, $n + 1$ im projektiven Fall. n heißt in beiden Fällen die „Ordnung“ der Ebene).*

2) *Jeder Punkt inzidiert mit $n + 1$ Geraden.*

3) *Die affine Ebene besteht aus n^2 , die projektive aus $n^2 + n + 1$ Punkten.*

4) *Im \mathbf{A}^2 besteht jede Parallelschar aus n Geraden.*

Bemerkungen. a) Die endlichen Ebenen lösen ein Problem der Kombinatorik, nämlich die Konstruktion von $2 - (s, k, 1)$ -Blockplänen, d.h. von s -elementigen Mengen E mit einem System von k -elementigen Untermengen $g \subset E$, den *Blöcken* (hier: Geraden), welche der folgenden Eigenschaft genügen: Je 2 Elemente $P \neq Q \in E$ liegen in genau einem Block $g \subset E$. Hier wäre also $s = n^2$, $k = n$ bzw. $s = n^2 + n + 1$, $k = n + 1$.

Andere Anwendungen sind z.B. die Konstruktion *orthogonaler lateinischer Quadrate* oder die Konstruktion *irrtumskorrigierender Codes*.

b) Für welche $n \in \mathbf{N}$ gibt es also Ebenen der Ordnung n ? Jedenfalls für Primzahlpotenzen $n = p^e$, weil zu jedem solchen p^e ein endlicher Körper \mathbf{F} mit genau p^e Elementen existiert, bis auf Isomorphie sogar genau einer! (\Leftarrow Algebra). Gibt es also Ebenen anderer Ordnung

$n \neq$ Primzahlpotenz? Bis heute ist keine bekannt, und man vermutet, dass es keine gibt, aber bewiesen ist das bisher nur für spezielle Klassen natürlicher Zahlen. Die Ordnungen $n = 6$ und 10 treten jedenfalls nicht auf, aber insbesondere für 10 ist das extrem schwer zu beweisen.

Problem: Aus den bisherigen Axiomen gelingt es nicht, einen Koordinatenkörper K zu erschließen, für den z.B. $E = \mathbf{A}^2(K)$ wäre.

Grund: In einer solchen Ebene würden die Sätze von DESARGUES und PAPPUS gelten, und diese kann man aus den bisherigen Axiomen nicht ableiten. Es gibt nämlich Modelle für diese Axiomensysteme, in denen DESARGUES und PAPPUS nicht richtig sind (die MOULTON–Ebene), und es ist darum kein Wunder, wenn DESARGUES und PAPPUS bei der Konstruktion von Koordinaten eine wesentliche Rolle spielen. Wir wollen im folgenden einige wenige wichtige Schritte dieser Konstruktion nachvollziehen.

1. Akt: Wie stellt man die additive Gruppe $(K, +)$ des Körpers aus der Geometrie der affinen Ebene \mathbf{A} her? Die Gruppe sollte isomorph zur Gruppe der Translationen von \mathbf{A} in einer Richtung werden, d.h. einer Bewegungsgruppe, welche die Geraden einer Parallelschar fixiert. Auf jeder dieser Geraden sollte eine Bijektion $\{ \text{Punkte} \} \leftrightarrow K$ existieren, o.B.d.A. dabei die 0 jeweils auf einer Geraden g_0 , welche die Parallelschar schneidet.

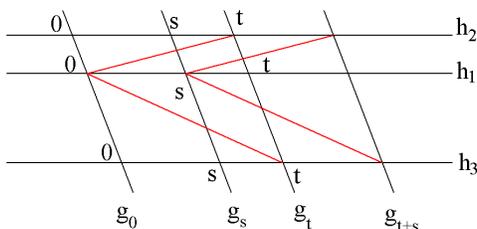


Abbildung 24: Kleiner Desargues: Translationsgruppe

Man bezeichne zunächst die Punktmenge einer Geraden h_1 der Parallelschar mit K , ziehe für jedes $s \in K$ dann eine Parallele g_s zu g_0 durch den richtigen Punkt auf h_1 , um eine Bijektion per Schnitt mit g_s mit den Punktmenge aller anderen Geraden der Parallelschar herzustellen. Eine wohldefinierte Addition $(s, t) \mapsto s + t$ ergibt sich durch das in der Zeichnung skizzierte Verfahren: Sei $(g_0 \cap h_1) \vee (g_t \cap h_2) =: a$, wähle dazu die Parallele a' durch $g_s \cap h_1$ und schneide $a' \cap h_2$, dann müsste der Schnitt auf g_{s+t} liegen. Diese Konstruktion bestimmt g_{s+t} eindeutig nach Axiom 2A), ist aber nur dann wohldefiniert, wenn sie nicht von der Auswahl von h_2 abhängt. Testet man die Konstruktion an einer dritten Parallelen $h_3 \parallel h_2 \parallel h_1$, so sieht man, dass sie genau dann auf die gleiche Parallele von g_0 führt, wenn der kleine Satz von DESARGUES richtig ist.

2. Akt: Wie führt man eine Multiplikation auf K ein? Man zeichne zwei Koordinatenachsen aus, benutze die gefundene Bijektion auf beiden mit 0 im Schnittpunkt der beiden Achsen und einem Element $\neq 0$ aus K , das die Rolle der 1 übernehmen soll. Dann muss die Konstruktion der Multiplikation $(s, t) \mapsto st$ wie in der Skizze vorgenommen werden, die

durch den Strahlensatz nahegelegt wird.

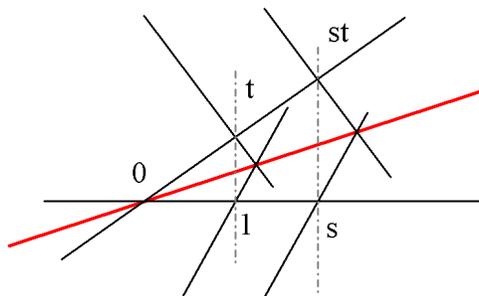


Abbildung 25: Großer Desargues: Existenz der Multiplikation

Diese Konstruktion darf aber nicht von der Auswahl der Achsen abhängen. Wie das Bild nahelegt, tut sie das genau dann nicht, wenn der große Satz von DESARGUES für die fragliche Geometrie richtig ist.

3. Akt: Ist die so konstruierte Multiplikation kommutativ? Offenbar dann, wenn in dieser Konstruktion die Umkehrung der Konstruktions-Reihenfolge das Resultat nicht verändert, wenn also im nächsten Bild $g||g'$ wird.

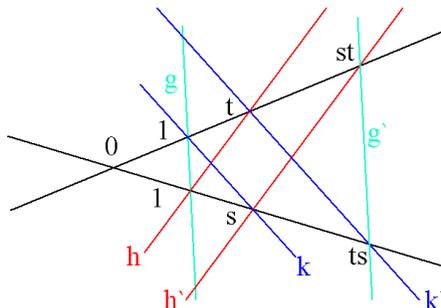


Abbildung 26: Pappos: Kommutativität der Multiplikation

Nach Konstruktion ist $h||h'$ und $k||k'$, also ist $g||g'$ genau dann richtig, wenn in unsere Geometrie der Satz von PAPPUS stimmt — was z.B. über echten Schiefkörpern wie den HAMILTONSchen Quaternionen nicht der Fall ist.

Diese drei Akte sind freilich nur Streiflichter auf dem sehr langen Weg von geometrisch-axiomatischen Forderungen zur Konstruktion geeigneter Koordinatenbereiche. Immerhin zeigen sie die interessante Wechselwirkung zwischen nichttrivialen geometrischen und starken algebraischen Eigenschaften.

Merkwürdigerweise ist geometrische Axiomatik in höheren Dimensionen wieder einfacher. Man erinnere sich an den ersten Beweis des großen Satzes von DESARGUES, der sich aus einem einfachen Projektionsargument ergab, weil die affine Ebene \mathbf{A} als Teil einer räumlichen Geometrie aufgefasst werden konnte — was eben nicht immer der Fall ist.

Die hier beschriebenen Konstruktionen machen deutlich, warum die Sätze von DESARGUES und PAPPUS manchmal *Schließungssätze* genannt werden. Führt man die Konstruktionen Schritt für Schritt durch, so kommt es am Ende immer darauf an, dass sich eine bestimmte Figur wieder schließt, indem z.B. eine am Ende konstruierte Parallele einen bereits zuvor konstruierten Punkt trifft.

9 Nochmal Gruppen und Geometrien

Definitionen, Bemerkungen. Eine *Projektivität* ist eine Bijektion eines $\mathbf{P}^n(K)$ auf sich, die projektive Unterräume auf projektive Unterräume gleicher Dimension abbildet und Inzidenzen erhält. Die Projektivitäten bilden eine Gruppe, enthalten insbesondere die schon erwähnte *projektive lineare Gruppe* $\text{PGL}_{n+1}(K) := \text{GL}_{n+1}/K^*E_{n+1}$. Manchmal enthält die $\text{PGL}_{n+1}(K)$ bereits alle Projektivitäten, aber nicht immer: Sie können z.B. mit echten Körperautomorphismen wie der komplexen Konjugation auf $K = \mathbf{C}$ kombiniert werden. Wir beschränken uns im folgenden auf die $\text{PGL}_{n+1}(K)$.

Auf affinen Unterräumen operiert sie nicht „wohldefiniert“, sondern als *gebrochen-lineare Abbildung*. Sei etwa $K = \mathbf{R}$ und $M \in \text{GL}_{n+1}(\mathbf{R})$ besitze die Zeilen m_0, m_1, \dots, m_n , dann operiert sie auf $\mathbf{P}^n(\mathbf{R}) \supset \mathbf{A}^n(\mathbf{R})$ vermöge

$$Mx = M \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0x \\ m_1x \\ \vdots \\ m_nx \end{pmatrix} \Rightarrow M : \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ m_1x/m_0x \\ \vdots \\ m_nx/m_0x \end{pmatrix},$$

also nicht wohldefiniert auf den Punkten des \mathbf{A}^n , in denen $m_0x = 0$ ist; diese werden auf den Horizont abgebildet, das Phänomen haben wir schon bei der Zentralprojektion gesehen. Wie vermeidet man dieses Problem? Man beschränkt sich auf die „richtige“ Untergruppe, indem wir nur noch solche M zulassen, welche $m_0x = 0$ nur auf der „unendlich fernen Hyperebene“ $x_0 = 0$ zulassen.

Satz 9.1 (Affine Geometrie) Sei $[U] \subset \mathbf{P}^n(K)$ eine $n - 1$ -dimensionale Hyperebene und $A_n(K) := \{M \in \text{PGL}_{n+1}(K) \mid M[U] = [U]\}$ die „affine Gruppe“ zu $\mathbf{A}^n(K) = \mathbf{P}^n(K) \setminus [U]$. Dann gilt

a) $A_n(K) \cong \text{GL}_n(K) \ltimes K^n$, wobei K^n der Normalteiler der Translationen auf $\mathbf{A}^n \leftrightarrow K^n$ und GL_n die affinen Transformationen mit Fixpunkt 0 sind.

b) Invariant unter $A_n(K)$ bleiben Streckenverhältnisse auf Geraden: Werden die Geraden jeweils mit K parametrisiert, dann ist für drei Punkte z_1, z_2, z_3 jeweils $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ unabhängig von der Parametrisierung und invariant unter der affinen Gruppe.

Beweis. $[U]$ sei o.B.d:A. durch $x_0 = 0$ definiert, $\mathbf{A}^n(K)$ wird dann also repräsentiert durch alle

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &\Rightarrow A_n(K) = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & \dots & 0 \\ & * & & \\ & & * & \\ & & & * \end{pmatrix} \bmod K^* E_{n+1} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & & & \\ \vdots & & M & \\ b_n & & & \end{pmatrix} \middle| M \in \mathrm{GL}_n(K), b_1, \dots, b_n \in K \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \middle| M \in \mathrm{GL}_n(K) \right\} \times \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & & & \\ \vdots & & E_n & \\ b_n & & & \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in K^n \right\} \end{aligned}$$

operiert auf $\mathbf{A}^n(K)$ vermöge

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + b_1 \\ \vdots \\ x_n + b_n \end{pmatrix}.$$

Klar, dass beide Faktoren Untergruppen sind, als Schnitt nur die Einheitsmatrix haben (also das Einselement) und zusammen die ganze Gruppe erzeugen. Fehlt nur der Nachweis, dass der zweite Faktor ein Normalteiler ist. Das ergibt sich daraus, dass er Kern des Gruppenhomomorphismus

$$A_n(K) \rightarrow \mathrm{GL}_n(K) : \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & & & \\ \vdots & & M & \\ b_n & & & \end{pmatrix} \mapsto M$$

ist. b) ist einfach nachzurechnen.

Ganz analog kann man verfahren, wenn man die affine Gruppe noch weiter einschränkt:

Satz 9.2 (Euklidische Geometrie) *Sei nun $K = \mathbf{R}$ und für die (auf dem \mathbf{R}^{n+1} ausgeartete) Bilinearform $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ sei*

$$\mathrm{Eu}(n) := \mathrm{Aut} \mathbf{E} = \{M \in A_n(\mathbf{R}) \subset \mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbf{R}) \mid \langle M(x), M(y) \rangle = \langle x, y \rangle, M[U] = [U]\}.$$

Dann ist $\mathrm{Eu}(n) \cong O_n \times \mathbf{R}^n$ mit der üblichen orthogonalen Gruppe und dem Normalteiler $T = \mathbf{R}^n$ der Translationen.

Satz 9.3 (Elliptische Geometrie) Sei $K = \mathbf{R}$, $n+1 = 3$ und $\langle x, y \rangle = x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2$ das Standard-Skalarprodukt. Dann ist

$$\text{Ell}(2) := \{M \in \text{PGL}_3(\mathbf{R}) \mid \langle M(x), M(y) \rangle = \langle x, y \rangle\} = O_3 / \pm E_3 =: PO_3$$

die Bewegungsgruppe der Einheitssphäre mit identifizierten Antipodenpunkten. Geraden in dieser Geometrie sind Großkreise auf der Kugel, natürlich unter der gleichen Antipodenidentifikation. Die übliche sphärische Geometrie ist eine 2-fache Überlagerung der elliptischen Geometrie.

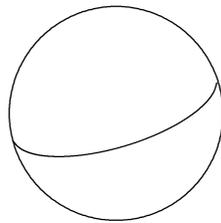


Abbildung 27: Elliptische Ebene

Satz 9.4 (Hyperbolische Geometrie, Klein-Beltrami-Modell) Im \mathbf{R}^3 sei die Bilinearform $[x, y] = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2$ gegeben (dabei $[x, x] = 0$ auf einem Kegel, < 0 in den beiden Komponenten seines Innern, > 0 außen). Das Kegelinere ergibt im $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ die „hyperbolische Ebene“ \mathbf{H} , repräsentiert durch die Punkte mit $x_0 = 1$ und $x_1^2 + x_2^2 < 1$, also dem Inneren des Einheitskreises, festgehalten durch die „hyperbolische Bewegungsgruppe“

$$\text{Hyp}(2) = \text{Aut } \mathbf{H} = \{M \in \text{PGL}_3(\mathbf{R}) \mid [Mx, My] = [x, y]\}.$$

Geraden sind dafür die Geradenabschnitte im Einheitskreis.

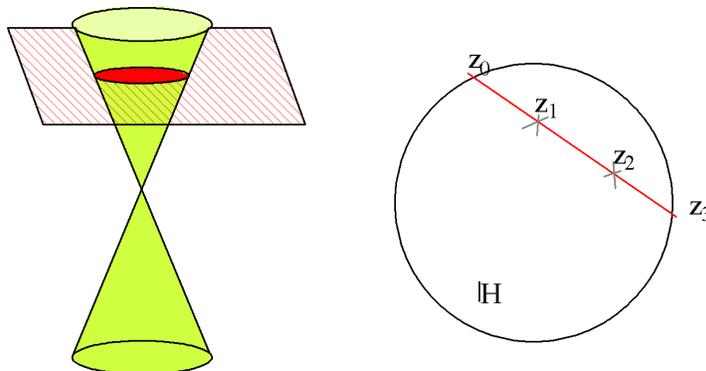


Abbildung 28: Hyperbolische Ebene, Klein-Beltrami-Modell

Das Parallelenaxiom gilt in dieser Geometrie nicht! Zur Einführung einer hyperbolischen Metrik bedenke man, dass das Doppelverhältnis von vier Punkten invariant ist und dass

die hyperbolische Bewegungsgruppe die Kreislinie in sich überführt. Es bietet sich also an, die durch zwei Punkte $z_1, z_2 \in \mathbf{H}$ definierte Gerade bis zu ihren Schnittpunkten z_0, z_3 mit der Kreislinie zu verlängern und als Abstand

$$d(z_1, z_2) := \left| \log \left(\frac{z_1 - z_0}{z_1 - z_3} : \frac{z_2 - z_0}{z_2 - z_3} \right) \right|$$

zu definieren mit irgendeiner vernünftigen Parametrisierung der Geraden durch reelle Zahlen, z.B. mit Hilfe euklidischer Abstände. Den Logarithmus nimmt man, damit der Abstand beim Aneinandersetzen von Strecken additiv wird, denn die Doppelverhältnisse multiplizieren sich (ausprobieren!).

Es gibt noch ein anderes Modell für die hyperbolischen Ebenen, das auf POINCARÉ zurückgeht, welches ebenfalls die Kreisscheibe benutzt (oder als Alternative die obere Halbebene, manchmal noch praktischer), in dem sich auch die Winkel bequem definieren lassen. Da es sich weniger direkt aus der projektiven Geometrie ergibt und einige Erfahrung im Umgang mit gebrochen-linearen Transformationen auf den komplexen Zahlen erfordert, sei es hier ausgespart.