ARRANGEMENTS, KAMMERKOMPLEXE UND $K(\Pi,1)$-RÄUME PROGRAMM ZUM FORSCHUNGSSEMINAR IM SOMMERSEMESTER 2015 DARMSTADT – FRANKFURT

AMIR DŽAMBIĆ UND MARTIN MÖLLER

Hauptziel ist es, einen Satz von Deligne ([Del72]) zu erarbeiten, welcher ein Kriterium dafür angibt, dass ein komplexer Vektorraum minus ein Arrangement von Hyperebenen ein $K(\Pi,1)$ ist, d.h. ein Raum, der eine bekannte Fundamentalgruppe Π und kontrahierbare universelle Überlagerung besitzt.
Die Arbeit von Brieskorn ([Bri71], [Bri73]) beschreibt, was Π ist, d.h. er gibt konkret eine Präsentation an.
Als Anwendung betrachten wir die Struktur des Modulraums abelscher Differentiale. Dieser Raum hat eine Stratifizierung nach Anzahl und Vielfachheit der Nullstellen. Die Topologie der Strata ist weitgehend unbekannt. Kontsevich hat spekuliert, dass sie $K(\Pi,1)$-Räume sind. Für hyperelliptische Strata ist das einfach, für wenige Strata in kleinem Geschlecht wurde das in [LM14] mit Hilfe des Satzes von Deligne beweisen
Im Buch von Orlik und Terao ([OT92]) stehen Grundlagen über Arrangements sowie ein Überblick über die $K(\Pi,1)$-Vermutungen und -sätze. Das Buch von Abramenko und Brown ([AB08]) sowie Bourbaki-Band [Bou02] enthalten Grundlagen über endliche Spiegelungsgruppen, Coxetergruppen, und Coxeterkomplexe.

23.04.2015, Frankfurt

Vortrag 1. *Hyperebenenarrangements und Problemstellung* **(Amir Džambić)**
Ziel: Einführung in die Problemstellung, erste Beispiele.
Stichpunkte: Definitionen und Begriffe zu Arrangements, [OT92, 1.2], Definition des $K(\Pi,1)$ (manchmal auch asphärischer Raum genannt), [Spa81] (wir brauchen nur die Definition), Arrangements aus [OT92, 5.1] diskutieren, etwa Prop. 5.3, 5.7, Thm 5.9, Cor. 5.23.
Quellen: [OT92], [Spa81].

Vortrag 2. *Endliche Spiegelungsgruppen* **(Sevda Kurul)**
Ziel: Die Geometrie von Spiegelungsgruppen aus [AB08, S.9-49] ausarbeiten.
Stichpunkte: Spiegelungsgruppen, Wurzelsysteme, Zellenzerlegung, Eigenschaften des Komplexes, Beispiele, Coxeter-Matrix und Diagramm, Klassifikation.
Quellen: [AB08], [Cox35], [Bou02].

07.05.2013, Darmstadt

Vortrag 3. *Endliche Spiegelungsgruppen und die Fundamentalgruppe ihrer Bahnenräume* **(Orsola Tommasi)**
Ziel: Der Satz von Brieskorn aus [Bri71].
Stichpunkte: Verallgemeinerte Zopfgruppen definieren, Relation zu Coxetergruppen [Mag74, Abschnitt 7], Satz von Brieskorn, nach dem π_1 des Bahnenraums einer Spiegelungsgruppe eine verallgemeinerte Zopfgruppe ist, beweisen [Bri71].
Quellen: [Bri71], [Mag74].

Vortrag 4. *Coxetersysteme* **(Nils Scheithauer)**
Ziel: Coxetersysteme.
Stichpunkte: Coxeterkomplexe [AB08, 3.1,3.2] (Nötig sind ggf. auch Definitionen aus dem 2. Kapitel), Wurzeln, [AB08, Thm 3.65], Abstand [AB08, 3.5]
Quellen: [AB08], sekundär: [Tit74a], [Tit74b], [Bou02].

21.05.2013, Frankfurt

Vortrag 5. *Gebäude* **(Nithi Rungtanapirom)**
Ziel: Gebäude, Beispiele und Eigenschaften
Stichpunkte: Gebäude [AB08, S.173-177, Bsp. 4.15,4.16, 4.3], Retraktionen [AB08, 4.4], topologischer Typ sphärischer Gebäude ([AB08, Thm 4. 73]), Abstandsfunktion [AB08, 4.8]
Quellen: [AB08], sekundär: [Tit74a], [Tit74b], [Bou02].

Vortrag 6. *Bahnenräume gewisser Spiegelungsgruppen sind* $K(\Pi, 1)$ *und die Berechnung der Kohomologie* **(Kolja Hept)**
Ziel: Die Arbeit [Bri73].
Stichpunkte: Beweis der $K(\Pi, 1)$-Eigenschaft für gewisse Typen von Spielegelungsgruppen (Prop 2), Kohomologieberechnungen (Thm 6, Thm 7, Thm 8).
Quellen: [Bri73]

11.06.2015, Darmstadt

Vortrag 7. *Delignes Arbeit I* **(Anna von Pippich)**
Ziel: Delignes Arbeit bis (einschl.) Prop. 1.24.
Stichpunkte: Insbesondere geht es um die Konstruktion des Kammerkomplexes eines Arrangements (diesmal ist nicht notwendigerweise eine Spiegelungsgruppe mit dem Arrangement verknüpft!).
Quellen:[Del72]

Vortrag 8. *Delignes Arbeit II* **(Shaul Zemel)**
Ziel: Delignes Arbeit ab Prop. 1.24 bis (enschl) Thm. 2.15.
Stichpunkte: Eigenschaften der Kategorie Gal und den verwandten Kategorien Gal_+ und Gal_0, Definition und die topologischen Eigenschaften des Gebäudes.
Quellen: [Del72]

18.06.2015, Frankfurt

Vortrag 9. *Delignes Arbeit III* **(Jakob Stix)**
Ziel: § 3 und § 4 von [Del72].
Stichpunkte: Insbesondere Satz 3.7 und Satz 4.4.
Quellen: [Del72]

Vortrag 10. *Anwendung: Modulräume flacher Flächen* **(Quentin Gendron)**
Ziel: Die Arbeit von Looijenga und Mondello, die Strata von abelschen Differentialen in kleinem Geschlecht mit Hyperebenenarrangements in Verbindung bringt.
Stichpunkte: Überblick über Strata (Zusammmenhangskomponenten,...) mit dem Ziel [LM14][Thm. 1.1] und vor allem [LM14][Cor. 1.2]
Quellen: [LM14]

Die Vorträge finden statt

- in Frankfurt: Robert-Mayer-Str. 10, Raum 711 (groß), ab 15:00 Uhr s.t.
- in Darmstadt: Schlossgartenstr. 7, Raum S215 / 234, ab 15:20 Uhr s.t.

und sollten jeweils eine Stunde dauern.

Literatur

[AB08] Peter Abramenko and Kenneth S. Brown. *Buildings*, volume 248 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2008. Theory and applications.

[Bou02] Nicolas Bourbaki. *Lie groups and Lie algebras. Chapters 4–6*. Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, 2002. Translated from the 1968 French original by Andrew Pressley.

[Bri71] E. Brieskorn. Die Fundamentalgruppe des Raumes der regulären Orbits einer endlichen komplexen Spiegelungsgruppe. *Invent. Math.*, 12:57–61, 1971.

[Bri73] Egbert Brieskorn. Sur les groupes de tresses [d'après V. I. Arnol′d]. In *Séminaire Bourbaki, 24ème année (1971/1972), Exp. No. 401*, pages 21–44. Lecture Notes in Math., Vol. 317. Springer, Berlin, 1973.

[Cox35] H.S.M Coxeter. The complete classification of finite groups of the form $r_i^2 = (r_i r_j)^k_{ij} = 1$. *J. London Math. Soc.*, 10:21–25, 1935.

[Del72] Pierre Deligne. Les immeubles des groupes de tresses généralisés. *Invent. Math.*, 17:273–302, 1972.

[LM14] Eduard Looijenga and Gabriele Mondello. The fine structure of the moduli space of abelian differentials in genus 3. *Geom. Dedicata*, 169:109–128, 2014.

[Mag74] Wilhelm Magnus. Braid groups: a survey. In *Proceedings of the Second International Conference on the Theory of Groups (Australian Nat. Univ., Canberra, 1973)*, pages 463–487. Lecture Notes in Math., Vol. 372. Springer, Berlin, 1974.

[OT92] Peter Orlik and Hiroaki Terao. *Arrangements of hyperplanes*, volume 300 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[Spa81] Edwin H. Spanier. *Algebraic topology*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1981. Corrected reprint.

[Tit74a] J. Tits. *Buildings of Spherical Type and Finite BN-Pairs*, volume 386 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 1974.

[Tit74b] J. Tits. On buildings and their applications. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, pages 209–220. Vancouver, 1974.