Grundlegendes zu Kategorien

Jonathan Zachhuber

26. April 2011

Der Vortrag orientiert sich weitläufig an [BW05]. Manche Ansätze sind aber aus [Kü09] und [AHS90], sowie aus [MM07].

Definition 1 (Kategorie): Eine *Kategorie* $\mathcal{C}$ besteht aus zwei *Klassen*[1]: Den *Objekten* $\mathcal{O}b(\mathcal{C})$ und den *Pfeilen* $\mathcal{A}r(\mathcal{C})$. Jedem Pfeil f ist ein Paar Objekte (A, B) zugeordnet und man schreibt $f\colon A \longrightarrow B$. Haben wir zwei Pfeile $f\colon A \longrightarrow B$ und $g\colon B \longrightarrow C$, fordern wir die Existenz eines dritten Pfeils $g \circ f\colon A \longrightarrow C$, die *Verkettung von g nach f* (oft einfach nur gf). Des Weiteren fordern wir

1. für jedes Objekt A die Existenz eines *Identitätspfeils* $\mathrm{id}_A\colon A \longrightarrow A$ mit

$$f \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_B \circ f = f$$

für beliebige Pfeile $f\colon A \longrightarrow B$, sowie

2. die *Assoziativität* der Pfeile, also dass für $f\colon A \longrightarrow B$, $g\colon B \longrightarrow C$ und $h\colon C \longrightarrow D$

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

gilt. Wir fordern nicht, dass die Gesamtheit aller Pfeile eine Menge bildet; ist dies der Fall so sprechen wir von *kleinen Kategorien*. In dem Fall ist auch die Gesamtheit aller Objekte eine Menge, da jedes Objekt einen Identitätspfeil besitzt. Wir fordern allerdings, dass für zwei feste Objekte A, B die Gesamtheit der Pfeile von A nach B eine Menge bildet und nennen diese $\mathrm{Hom}(A, B)$ (manchmal fordert man das nicht und nennt solche Kategorien *lokal klein*).

Sei $f\colon A \longrightarrow B$ ein Pfeil. Gibt es einen Pfeil $g\colon B \longrightarrow A$, so dass $f \circ g = \mathrm{id}_B$ und $g \circ f = \mathrm{id}_A$, so nennen wir f und g *Isomorphismen*. Die Objekte A und B nennen wir in dem Fall isomorph.

[1] Auf Klassen wollen wir an dieser Stelle nicht genauer eingehen. Für unsere Zwecke genügt es, sich Klassen als eine Art Verallgemeinerung von Mengen vorzustellen, die nur Mengen enthalten dürfen. Dadurch vermeidet man die Probleme, die bei Russels Paradoxon auftauchen und die Gesamtheit aller Mengen bildet eine Klasse. Wer sichergehen möchte, dass so tatsächlich alle Probleme gelöst werden können und man sich keine weiteren Sorgen machen muss, kann das zum Beispiel in dem Abschnitt *0.2 Foundations* in [AHS90] nachlesen.

Beispiel 2 (Kategorien): Beispiele für Kategorien sind zum Beispiel $\mathcal{Set}$, die Kategorie der Mengen, in der die Objekte Mengen und die Pfeile Abbildungen sind, $\mathcal{Grp}$, die Kategorie der Gruppen mit Homomorphismen als Pfeilen, und $\mathcal{Top}$, die Kategorie der topologischen Räume mit stetigen Abbildungen als Pfeilen.

Das sind alles große Kategorien, denn in jedem Fall bildet die Gesamtheit der Objekte keine Menge mehr. Man kann aber auch sehr kleine Kategorien definieren, so zum Beispiel eine mit nur einem einzigen Objekt A und $\mathrm{Hom}(A, A) = \mathrm{id}$.

Ein weiteres interessantes Beispiel ist das Folgende: Sei M eine Menge und $\geq$ eine Teilordnung auf M. Dann können wir daraus eine Kategorie $\mathcal{C}$ bauen mit $\mathcal{Ob}(\mathcal{C}) = M$ und für zwei Elemente A, B aus M setzten wir

$$\mathrm{Hom}(A, B) = \begin{cases} A \longrightarrow B \iff A \geq B \\ \varnothing \text{ sonst.} \end{cases}$$

Wegen der Transitivität von $\geq$ liefert uns das tatsächlich eine Kategorie und zum ersten Mal eine, in der die Morphismen keine Abbildungen sind.

Definition 3 (Opposite Kategorie): Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Dann definieren wir eine Kategorie $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, die dieselben Objekte hat, in der wir einen Pfeil $f\colon A \longrightarrow B$ aus $\mathcal{C}$ aber als $f\colon B \longrightarrow A$ auffassen; wir fordern also für alle Objekte A und B aus $\mathcal{C}$, dass

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(B, A).$$

Wir nennen die Kategorie $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ die *opposite Kategorie* zu $\mathcal{C}$.

Definition 4 (Initiales/Terminales Objekt): Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Ein Objekt T mit der Eigenschaft, dass es für jedes Objekt A genau einen Pfeil von A nach T gibt, nennen wir *terminales Objekt*. Das Objekt T hat in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ nun die Eigenschaft, dass es zu jedem anderen Objekt A genau einen Pfeil von T nach A gibt. Ein Objekt mit dieser Eigenschaft nennen wir *initiales Objekt*.

Beispiel 5 (Initiales/Terminales Objekt): In $\mathcal{Grp}$ ist die triviale Gruppe sowohl initiales als auch terminales Objekt; in der Kategorie der Ringe ist $\mathbb{Z}$ initiales Objekt und der Nullring terminales Objekt.

Satz 1 (Eindeutigkeit Terminales Objekt)**:** *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Wenn es in $\mathcal{C}$ ein terminales Objekt gibt, so ist dies bis auf eindeutige Isomorphie bestimmt.*

Beweis: Seien T, T' terminale Objekte. Dann gibt es, da T terminales Objekt ist, genau einen Morphismus $f\colon T' \longrightarrow T$ und da T' auch ein terminales Objekt ist, genau einen Morphismus $f'\colon T \longrightarrow T'$. Weiterhin gibt es für die terminalen Objekte immer nur genau einen Morphismus in sich selbst, nämlich die jeweilige Identität. Das liefert

$$f \circ f' = \mathrm{id}_T \quad \text{und} \quad f' \circ f = \mathrm{id}_{T'},$$

womit f und f' Isomorphismen sind. Da es insgesamt nur einen Morphismus zwischen den beiden gab, gibt es insbesondere auch keinen weiteren Isomorphismus. $\square$

Definition 6 (Mono-/Epimorphismen): Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $f\colon A \longrightarrow B$ ein Pfeil in $\mathcal{C}$. Dann nennen wir f einen *Monomorphismus*, wenn

$$f \circ x = f \circ y \implies x = y.$$

Analog nennen wir f einen *Epimorphismus*, wenn

$$x \circ f = y \circ f \implies x = y.$$

Beispiel 7 (Mono-/Epimorphismen): In $\mathcal{Set}$ entsprechen die Monomorphismen den injektiven und die Epimorphismen den surjektiven Abbildungen. Das macht man in LA I als Übungsaufgabe. In $\mathcal{Grp}$ gilt das genauso, das ist aber etwas aufwendiger zu zeigen[2].

Das stimmt aber nicht immer, denn zum Beispiel ist in der Kategorie der Ringe die Einbettung $i\colon \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ (als Ringhomomorphismus) sicherlich nicht surjektiv, aber trotzdem ein Epimorphismus, denn: Seien f und g zwei Morphismen von $\mathbb{Q}$ in irgendeinen Ring R mit $f \circ i = g \circ i$, dann gilt für $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$:

$$f(\tfrac{a}{b}) = f(a) \cdot f(\tfrac{1}{b}) = f(a) \cdot f(b)^{-1} = g(a) \cdot g(b)^{-1} = g(\tfrac{a}{b}),$$

da f und g auf $\mathbb{Z}$ gleich sind, also tatsächlich $f = g$.

Definition 8 (Funktor): Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Ein Pfeil $\mathcal{F}: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ heißt *Funktor*, wenn er jedem Objekt C aus $\mathcal{C}$ ein Objekt $\mathcal{F}(C)$ (oder $\mathcal{F}C$) in $\mathcal{D}$ zuordnet und

1. Pfeilen $f\colon A \longrightarrow B$ aus $\mathcal{C}$ Pfeile $\mathcal{F}f\colon \mathcal{F}A \longrightarrow \mathcal{F}B$ zuordnet,
2. $\mathcal{F}(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(A)}$ gilt und
3. für Pfeile $f\colon A \longrightarrow B$ und $g\colon B \longrightarrow C$ gilt: $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}g \circ \mathcal{F}f$.

Beispiel 9 ($\mathcal{Cat}$): Da wir jetzt Pfeile zwischen Kategorien definiert haben und die Verkettung von zwei Funktoren wieder ein Funktor ist, können wir nun versuchen eine Kategorie aus der Gesamtheit aller Kategorien zu basteln. Da wir in der Definition von Kategorien gefordert hatten, dass die Gesamtheit aller Objekte eine Klasse bildet und die Gesamtheit aller Morphismen zwischen zwei festen Objekten eine Menge bildet, müssen wir uns hier auf kleine Kategorien beschränken[3]. Die Kategorie $\mathcal{Cat}$ hat also kleine Kategorien als Objekte und Funktoren zwischen solchen als Pfeile. Für zwei kleine Kategorien A, B ist $\mathrm{Hom}(A, B)$ also eine Menge, da es sich um eine Teilmenge von $\mathrm{Abb}(\mathcal{Ob}(A), \mathcal{Ob}(B))$ handelt. Man kann es sich auch ganz leicht machen und sich überlegen, das $\mathcal{Cat}$ eine Unterkategorie von $\mathcal{Set}$ ist, denn jede kleine Kategorie $\mathcal{C}$ entspricht einfach einer Menge $\{\mathcal{Ob}(\mathcal{C}), \mathcal{Ar}(\mathcal{C})\}$ und ein Funktor zwischen zwei Kategorien ist einfach eine Abbildung zwischen den entsprechenden Mengen, die sich zusätzlich an gewisse Verträglichkeitsregeln hält.

[2] Siehe dafür zum Beispiel: Beispiel 1.1.8 in [Kü09].

[3] Wer das nicht möchte, benötigt das Konzept der Quasikategorien. Näheres dazu findet man wieder in [AHS90] auf Seite 39.

DEFINITION 10 (Kontravariant/Kovariant/voll/treu): Einen Funktor $\mathcal{F}: \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{D}$ nennen wir einen *kontravarianten Funktor* von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$. Entsprechend geht $\mathcal{F}^{\mathrm{op}}$ von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$. Manchmal nennen wir Funktoren von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ auch *kovariant*.

Wir nennen einen Funktor $\mathcal{F}: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *treu*, wenn er auf den Morphismenmengen injektiv ist. Wir nennen ihn *voll*, wenn er auf den Morphismenmengen surjektiv ist.

BEISPIEL 11 (Vergiss-Funktor/Hom-Funktor):

1. Ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie, deren Objekte Mengen mit einer bestimmten Struktur sind (z.B. $\mathcal{Grp}$ oder $\mathcal{Top}$), so gibt es den Vergiss-Funktor $\mathcal{F}: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{Set}$, der den Objekten ihre Mengen und den Morphismen die entsprechenden Abbildungen zuweist.
2. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Für die Gesamtheit aller Morphismenmengen, deren Elemente A als Ursprung haben, schreiben wir $\mathrm{Hom}(A, -)$, entsprechend für die Gesamtheit aller, deren Elemente B als Ziel haben, $\mathrm{Hom}(-, B)$ und für alle einfach $\mathrm{Hom}(-, -)$. Dies liefert uns einen Funktor in zwei Variablen von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{Set}$, indem wir für ein festes Objekt A

$$\mathrm{Hom}(A, -)\colon \begin{cases} \mathcal{Ob}(\mathcal{C}) \ni C \longmapsto \mathrm{Hom}(A, C) \in \mathcal{Ob}(\mathcal{Set}) \\ \mathrm{Hom}(C, D) \ni f \longmapsto [g \longmapsto f \circ g] \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(A, C), \mathrm{Hom}(A, D)) \end{cases}$$

   definieren. Das ist nach Konstruktion ein kovarianter Funktor. Analog konstruieren wir für festes B den kontravarianten Funktor:

$$\mathrm{Hom}(-, B)\colon \begin{cases} \mathcal{Ob}(\mathcal{C}) \ni C \longmapsto \mathrm{Hom}(C, B) \in \mathcal{Ob}(\mathcal{Set}) \\ \mathrm{Hom}(C, D) \ni f \longmapsto [g \longmapsto g \circ f] \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(D, B), \mathrm{Hom}(C, B)). \end{cases}$$

DEFINITION 12 (Natürliche Transformation/Äquivalenz): Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ Funktoren von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$. Wir nennen $\lambda\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ eine *natürliche Transformation* von $\mathcal{F}$ nach $\mathcal{G}$, wenn λ eine Klasse von Pfeilen

$$\lambda_C\colon \mathcal{F}C \longrightarrow \mathcal{G}C, \quad C \in \mathcal{Ob}(\mathcal{C})$$

ist, so dass für jeden Pfeil $g\colon C \longrightarrow C'$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}C \arrow[r, "\lambda_C"] \arrow[d, "\mathcal{F}g"] & \mathcal{G}C \arrow[d, "\mathcal{G}g"] \\ \mathcal{F}C' \arrow[r, "\lambda_{C'}"] & \mathcal{G}C' \end{tikzcd}$$

Wenn jedes λ_C ein Isomorphismus ist, nennen wir λ eine *natürliche Äquivalenz*.

BEISPIEL 13 (Bidualraum): Ein Beispiel für eine natürliche Transformation kennt man aus der linearen Algebra: Wir betrachten die Kategorie $\mathcal{C}$ aller K-Vektorräume und den

Funktor $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$, der ein Objekt $V \in \mathcal{Ob}(\mathcal{C})$ auf den zugehörigen Bidualraum $V^{**} = \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(V,K),K)$ und einen Homomorphismus $\Phi \in \mathrm{Hom}(V,W)$ auf

$$\mathrm{Hom}(V^{**},W^{**}) \ni \Phi^{**}\colon \mu \longmapsto [\lambda \longmapsto \mu(\lambda \circ \Phi)]$$

schickt. Wir definieren nun für jedes V eine Abbildung $\eta_V\colon V \longrightarrow V^{**}$, die ein Element auf den Einsetzungshomomorphismus schickt

$$\eta_V\colon v \longmapsto [\lambda \longmapsto \lambda(v)] \in V^{**}$$

und stellen fest, dass für einen beliebigen Vektorraum W und $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$, $v \in V$, sowohl $\eta_W \circ f(v) = [\lambda \longmapsto (\lambda \circ f)(v)]$, als auch (da μ hier nur auswertet) $f^{**} \circ \eta_V(v) = [\lambda \longmapsto (\lambda \circ f)(v)]$ gilt, also das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
v \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] & & & \lambda \mapsto \lambda(v) \arrow[ddd, mapsto] \\
& V \arrow[r, "\eta_V"] \arrow[d, "f"] & V^{**} \arrow[d, "f^{**}"] & \\
& W \arrow[r, "\eta_W"] & W^{**} & \\
f(v) \arrow[rrr, mapsto] & & & \lambda \mapsto (\lambda \circ f)(v)
\end{tikzcd}$$

Es handelt sich bei der Gesamtheit der η_V also um eine natürliche Transformation η : $\mathrm{id} \longrightarrow \mathcal{F}$.

Beispiel 14 (Funktor-Kategorien): Sei $\mathcal{D}$ eine Kategorie und $\mathcal{C}$ eine kleine Kategorie. Dann bildet die Gesamtheit aller Funktoren von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ die Kategorie $\mathrm{Func}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ mit den natürlichen Transformationen als Pfeilen. Wenn nun $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ zwei Funktoren von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ sind, bildet die Gesamtheit aller natürlichen Transformationen von $\mathcal{F}$ nach $\mathcal{G}$ tatsächlich eine Menge, denn: $\mathcal{C}$ ist eine kleine Kategorie, $\mathcal{Ob}(\mathcal{C})$ ist also eine Menge, daher ist die Gesamtheit der Möglichkeiten, die es an einem einzelnen Objekt C für eine natürliche Transformation gibt, auch nur eine Menge (da $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}(C),\mathcal{D}(C))$ eine Menge ist). Sei nun $\mathcal{H}$ ein dritter Funktor und $\lambda\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ und $\mu\colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ natürliche Transformationen. Dann können wir $\mu \circ \lambda\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{H}$ bilden, in dem wir μ und λ an jeder Komponente verketten.

Wir schreiben für $\mathrm{Func}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ oft auch $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ und für den Hom-Funktor $\mathrm{Nat}(\mathcal{F},-)$ für einen Funktor $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$.

Definition 15 (Äquivalenz): Zwei Kategorien $\mathcal{C},\mathcal{D}$ nennen wir *äquivalent*, wenn es einen Funktor $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ gibt, der volltreu ist, und es für jedes Objekt B aus $\mathcal{D}$ ein Objekt A aus $\mathcal{C}$ gibt, so dass $\mathcal{F}(A)$ isomorph zu B ist.

Satz 2 (Äquivalenz von Äquivalenz)**:** *Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien. Dann sind äquivalent:*

1. *$\mathcal{C}$ ist äquivalent zu $\mathcal{D}$.*
2. *Es gibt Funktoren $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ und $\mathcal{G} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$, so dass $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ natürlich äquivalent zu $\mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ ist und $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ natürlich äquivalent zu $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ ist.*

Beweis: Zuerst sei $\mathcal{C}$ äquivalent zu $\mathcal{D}$, es gebe also einen Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, der volltreu ist und zusätzlich gelte

$$\forall B \in \mathcal{Ob}(\mathcal{D})\ \exists A \in \mathcal{Ob}(\mathcal{C}) : \mathcal{F}(A) \cong B.$$

Dann wählen wir uns für jedes $B \in \mathcal{Ob}(\mathcal{D})$ ein solches A und nennen es $\mathcal{G}(B)$. Weiterhin wählen wir für jedes Objekt B einen zugehörigen Isomorphismus $\lambda_B : B \longrightarrow \mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(\mathcal{G}B)$. Nun sei D ein weiteres Objekt aus $\mathcal{D}$ und $f : B \longrightarrow D$ ein Morphismus. Dann sehen wir an folgendem Diagramm,

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, shift left, "\lambda_B"] \arrow[d, "f"] & \mathcal{F}\mathcal{G}(B) \arrow[l, shift left, dashed] \arrow[d, "\lambda_D \circ f \circ \lambda_B^{-1}"] \\
D \arrow[r, "\lambda_D"] & \mathcal{F}\mathcal{G}(D)
\end{tikzcd}$$

dass wir so einen Morphismus $\lambda_D \circ f \circ \lambda_B^{-1} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}(\mathcal{G}B), \mathcal{F}(\mathcal{G}D))$ erhalten und da $\mathcal{F}$ volltreu ist, liefert uns das genau einen Morphismus $\mathcal{G}(f) \in \mathrm{Hom}(\mathcal{G}(B), \mathcal{G}(D))$ mit

$$\mathcal{F}\mathcal{G}f = \lambda_D \circ f \circ \lambda_B^{-1}.$$

Dadurch wird $\mathcal{G}$ zu einem kovarianten Funktor von $\mathcal{D}$ nach $\mathcal{C}$ (dass tatsächlich $\mathcal{G}(g \circ f) = \mathcal{G}g \circ \mathcal{G}f$ gilt, kann man leicht mit Hilfe der Tatsache, dass $\mathcal{F}$ ein Funktor und volltreu ist, zeigen, es ist nur sehr viel Schreibarbeit). Nun müssen wir nur noch zeigen, dass $\mathcal{G}\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}\mathcal{G}$ natürlich äquivalent zu den entsprechenden Identitäten sind.

Nach Konstruktion von $\mathcal{G}$ gilt sofort, dass $\mathcal{F}\mathcal{G}$ natürlich äquivalent zu $\mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ ist, denn für jedes A, B und g war $\mathcal{F}\mathcal{G}g$ ja gerade so konstruiert, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\lambda_A"] \arrow[d, "g"] & \mathcal{F}\mathcal{G}(A) \arrow[d, "\mathcal{F}\mathcal{G}g = \lambda_B \circ g \circ \lambda_A^{-1}"] \\
B \arrow[r, "\lambda_B"] & \mathcal{F}\mathcal{G}(B)
\end{tikzcd}$$

Auch $\mathcal{G}\mathcal{F}$ ist natürlich äquivalent zu $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$, denn: Seien A, B Objekte aus $\mathcal{C}$, $f : A \longrightarrow B$. Dann gilt nach Konstruktion von $\mathcal{G}$, dass $\mathcal{F}(A) \cong \mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}(A)$, denn es gibt für jedes A den oben konstruierten Isomorphismus

$$\lambda_{\mathcal{F}A} : \mathcal{F}A \longrightarrow \mathcal{F}\mathcal{G}(\mathcal{F}A) \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(\mathcal{G}\mathcal{F}A))$$

und da $\mathcal{F}$ volltreu ist, liefert uns das genau einen Isomorphismus $\Phi_A \in \mathrm{Hom}(A, \mathcal{G}\mathcal{F}A)$, so dass $\mathcal{F}(\Phi_A) = \lambda_{\mathcal{F}(A)}$. Damit kommutiert jetzt aber – für f – das folgende Diagramm,

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Phi_A"] \arrow[d, "f"] & \mathcal{G}\mathcal{F}(A) \arrow[d, "\mathcal{G}\mathcal{F}f"] \\
B \arrow[r, "\Phi_B"] & \mathcal{G}\mathcal{F}(B)
\end{tikzcd}$$

da – nach Konstruktion von $\mathcal{G}$ – $\mathcal{F}\mathcal{G}(\mathcal{F}f) = \lambda_{\mathcal{F}(B)} \circ \mathcal{F}f \circ \lambda_{\mathcal{F}(A)}^{-1}$ gilt und, da $\mathcal{F}$ volltreu ist, liefert uns das $\mathcal{G}\mathcal{F}f = \Phi_B \circ f \circ \Phi_A^{-1}$, wie gewünscht.

Nun gelte die 2. Aussage: Wir haben also zwei Funktoren $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ deren Verkettungen natürlich äquivalent zu den Identitäten sind, es gibt also natürliche Äquivalenzen $\lambda\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{G}\mathcal{F}$ und $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathcal{F}\mathcal{G}$. Für ein Objekt C aus $\mathcal{C}$ bzw. D aus $\mathcal{D}$ bezeichne $\lambda_C\colon C \longrightarrow \mathcal{G}\mathcal{F}(C)$ bzw. η_D den entsprechenden Isomorphismus.

Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{F}$ volltreu ist, dass es also für Objekte A, B aus $\mathcal{C}$ eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}(A, B) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B)$$

gibt. Seien also $f, g \in \mathrm{Hom}(A, B)$ mit $\mathcal{F}f = \mathcal{F}g$. Dann gilt insbesondere auch $\mathcal{G}\mathcal{F}f = \mathcal{G}\mathcal{F}g$ und unsere natürliche Äquivalenz λ liefert

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\lambda_A"] \arrow[d, "f"] & \mathcal{G}\mathcal{F}(A) \arrow[d, "\mathcal{G}\mathcal{F}f"] \\
B \arrow[r, shift left, "\lambda_B"] & \mathcal{G}\mathcal{F}(B) \arrow[l, dashed, shift left]
\end{tikzcd}$$

also $f = \lambda_B^{-1} \circ \mathcal{G}\mathcal{F}f \circ \lambda_A$ und analog $g = \lambda_B^{-1} \circ \mathcal{G}\mathcal{F}g \circ \lambda_A$. Da aber $\mathcal{G}\mathcal{F}f = \mathcal{G}\mathcal{F}g$, folgt daraus schon $f = g$. Damit ist $\mathcal{F}$ auf den Morphismenmengen injektiv.

Es fehlt noch die Surjektivität: Dazu stellen wir fest, dass für zwei Objekte A, B aus $\mathcal{D}$ durch η eine Bijektion der Morphismenmengen durch

$$\mathrm{Hom}(A, B) \ni f \longmapsto \mathcal{F}\mathcal{G}f = \eta_B \circ f \circ \eta_A^{-1} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}\mathcal{G}(A), \mathcal{F}\mathcal{G}(B))$$

induziert wird. Diese faktorisiert als

$$\mathrm{Hom}(A, B) \ni f \longmapsto \mathcal{G}f \in \mathrm{Hom}(\mathcal{G}(A), \mathcal{G}(B)) \ni g \longmapsto \mathcal{F}g \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}\mathcal{G}(A), \mathcal{F}\mathcal{G}(B)),$$

also ist $g \longmapsto \mathcal{F}g$ surjektiv für alle Objekte im Bildbereich von $\mathcal{G}$. Das genügt aber, denn wir können ja immer zu den $\mathcal{G}\mathcal{F}A$ und $\mathcal{G}\mathcal{F}B$ übergehen, deren Morphismenmenge durch λ bijektiv der von A und B entspricht und die im Bildbereich von $\mathcal{G}$ liegen.

Zur letzten Aussage: Sei B ein beliebiges Objekt in $\mathcal{D}$. Dann ist B durch η_B isomorph zu $\mathcal{F}(\mathcal{G}B)$, also ist $\mathcal{G}(B)$ ein solches Objekt. $\square$

Beispiel 16 (Yoneda-Einbettung): Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $f\colon A \longrightarrow B$ in $\mathcal{C}$. Dann induziert f durch Verkettung eine natürliche Transformation von $\mathrm{Hom}(B,-)$ nach $\mathrm{Hom}(A,-)$: Sei C ein beliebiges Objekt aus $\mathcal{C}$. Dann erhalten wir $\lambda_C \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(B,C), \mathrm{Hom}(A,C))$ durch

$$\lambda_C\colon \mathrm{Hom}(B,C) \ni \varphi \longmapsto \varphi \circ f \in \mathrm{Hom}(A,C).$$

Sei nun C' ein weiteres Objekt aus $\mathcal{C}$ und $\psi\colon C \longrightarrow C'$. Das Bild von ψ unter dem Hom-Funktor ist dann zum Beispiel

$$\mathrm{Hom}(A,\psi)\colon \mathrm{Hom}(A,C) \ni \alpha \longmapsto \psi \circ \alpha \in \mathrm{Hom}(A,C'),$$

und das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd}
g \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] & & & g \circ f \arrow[ddd, mapsto] \\
& \mathrm{Hom}(B,C) \arrow[r, "\lambda_C"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(B,\psi)"] & \mathrm{Hom}(A,C) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(A,\psi)"] & \\
& \mathrm{Hom}(B,C') \arrow[r, "\lambda_{C'}"] & \mathrm{Hom}(A,C') & \\
\psi \circ g \arrow[rrr, mapsto] & & & \psi \circ g \circ f
\end{tikzcd}$$

denn: Sei $g \in \mathrm{Hom}(B,C)$. Dann gilt

$$\mathrm{Hom}(A,\psi) \circ \lambda_C(g) = \mathrm{Hom}(A,\psi)(g \circ f) = \psi \circ g \circ f$$

und genauso

$$\lambda_{C'} \circ \mathrm{Hom}(B,\psi)(g) = \lambda_{C'}(\psi \circ g) = \psi \circ g \circ f,$$

womit λ wie behauptet eine natürliche Transformation der Hom-Funktoren ist.

So erhalten wir einen kontravarianten Funktor von $\mathcal{C}$ nach $\mathrm{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{S}et)$, indem wir ein Objekt C auf $\mathrm{Hom}(C,-)$ und einen Pfeil $f \in \mathrm{Hom}(A,B)$ auf die induzierte natürliche Transformation $\lambda\colon \mathrm{Hom}(B,-) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,-)$ schicken. Diesen Funktor nennen wir die Yoneda-Einbettung. Das verallgemeinern wir jetzt.

Satz 3 (Yoneda-Lemma)**:** *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $\mathcal{F}: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}et$ ein kovarianter Funktor. Dann gibt es für jedes Objekt C aus $\mathcal{C}$ eine Bijektion:*

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(C,-), \mathcal{F}) \longleftrightarrow \mathcal{F}(C).$$

Das heißt jede natürliche Transformation $\mathrm{Hom}(C,-) \longrightarrow \mathcal{F}$ *ist eindeutig durch ein Element der Menge $\mathcal{F}(C)$ festgelegt.*

Beweis: Wir konstruieren eine entsprechende Abbildung: Sei

$$y\colon \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(C,-), \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F}(C),$$

wobei wir eine natürliche Transformation $\eta\colon \mathrm{Hom}(C,-) \longrightarrow \mathcal{F}$ auf

$$y(\eta) := \eta_C(\mathrm{id}_C) \in \mathcal{F}(C)$$

schicken. Sei nun A ein weiteres Objekt aus $\mathcal{C}$. Dann gilt für die Komponente von η bei A, da η eine natürliche Transformation ist, dass für jeden Pfeil $f\colon C \longrightarrow A$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_C \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] & & & \eta_C(\mathrm{id}_C) \arrow[ddd, mapsto] \\
& \mathrm{Hom}(C,C) \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(C,f)"] & \mathcal{F}(C) \arrow[d, "\mathcal{F}f"] & \\
& \mathrm{Hom}(C,A) \arrow[r, "\eta_A"] & \mathcal{F}(A) & \\
f \arrow[rrr, mapsto] & & & \eta_A(f) = \mathcal{F}f(\eta_C(\mathrm{id}_C))
\end{tikzcd}$$

Insbesondere bedeutet das aber, dass $\eta_A(f) = \mathcal{F}f(\eta_C(\mathrm{id}_C))$ ist, also die gesamte natürliche Transformation η durch $\mathcal{F}$ und $\eta_C(\mathrm{id}_C)$ festgelegt ist; die Abbildung y ist also injektiv.

Sei nun $x \in \mathcal{F}(C)$ und A ein Objekt aus $\mathcal{C}$. Dann definieren wir uns die Abbildung $\varepsilon_A\colon \mathrm{Hom}(C,A) \longrightarrow \mathcal{F}(A)$, durch die Vorgabe $f \longmapsto \mathcal{F}f(x)$. Sei nun B ein weiteres Objekt und $g\colon A \longrightarrow B$, dann stellen wir fest, dass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] & & & \mathcal{F}f(x) \arrow[ddd, mapsto] \\
& \mathrm{Hom}(C,A) \arrow[r, "\varepsilon_A"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(C,g)"] & \mathcal{F}(A) \arrow[d, "\mathcal{F}g"] & \\
& \mathrm{Hom}(C,B) \arrow[r, "\varepsilon_B"] & \mathcal{F}(B) & \\
g \circ f \arrow[rrr, mapsto] & & & \mathcal{F}(g \circ f)(x)
\end{tikzcd}$$

(da $\mathcal{F}g(\mathcal{F}f(x)) = (\mathcal{F}g \circ \mathcal{F}f)(x) = \mathcal{F}(g \circ f)(x)$, da $\mathcal{F}$ Funktor) und daher alle ε_A gemeinsam eine natürliche Transformation $\varepsilon\colon \mathrm{Hom}(C,-) \longrightarrow \mathcal{F}$ bilden. Außerdem gilt

$$\varepsilon_C(\mathrm{id}_C) = \mathcal{F}(\mathrm{id}_C)(x) = x,$$

also ist $y(\varepsilon) = x$ und damit ist y auch surjektiv. $\square$

Bemerkung 17 (Yoneda kontravariant): *Analog kann man die kontravariante Variante des Yoneda-Lemmas formulieren und beweisen: Für einen Funktor* $\mathcal{F}\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}et$ *erhalten wir eine Bijektion* $\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(-,C),\mathcal{F}) \longleftrightarrow \mathcal{F}(C)$.

Satz 4 (Yoneda-Einbettung)**:** *Die Abbildung aus Beispiel 16, die* $f\colon A \longrightarrow B$ *auf die induzierte natürliche Transformation* $\eta\colon \mathrm{Hom}(B,-) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,-)$ *schickt, ist ein volltreuer kontravarianter Funktor* $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{Set})$*.*

Beweis: In Beispiel 16 hatten wir gesehen: $\mathcal{F}$ schickt ein Objekt C aus $\mathcal{C}$ auf $\mathrm{Hom}(C,-)$ und die Morphismen auf die entsprechenden natürlichen Transformationen, ist also ein kontravarianter Funktor. Das Yoneda-Lemma liefert nun für Objekte A und B eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(A,-), \mathrm{Hom}(B,-)) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}(A,B),$$

was gerade bedeutet, dass $\mathcal{F}$ volltreu ist. □

Definition 18 (Darstellbare Objekte): Sei $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{Set}$ ein kovarianter Funktor. Dann nennen wir $\mathcal{F}$ *darstellbar*, wenn es ein Objekt C von $\mathcal{C}$ gibt, so dass $\mathcal{F}$ zu $\mathrm{Hom}(C,-)$ natürlich äquivalent ist.

Definition 19 (Graph): Im Folgenden sei ein *Graph* gewissermaßen eine kleine Kategorie, in der wir keine Verkettung von Pfeilen fordern; wir sagen also ein Graph $\mathcal{G}$ besteht aus zwei Mengen, O die Objekte und A die Pfeile, sowie zwei Abbildungen $d^0, d^1\colon A \longrightarrow O$, die einem Pfeil sein Anfangs- bzw. Zielobjekt zuweisen.

Ein *Homomorphismus* $F\colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ *zwischen zwei Graphen* ist eine Abbildung, die Objekte auf Objekte und Pfeile auf Pfeile abbildet und mit d^0 und d^1 verträglich ist, also $f\colon A \longrightarrow B$ aus $\mathcal{G}$ auf $F(f)\colon F(A) \longrightarrow F(B)$ aus $\mathcal{H}$ schickt.

Man sieht also, dass jede (kleine) Kategorie $\mathcal{C}$ einen *zugrundeliegenden Graphen* $|\mathcal{C}|$ besitzt und jeder Funktor $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ einen ihm *zugrundeliegenden Graphenhomomorphismus* $|\mathcal{F}|\colon |\mathcal{C}| \longrightarrow |\mathcal{D}|$ besitzt. Wir erhalten so sogar einen Funktor von $\mathcal{Cat}$ in die Kategorie der Graphen.

Definition 20 (Diagramm): Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, I ein Graph. Ein *Diagramm* in $\mathcal{C}$ ist dann ein Graphenhomomorphismus[4] $D\colon I \longrightarrow |\mathcal{C}|$; I nennen wir in dem Fall auch den Indexgraphen des Diagramms und das Diagramm nennen wir ein *Diagramm vom Typ* I. Oft schreiben wir einfach $D\colon I \longrightarrow \mathcal{C}$.

Wir nennen D ein *endliches Diagramm*, wenn es nur endlich viele Objekte und Pfeile beinhaltet.

Für jedes Objekt A aus $\mathcal{C}$ können wir den *konstanten Graphenhomomorphismus* Δ_A wählen, der alle Objekte aus I auf A schickt und alle Pfeile auf id_A. So erhalten wir zu jedem Objekt ein Diagramm, das nur A beinhaltet.

Für zwei Diagramme D und E können wir – ganz analog zu Funktoren – *natürliche Transformationen* definieren: $\lambda\colon D \longrightarrow E$ ist eine natürliche Transformation, wenn es zu jedem Objekt i aus I einen Pfeil $\lambda_i\colon D(i) \longrightarrow E(i)$ gibt, so dass das folgende Diagramm

[4] Wenn $\mathcal{C}$ selbst keine kleine Kategorie ist, können wir trotzdem immer zu einer kleinen Unterkategorie U von $\mathcal{C}$ übergehen, damit $|U|$ definiert ist und alles so klappt, wie wir es uns wünschen. Das machen wir in Zukunft immer implizit.

für jedes Objekt j und jeden Pfeil $e\colon i \longrightarrow j$ aus I kommutiert:

$$\begin{tikzcd} D(i) \arrow[r, "\lambda_i"] \arrow[d, "D(e)"] & E(i) \arrow[d, "E(e)"] \\ D(j) \arrow[r, "\lambda_j"] & E(j) \end{tikzcd}$$

Beispiel 21 (Diagramm): Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit mindestens drei Objekten und nicht leeren Morphismenmengen zwischen diesen. Sei weiterhin I der Graph

$$1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3.$$

Dann ist zum Beispiel das folgende Diagramm ein Diagramm vom Typ I in $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d] \\ A \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

Definition 22 (Kommutatives Diagramm): Für ein *kommutatives Diagramm* fordern wir einfach, dass I nicht nur ein Graph, sondern selbst schon eine kleine Kategorie ist und dass der Graphenmorphismus D ein Funktor von I nach $\mathcal{C}$ ist. Durch die so vorhandenen Verknüpfungspfeile kommutiert D (manchmal lassen wir die so erhaltenen Pfeile trotzdem aus Gründen der Überschaubarkeit weg).

Definition 23 (Kegel/Kommutativer Kegel): Eine natürliche Transformation α aus einem konstanten Diagramm Δ_A in ein Diagramm D nennen wir *Kegel* – anschaulich ist das ein Diagramm, in dem es für jedes $D(i)$ genau einen Pfeil von A dorthin gibt, α ist dann die Gesamtheit aller dieser Pfeile; das Objekt A nennen wir *Spitze*.

Wenn alles kommutiert, nennen wir α *kommutativer Kegel*.

Für α schreiben wir manchmal auch $\mathrm{Cone}(A, D)$.

Bemerkung 24 (Kegelkategorien): *Wir erhalten so zu einem Diagramm D vom Typ I die Kategorie* $\mathrm{Cone}(-, D)$ *oder* $\mathcal{C}_{\downarrow D}$ *der Kegel zu D, in der die Objekte natürliche Transformationen sind; für zwei Objekte $\eta\colon \Delta_A \longrightarrow D$ und $\lambda\colon \Delta_B \longrightarrow D$ sind die Pfeile einfach die Pfeile $f\colon A \longrightarrow B$ aus $\mathcal{C}$, die mit den Transformationen verträglich sind, also für die das folgende Diagramm für alle Objekte i und j aus I und alle Morphismen $g\colon i \longrightarrow j$ aus I kommutiert:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_i"] & B \arrow[d, "\lambda_j"] \\ D(i) \arrow[r, "D(g)"] & D(j) \end{tikzcd}$$

Definition 25 (Limes/Kolimes): Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, D ein Diagramm vom Typ I. Dann nennen wir ein terminales Objekt in $\mathcal{C}_{\downarrow D}$ einen *Limes von D*.

Ein *Kolimes eines Diagramms D* ist der Limes von D in der oppositen Kategorie, genauer: Ein Kokegel eines Diagramms $D\colon I \longrightarrow \mathcal{C}$ mit Spitze A ist eine natürliche Transformation von D nach Δ_A, man kann diese genauso in einer Kategorie zusammenfassen und in dieser initiale Objekte suchen.

Beispiel 26 (Supremum): Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge[5] der reellen Zahlen. Die Reellen Zahlen können wir, wie in Beispiel 2, zu einer Kategorie $\mathcal{C}$ machen, die $\mathbb{R}$ als Objektemenge hat und in der es einen Pfeil von A nach B genau dann gibt, wenn $A \geq B$. Sei nun I eine kleine Kategorie und $\mathcal{D}\colon I \longrightarrow \mathcal{C}$ ein Funktor, der gerade M als Bild hat, so dass M durch $\mathcal{D}$ zu einem kommutativen Diagramm über I wird.

Sei nun $x \in \mathbb{R}$. Dann gibt es genau dann eine natürliche Transformation von Δ_x in $\mathcal{D}$, wenn x eine obere Schranke von M ist, denn wir fordern für eine solche Transformation gerade, dass es einen Pfeil in jedes $\mathcal{D}(i)$ gibt, also $x \geq y$ für jedes $y \in M$ gilt. Die Kategorie $\mathcal{C}_{\downarrow\mathcal{D}}$ hat hier also als Objekte die oberen Schranken von M und als Morphismen wieder $A \longrightarrow B \iff A \geq B$ (dass alles kommutiert liegt an der Transitivität von $\geq$).

In dieser Kategorie existiert immer ein terminales Objekt, nämlich die kleinste obere Schranke, das Supremum von M, s – hier gilt für jede andere obere Schranke o von M, dass es genau einen Pfeil von o nach s gibt.

In diesem Fall ist also das Supremum von M der Limes von $\mathcal{D}$.

Definition 27 (Vollständig/Endlich vollständig): Wir nennen eine Kategorie $\mathcal{C}$ *vollständig*, wenn jedes Diagramm in $\mathcal{C}$ einen Limes besitzt. Wir nennen sie *endlich vollständig*, wenn jedes endliche Diagramm einen Limes besitzt.

Beispiel 28 (Produkt): In $\mathcal{S}et$ haben wir für je zwei Mengen A und B das kartesische Produkt $A \times B$ mit den beiden kanonischen Projektionen π_A und π_B. Das wollen wir jetzt verallgemeinern.

Sei dazu $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie und $I = \{1, 2\}$ ein Graph ohne Pfeile. Dann ist ein Diagramm vom Typ I in $\mathcal{C}$ einfach ein geordnetes Paar (A, B) von Objekten aus $\mathcal{C}$. Ein kommutativer Kegel über (A, B) ist nun einfach ein weiteres Objekt K mit Pfeilen $f\colon K \longrightarrow A$ und $g\colon K \longrightarrow B$. Dann definieren wir das *Produkt von A und B*, $A \times B$, als Limes von (A, B). Wir fordern also, dass es für jeden anderen Kegel (K, f, g) genau einen Pfeil Φ gibt, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\exists!\Phi"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_B"'] & B \end{tikzcd}$$

[5] Wahrscheinlich will man hier noch endliches Lebesguemaß oder so fordern, damit das Supremum tatsächlich auch in $\mathbb{R}$ existiert.

In $\mathcal{Set}$ ist das gerade das kartesische Produkt, denn wir setzen $\Phi(k) = (f(k), g(k))$ für alle $k \in K$ und sehen an der kanonischen Projektion, dass es die einzige Möglichkeit ist.

BEMERKUNG 29 (Endliche Produkte): *Analog kann man nun einen Graphen ohne Pfeile $I = \{1, \dots, n\}$ nehmen und den Limes eines Diagramms $\mathcal{D}\colon I \longrightarrow \mathcal{C}$ als das Produkt $\prod_{i \in \mathcal{Ob} I} D(i)$ (oder D_i) definieren. Man kann nachrechnen, dass es bis auf Isomorphie assoziativ ist, also das für je drei Objekte A, B und C aus $\mathcal{C}$ gilt:*

$$A \times (B \times C) \cong (A \times B) \times C.$$

BEISPIEL 30 (Equaliser): Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, A, B Objekte. Dann nennen wir zwei Pfeile $f, g\colon A \longrightarrow B$ parallel. Wir können dann den *Equaliser* $\mathrm{Eq}(f, g)$ als den Limes des folgenden Diagramms definieren:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

Der Equaliser ist also ein Kegel über (A, B), also ein Objekt $\mathrm{Eq}(f, g)$ mit zwei Pfeilen $h_1\colon \mathrm{Eq}(f, g) \longrightarrow A$ und $h_2\colon \mathrm{Eq}(f, g) \longrightarrow B$, so dass

$$f \circ h_1 = g \circ h_1 = h_2,$$

von dem wir zusätzlich fordern, dass es für jede andere Kegelspitze (K, j_1, j_2) genau einen Morphismus $\Phi\colon K \longrightarrow \mathrm{Eq}(f, g)$ gibt, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Eq}(f,g) \arrow[d, "h_1"'] & K \arrow[l, dashed, "\exists!\Phi"'] \arrow[dl, "j_1"'] \\ A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

Das liefert uns zum Beispiel in $\mathcal{Set}$ die Menge

$$\mathrm{Eq}(f, g) = \{x \in A \mid f(x) = g(x)\},$$

da h_1 hier einfach die Einbettung nach A ist, denn für jede andere Menge K mit einer Abbildung $h\colon K \longrightarrow A$ mit $f(h(k)) = g(h(k))$ für jedes $k \in K$ gilt schon $h(K) \subseteq \mathrm{Eq}(f, g)$ und somit ist Φ in diesem Fall genau

$$\Phi\colon K \longrightarrow \mathrm{Eq}(f, g), \quad k \longmapsto h(k).$$

Wir können auch jeden Kern eines Gruppenhomomorphismus als Equaliser auffassen: Sei dazu $f\colon G \longrightarrow H$ und t der triviale Homomorphismus, der alles auf id_H schickt. Dann ist der Equaliser von f und t gerade Kern f, nämlich

$$\{g \in G \mid f(g) = t(g) = \mathrm{id}_H\}.$$

Für jeden anderen Morphismus $h\colon K \longrightarrow G$ mit $f(h(k)) = \mathrm{id}_H$ für jedes k, muss notwendigerweise das Bild von h schon im Kern von f enthalten sein, wir haben somit wieder keine andere Wahl für unser Φ.

Beispiel 31 (Faserprodukt): In der Kategorie $\mathcal{Set}$ gibt es zu je drei Mengen A, B und C mit den Abbildungen $f\colon A \longrightarrow C$ und $g\colon B \longrightarrow C$ die Teilmenge

$$A \times_C B := \{(x, y) \mid f(x) = g(y)\}$$

des kartesischen Produkts, das *Faserprodukt*. Es ist die größte solche mit der Eigenschaft, dass f und g auf die einzelnen Komponenten angewandt einen gemeinsamen Punkt in C liefern. Das möchten wir verallgemeinern.

Sei also $\mathcal{C}$ eine Kategorie und es gebe in $\mathcal{C}$ das folgende Diagramm $\mathcal{D}$:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

Wir suchen nun Objekte K und Pfeile $x\colon K \longrightarrow A$ und $y\colon K \longrightarrow B$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "y"] \arrow[d, "x"] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

Das sind aber gerade die kommutativen Kegel über $\mathcal{D}$. Nun können wir das *Pullback* oder *Faserprodukt von $\mathcal{D}$* einfach als den Limes von $\mathcal{D}$ definieren, also ein Objekt $A \times_C B$ mit Morphismen $p_1\colon A \times_C B \longrightarrow A$ und $p_2\colon A \times_C B \longrightarrow B$, so dass es für jedes (K, x, y) genau einen Morphismus $\Phi\colon K \longrightarrow A \times_C B$ gibt (der Limes ist ja das terminale Objekt), so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[dr, dashed, "\exists!\Phi"] \arrow[drr, bend left, "y"] \arrow[ddr, bend right, "x"'] & & \\ & A \times_C B \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & B \arrow[d, "g"] \\ & A \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

In $\mathcal{S}et$ bedeutet das, dass $A \times_C B$ die oben angegebene Menge ist und wir für $p_{1,2}$ einfach die entsprechenden Projektionen einsetzen können, denn bei jedem (K, x, y) faktorisiert x bzw. y über $A \times_C B$.

Satz 5 (Existenz von Limiten)**:** *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Wenn in $\mathcal{C}$ Terminalobjekt, Produkt und Equaliser existieren, so existiert in $\mathcal{C}$ auch jeder endliche Limes.*

Beweis: Seien A, B und C Objekte aus $\mathcal{C}$ mit $f\colon A \longrightarrow C$ und $g\colon B \longrightarrow C$. Wir zeigen erst die Existenz des Faserprodukts: Nach Voraussetzung existiert das Produkt $A \times B$ mit den beiden Projektionen π_A und π_B. Nun haben wir aber

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, shift left, "f \circ \pi_A"] \arrow[r, shift right, "g \circ \pi_B"'] & \mathrm{C} \end{tikzcd}$$

und nach Vorraussetzung existiert nun der Equaliser E (mit der zugehörigen Abbildung $\tau\colon E \longrightarrow A \times B$) von $f \circ \pi_A$ und $g \circ \pi_B$. Dieser ist aber das Faserprodukt $A \times_C B$, denn für ein Objekt K mit Morphismen x und y, so dass $f \circ x = g \circ y$, kommutiert das folgende Diagramm,

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[dr, dashed, "\exists!\psi"] \arrow[drr, dashed, "\exists!\Phi"] \arrow[drrr, bend left, "y"] \arrow[dddrr, bend right, "x"'] & & & \\
& A \times B \arrow[drr, "\pi_B"] \arrow[ddr, "\pi_A"'] & & \\
& & E \arrow[ul, "\tau"'] \arrow[r, "\pi_B \circ \tau"] \arrow[d, "\pi_A \circ \tau"] & B \arrow[d, "g"] \\
& & A \arrow[r, "f"] & C
\end{tikzcd}$$

denn, da (K, x, y) einen kommutativen Kegel über (A, B) bildet, gibt es genau einen Morphismus ψ von K in das Produkt $A \times B$. Dadurch wird aber K zu einem Kegel über

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, shift left, "f \circ \pi_A"] \arrow[r, shift right, "g \circ \pi_B"'] & \mathrm{C} \end{tikzcd}$$

wodurch wir einen eindeutigen Morphismus Φ in den Equaliser E erhalten. Somit ist $(E, \pi_B \circ \tau, \pi_A \circ \tau)$ das Faserprodukt $A \times_C B$.

Nun nehmen wir uns ein beliebiges (endliches) Diagramm $\mathcal{D}$ und gehen genauso vor, um den Limes zu konstruieren: Im Folgenden bezeichne, für einen Pfeil $f\colon A \longrightarrow B$, $\operatorname{dom} f$ das Objekt A und $\operatorname{cod} f$ das Objekt B.

Sei I nun ein (nichtleerer) endlicher Graph und $\mathcal{D}\colon I \longrightarrow \mathcal{C}$ der zugehörige Morphismus. Da in $\mathcal{C}$ Produkte existieren, existieren induktiv auch endliche Produkte. Wir finden in

$\mathcal{C}$ also die Objekte

$$A = \prod_{i \in \mathcal{Ob} I} \mathcal{D}(i) \text{ und } B = \prod_{\alpha \in \mathcal{Ar} I} \mathcal{D}(\operatorname{cod} \alpha),$$

mit den zugehörigen Projektionen $\pi_{\operatorname{dom}\alpha}\colon A \longrightarrow \mathcal{D}(\operatorname{dom}\alpha)$, $\pi_{\operatorname{cod}\alpha}\colon A \longrightarrow \mathcal{D}(\operatorname{cod}\alpha)$ und $\pi_\alpha\colon B \longrightarrow \mathcal{D}(\operatorname{cod}\alpha)$, wobei die $\mathcal{D}(i)$ alle Objekte aus dem Diagramm sind und die $\mathcal{D}(\operatorname{cod}\alpha)$ all diejenigen, in die Pfeile hineingehen. Wir können also A mit den zugehörigen Projektionen als Kegel über den Komponenten von B auffassen und erhalten so (aus dem Produkt) einerseits genau einen Pfeil $f\colon A \longrightarrow B$ mit $\pi_\alpha \circ f = \alpha \circ \pi_{\operatorname{dom}\alpha}$, aber auch genau einen Pfeil $g\colon A \longrightarrow B$ mit $\pi_\alpha \circ g = \pi_{\operatorname{cod}\alpha}$, für alle Pfeile α. Das bedeutet, dass die folgenden Diagramme für alle α kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i \in \mathcal{Ob} I} D(i) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_{\operatorname{dom}\alpha}"] & \prod_{\alpha \in \mathcal{Ar} I} \mathcal{D}(\operatorname{cod}\alpha) \arrow[d, "\pi_\alpha"] \\
\mathcal{D}(\operatorname{dom}\alpha) \arrow[r, "\mathcal{D}\alpha"] & \mathcal{D}(\operatorname{cod}\alpha)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\prod_{i \in \mathcal{Ob} I} \mathcal{D}(i) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi_{\operatorname{cod}\alpha}"] & \prod_{\alpha \in \mathcal{Ar} I} \mathcal{D}(\operatorname{cod}\alpha) \arrow[dl, "\pi_\alpha"] \\
\mathcal{D}(\operatorname{cod}\alpha) &
\end{tikzcd}$$

Nun betrachten wir den Equaliser E von $f, g\colon A \longrightarrow B$ mit dem zugehörigen Morphismus $h\colon E \longrightarrow A$. Das bedeutet aber gerade, dass wir (E, h) als Kegel über $\mathcal{D}$ auffassen können und wegen $f \circ h = g \circ h$ kommutiert auch alles und wir sehen, auf Grund der Limeseigenschaft des Equalisers, dass E der Limes von $\mathcal{D}$ ist.

Den einzigen Fall, den wir so nicht erwischen, ist der des leeren Diagramms. Aber in dem Fall ist jedes Objekt Kegel über $\mathcal{D}$ und der Limes ist einfach das terminale Objekt in $\mathcal{C}$, dessen Existenz wir ja gefordert hatten. $\square$

Literatur

[AHS90] Jiri Adámek, Horst Herrlich und George E. Strecker. *Abstract and Concrete Categories: The Joy of Cats.* 1990. URL: `http://katmat.math.uni-bremen.de/acc/acc.pdf`.

[BW05] Michael Barr und Charles Wells. *Toposes, Triples and Theories.* 2005. URL: `http://www.case.edu/artsci/math/wells/pub/pdf/ttt.pdf`.

[Kü09] Stefan Kühnlein. *Algebra 2.* 2009. URL: `http://www.math.kit.edu/iag3/lehre/alg22009s/media/algebra2skript.pdf`.

[MM07] Saunders MacLane und Ieke Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory.* Springer, 2007.