Der Beweis des Ergodizitätssatzes von Moore

Markus Schwagenscheidt

Forschungsseminar Darmstadt-Frankfurt am 23.05.2013

Theorem (Moore)

Sei $G = \prod G_i$ endliches Produkt zusammenhängender nicht-kompakter einfacher Lie-Gruppen G_i mit $|Z(G_i)| < \infty$ und S ein irreduzibler ergodischer G-Raum mit endlichem invarianten Maß. Dann gilt:

$$H \leq G \text{ abgeschlossen, nicht-kompakt} \quad \Rightarrow \quad H \text{ ergodisch auf } S.$$

Beweisidee: Formuliere die Aussage in der Sprache der Darstellungstheorie und nutze deren Ergebnisse.

Wir zeigen Moores Theorem nur für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ und $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, da die wesentlichen Ideen des Beweises für allgemeinere G hier enthalten sind.

Definiere eine unitäre Darstellung $\pi_G : G \to U(L^2(S))$ durch

$$(\pi_G(g)f)(s) = f(sg), \qquad g \in G,\ f \in L^2(S),\ s \in S.$$

Da S endliches Maß hat, ist $\mathbb{C} \subseteq L^2(S)$. Das orthogonale Komplement $\mathbb{C}^\perp \subseteq L^2(S)$ ist unter π_G invariant, denn

$$\langle \pi_G(g)f, c\rangle = \int f(sg)\overline{c}\ d\mu = \int f(s)\overline{c}\ d\mu = \langle f, c\rangle = 0$$

für $f \in \mathbb{C}^\perp$ und $c \in \mathbb{C}$ wegen der Invarianz von μ. Daher können wir π_G als Darstellung

$$\pi_G : G \to U(\mathbb{C}^\perp)$$

auffassen.

Satz

Eine lokalkompakte zweitabzählbare Gruppe G wirkt genau dann ergodisch auf S, wenn die Darstellung $(\pi_G(g)f)(s) = f(sg)$ keine nicht-trivialen invarianten Vektoren in $\mathbb{C}^\perp$ hat.

Beweis:

$$
\begin{aligned}
G \text{ nicht ergodisch} \quad &\Rightarrow \quad \exists A \subseteq S \ G\text{-invariant, nicht null/konull.} \\
&\Rightarrow \quad \chi_A \ G\text{-invariant, nicht essentiell konstant.} \\
&\Rightarrow \quad \text{Proj. } p(\chi_A) = \chi_A - \frac{\langle \chi_A, 1 \rangle}{\mu(S)} \in \mathbb{C}^\perp \ G\text{-invariant, nicht trivial.} \\
&\Rightarrow \quad \forall g \in G : \pi_G(g)\big(p(\chi_A)\big) = p(\chi_A), \text{ also } p(\chi_A) \ G\text{-invariant.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G \text{ ergodisch, } f \in \mathbb{C}^\perp \ \pi_G\text{-invariant} \quad &\Rightarrow \quad \forall g \in G\text{: } f(sg) = f(s) \text{ f.ü.} \\
&\Rightarrow \quad \exists \tilde{f} \ G\text{-invariant mit } \tilde{f} = f \text{ f.ü. (2.2.16)} \\
&\Rightarrow \quad \tilde{f} \text{ ess. konstant, da } G \text{ ergodisch (2.1.11)} \\
&\Rightarrow \quad f = 0 \text{ in } \mathbb{C}^\perp.
\end{aligned}
$$

Wir zeigen also allgemeiner:

Theorem

Sei $\pi : G \to U(\mathcal{H})$ eine unitäre Darstellung. Hat G (wie in Moores Theorem) keine invarianten Vektoren, und ist $H \leq G$ eine abgeschlossene, nicht-kompakte Untergruppe, so hat auch H keine invarianten Vektoren.

Dann folgt:

$$
\begin{aligned}
G \text{ ergodisch auf } S &\Leftrightarrow G \text{ hat keine invarianten Vektoren bzgl. } (\pi_G(g)f)(s) = f(sg).\\
&\Rightarrow H \text{ hat keine invarianten Vektoren bzgl } \pi_G.\\
&\Leftrightarrow H \text{ ergodisch auf } S.
\end{aligned}
$$

Definition

Sei $\pi : G \to U(\mathcal{H})$ eine unitäre Darstellung. Seien $v, w \in \mathcal{H}$ Einheitsvektoren. Eine Funktion $f = f_{v,w} : G \to \mathbb{C}$, $f(g) = \langle \pi(g)v, w \rangle$ heißt *Matrix-Koeffizient von* π.

Schreibe $g_n \to \infty$, wenn jedes Kompaktum von G nur endlich viele der g_n enthält („g_n verlässt jedes Kompaktum von G“).

Theorem

Sei G wie in Moores Theorem und $\pi : G \to U(\mathcal{H})$ eine unitäre Darstellung ohne invariante Vektoren. Dann verschwindet jeder Matrix-Koeffizient von π bei ∞, d.h. $f(g_n) \to 0$ wenn $g_n \to \infty$.

$\boxed{G \text{ keine invarianten Vektoren} \Rightarrow \text{Matrix-Koeffizienten verschwinden bei } \infty}$

Daraus folgt Moores Theorem:

- Sei $H \leq G$ abgeschlossen, nicht-kompakt.
- Wir müssen zeigen, dass $\pi|H$ keine invarianten Vektoren hat.
- Hat $\pi|H$ invarianten (Einheits-)Vektor v, so ist $f_{v,v}(h) = \langle \pi(h)v, v \rangle = 1$ für $h \in H$.
- G lokalkompakt, zweitabzählbar: Finden abzählbare offene Überdeckung $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von G mit $\overline{U}_n$ kompakt.
- Wähle Folge $h_n \in H \setminus \bigcup_{j\leq n} \overline{U}_j$.
- h_n verlässt jedes Kompaktum von G (also $h_n \to \infty$ in G), aber $f(h_n) = 1$.
- Widerspruch zum letzten Theorem.
- v existiert nicht!

Definition

- Sei M Maßraum, der sich als disjunkte Vereinigung $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ mit messbaren M_i schreiben lässt.
- $\mathcal{H}_x$ für $x \in M$ seien Hilberträume mit $\mathcal{H}_x = \mathcal{H}_y$ für $x, y \in M_i$.
- Eine Zuordnung $f : M \to \bigcup_{x \in M} \mathcal{H}_x$ mit $f(x) \in \mathcal{H}_x$ heißt Schnitt.
- $\int_M^{\oplus} \mathcal{H}_x = L^2(M, \mathcal{H}_x)$ Menge der Schnitte mit $\int_M \|f(x)\|^2_{\mathcal{H}_x} < \infty$. Identifiziere Schnitte, die fast überall gleich sind.
- $L^2(M, \mathcal{H}_x)$ ist Hilbertraum mit $\langle f, g \rangle = \int_M \langle f(x), g(x) \rangle_{\mathcal{H}_x}$.
- Seien $\pi_x : G \to U(\mathcal{H}_x)$ für $x \in M$ unitäre Darstellungen. Definiere

$$\left(\left(\int_M^{\oplus} \pi_x \right) (g) f \right) (x) = \big(\pi_x(g)\big)\big(f(x)\big), \quad g \in G,\ f \in L^2(M, \mathcal{H}_x),\ x \in M.$$

Dann ist $\int_M^{\oplus} \pi_x : G \to U(L^2(M, \mathcal{H}_x))$ eine unitäre Darstellung.

Satz

Jede unitäre Darstellung π einer lokalkompakten zweitabzählbaren Gruppe G ist von der Form $\int_M^{\oplus} \pi_x$ für einen Standardborelraum M mit irreduziblen π_x.

- $\hat{\mathbb{R}}^n = \{\lambda_\theta(t) = e^{i\langle\theta,t\rangle} : \theta \in \mathbb{R}^n\}$ Charaktere = irreduzible Darstellungen von $\mathbb{R}^n$.
- Identifiziere $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \hat{=} \lambda_{(\theta_1,\ldots,\theta_n)}$.
- Forme $L^2(\hat{\mathbb{R}}^n, \mathcal{H}_\lambda)$ mit Hilberträumen $\mathcal{H}_\lambda$ und einem Maß μ auf $\hat{\mathbb{R}}^n$.
- Definiere unitäre Darstellung von $\mathbb{R}^n$ auf $L^2(\hat{\mathbb{R}}^n, \mathcal{H}_\lambda)$ durch

$$(\pi_{(\mu,\mathcal{H}_\lambda)}(t)f)(\lambda) = \lambda(t)f(\lambda), \qquad t \in \mathbb{R}^n,\ f \in L^2(\hat{\mathbb{R}}^n, \mathcal{H}_\lambda),\ \lambda \in \hat{\mathbb{R}}^n.$$

Satz

Jede unitäre Darstellung von $\mathbb{R}^n$ hat die Form $\pi_{(\mu,\mathcal{H}_\lambda)}$ für geeignetes (σ-endliches) Maß μ und Hilberträume $\mathcal{H}_\lambda$.

Angenommen, $\mathbb{R}^n \lhd G$ ist normale Untergruppe. G wirkt auf $\mathbb{R}^n$ durch Konjugation

$$g.t = gtg^{-1}$$

und auf $\hat{\mathbb{R}}^n$ durch Konjugation im Argument:

$$(g.\lambda)(t) = \lambda(g^{-1}tg).$$

Satz

Sei π unitäre Darstellung von G, $\mathbb{R}^n \lhd G$ normal und $\pi|\mathbb{R}^n \cong \pi_{(\mu,\mathcal{H}_\lambda)}$. Für messbares $E \subseteq \hat{\mathbb{R}}^n$ sei $\mathcal{H}_E = L^2(E, \mu, \mathcal{H}_\lambda)$. Dann gilt

$$\pi(g)\mathcal{H}_E = \mathcal{H}_{g.E}.$$

Betrachte folgende Untergruppen von $SL_2(\mathbb{R})$:

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\},$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\},$$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\},$$

Dann ist $N \cong \mathbb{R}$ normal in P und $P = AN$.

Theorem

Sei $\pi : P \to U(\mathcal{H})$ unitäre Darstellung von $P = AN$. Dann gilt entweder

1. *$\pi|N$ hat nicht-triviale invariante Vektoren oder*
2. *für alle Einheitsvektoren $v, w \in \mathcal{H}$ gilt $\langle \pi(a_n)v, w \rangle \to 0$ für $a_n \to \infty$ in A.*

- Identifiziere $N \cong \mathbb{R}$, dann $\pi|N = \pi_{(\mu,\mathcal{H}_\lambda)}$ mit einem σ-endlichen Maß μ auf $\hat{\mathbb{R}}$.
- 1. Fall: $\mu(\{0\}) > 0$, dann $\mathcal{H}_{\{0\}}$ nicht-trivial und N-invariant ($\mu(\{0\}) < \infty$ wegen σ-Endlichkeit). Es folgt der erste Fall.
- 2. Fall: $\mu(\{0\}) = 0$:
- Identifiziere $\mathbb{R} \cong \hat{\mathbb{R}}$ via $\theta \mapsto \lambda_\theta$,
- $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix}\right) \in A$ wirkt auf $\hat{\mathbb{R}}$ durch Multiplikation mit a^2
- Sind $E, F \subseteq \hat{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ kompakt, so gilt

  $$\mu(gE \cap F) = 0$$

  für $g \in A$ (=Diagonalmatrizen) außerhalb großer kompakter Mengen.

- Seien $f, h \in L^2(\hat{\mathbb{R}}, \mu, \mathcal{H}_\lambda)$ Einheitsvektoren.
- Zu $\varepsilon > 0$ gibt es Kompakta $E, F \subseteq \hat{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ mit

$$\|\chi_E f - f\| \leq \varepsilon, \qquad \|\chi_F h - h\| \leq \varepsilon.$$

(hier ist wichtig, dass $\mu(\{0\}) = 0$). Es folgt

$$|\langle \pi(g) f, h\rangle| \leq 2\varepsilon + |\langle \pi(g)(\chi_E f), \chi_F h\rangle|,$$

denn

$$\begin{aligned}
|\langle \pi(g) f, h\rangle| &\leq |\langle \pi(g)(f - \chi_E f), h\rangle| + |\langle \pi(g)(\chi_E f), h - \chi_F h\rangle| \\
&\quad + |\langle \pi(g)(\chi_E f), \chi_F h\rangle| \\
&\leq \|f - \chi_E f\| \cdot \underbrace{\|h\|}_{=1} + \underbrace{\|\chi_E f\|}_{\leq 1} \cdot \|h - \chi_F h\| + |\langle \pi(g)(\chi_E f), \chi_F h\rangle|
\end{aligned}$$

mit Cauchy-Schwarz und da $\pi(g)$ unitär ist.

- $\pi(g)(\chi_E f) \in \mathcal{H}_{gE}$ nach vorigem Satz.
- $\mathcal{H}_{gE} \perp \mathcal{H}_F$ für g außerhalb großer kompakter Mengen von A.
- $\langle \pi(g)\chi_E f, \chi_F h\rangle = 0$ für g außerhalb großer kompakter Mengen A.
- $|\langle \pi(g) f, h\rangle| \leq 2\varepsilon$, geht also gegen 0. Es folgt der zweite Fall.

- Schreibe $T \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ als $T = US$ mit U orthogonal, S positiv definit (z.B. $S = \sqrt{T^t T}$ und $U = TS^{-1}$).
- Diagonalisiere $S = U_0 D U_0^{-1}$ mit U_0 orthogonal, D positiv diagonal.
- Erhalten $T = U_1 D U_2$ mit $U_1, U_2 \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ und D positiv diagonal.
- Liefert Zerlegung $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = KAK$ mit kompaktem K.

Lemma

Sei $G = KAK$ mit kompaktem K und π unitäre Darstellung von G. Dann genügt es, $f(a_n) \to 0$ für $a_n \to \infty$ in A zu zeigen für Matrix-Koeffizienten f von π, um das Verschwinden der Matrix-Koeffizienten von G zu sehen.

Beweis.

- Angenommen, $g_n = k_{1n} a_n k_{2n} \to \infty$ aber $|\langle \pi(g_n)v, w\rangle| \geq \varepsilon$ für große n.
- $|\langle \pi(g_n)v, w\rangle| = |\langle \pi(a_n)(\pi(k_{2n})v), \pi(k_{1n}^{-1})w\rangle|$.
- Finde konvergente (Teil-)Folgen $k_{2n} \to k$, $k_{1n}^{-1} \to k'$ in K.
- O.B.d.A konvergieren k_{2n} und k_{1n}^{-1}.
- $a_n \to \infty$ in A (sonst $k_{1n}^{-1} g_n k_{2n}^{-1} = a_n \in \tilde{K}$ also $g_n \in K\tilde{K}K$).
- $|\langle \pi(a_n)(\pi(k)v), \pi(k')w\rangle| \geq \varepsilon/2$ für große n. Widerspruch.

□

Theorem

Ist π unitäre Darstellung von $G = \mathsf{SL}_2(\mathbb{R})$ ohne invariante Vektoren, so verschwinden alle Matrix-Koeffizienten von π bei ∞.

- Letztes Lemma: Müssen nur $\langle \pi(a)v, w\rangle \to 0$ für $a \to 0$ in A (Diagonalmatrizen) zeigen.
- Vorletztes Theorem: Müssen zeigen, dass es keine N-invarianten Vektoren gibt.
- Angenommen, v ist N-invariant. Zeigen, dass v auch G-invariant ist.
- Der spezielle Matrix-Koeffizient $f(g) = f_{v,v}(g) = \langle \pi(g)v, v\rangle : G \to \mathbb{C}$ ist stetig und von links und rechts N-invariant, d.h. $f(ng) = f(gn) = f(g)$ für $n \in N$.
- $f : G/N \to \mathbb{C}$ ist von links N-invariant.
- $G/N \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ via $gN \mapsto g \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, da N Stabilisator von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Linksmultiplikation von N auf G/N korrespondiert zu Matrixmultiplikation von N auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
- Bahnen in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$: horizontale Linien ohne x-Achse, Punkte auf der x-Achse ohne 0.
- f stetig und konstant auf Bahnen $\Rightarrow$ f konstant auf x-Achse.
- x-Achse korrespondiert zu $P/N \subseteq G/N \Rightarrow f$ konstant auf P.

- Für $g \in P$ gilt

  $$\langle \pi(g)v - v, \pi(g)v - v\rangle = \langle v, v\rangle + \langle v, v\rangle - \langle \pi(g)v, v\rangle - \langle \pi(g^{-1})v, v\rangle = 0$$

  d.h. v ist P-invariant.
- $f : G \to \mathbb{C}$ ist von beiden Seiten P-invariant.
- $f : G/P \to \mathbb{C}$ ist von links P-invariant.
- P hat dichten Orbit in G/P: G wirkt transitiv auf $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, P ist Stabilisator von $[1 : 0]$, also $G/P \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Es ist

  $$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} [0 : 1] = [b : a^{-1}]$$

  Man erreicht so jeden Punkt außer $[1 : 0]$, d.h. die Bahn von $[0 : 1]$ ist dicht.
- $\Rightarrow f$ konstant auf G.
- v ist G-invariant. Widerspruch.

Theorem

Ist π unitäre Darstellung von $G = \mathsf{SL}_n(\mathbb{R})$ ohne invariante Vektoren, so verschwinden alle Matrix-Koeffizienten von π bei ∞.

- Seien A Diagonalmatrizen, $B \cong \mathbb{R}^{n-1}$ Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & b_2 & \dots & b_n \\ & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix} \cong (b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

- $aBa^{-1} = B$ für $a \in A \Rightarrow H = AB$ Untergruppe von G, B normal in H.
- Es genügt zu zeigen, dass die Matrix-Koeffizienten $f(a)$ für $a \to \infty$ in A gegen 0 gehen.
- $\pi|B \cong \pi_{(\mu,\mathcal{H}_\lambda)}$ Darstellung auf $L^2(\hat{\mathbb{R}}^{n-1}, \mu, \mathcal{H}_\lambda)$.

- Wie oben zeigt man: Ist $\mu(\{\lambda_i = 0\}) = 0$ für $i = 2, \dots, n$, so verschwinden die Matrix-Koeffizienten $f(a)$ für $a \to \infty$ in A:
  - $g = (a_1, \dots, a_n) \in A$ wirkt auf $\lambda = (1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \hat{\mathbb{R}}^{n-1}$ (mittels Konjugation) durch
    $$(1, a_1 a_2^{-1} \lambda_2, \dots, a_1 a_n^{-1} \lambda_n),$$
  - Sind $E, F \subseteq \hat{\mathbb{R}}^{n-1} \setminus \bigcup \{\lambda_i = 0\}$ kompakt, so ist
    $$g.E \cap F = \emptyset$$
    für g außerhalb großer kompakter Mengen in A. (hier wichtig dass $\mu(\{\lambda_i = 0\}) = 0$)
  - Zu $\varepsilon > 0$ wähle Kompakta E, F mit
    $$\|\chi_E f - f\| \leq \varepsilon, \qquad \|\chi_F h - h\| \leq \varepsilon.$$
    Dann
    $$|\langle \pi(g) f, h \rangle| \leq 2\varepsilon + |\langle \pi(g)(\chi_E f), \chi_F h \rangle|.$$
  - $\pi(g)\chi_E f \in \mathcal{H}_{gE}$.
  - $\langle \pi(g)\chi_E f, \chi_F h \rangle = 0$ für g außerhalb großer kompakter Mengen von A.

- Zeigen: $\mu(\{\lambda_i = 0\}) > 0$ unmöglich:
- Ist $\mu(\{\lambda_i = 0\}) > 0$, so hat die abgeschlossene, nicht-kompakte Untergruppe
$$B_i = \{b \in B : b_j = 0 \text{ für } i \neq j\}$$
von B invariante Vektoren, nämlich alle in $\mathcal{H}_{\{\lambda_i=0\}}$, denn
$$(\pi_{(\mu,\mathcal{H}_\lambda)}(b)f)(\lambda) = \lambda(b)f(\lambda) = f(\lambda),$$
da $\lambda(b) = e^{i\langle(0,\dots,b_i,\dots,0),(\lambda_2,\dots,0_i,\dots,\lambda_n)\rangle} = 1$ für $\lambda \in \{\lambda_i = 0\}$, $f \in \mathcal{H}_{\{\lambda_i=0\}}$.
- Sei H_i Menge der Matrizen, die an den Stellen $(1,1),(i,i),(1,i),(i,1)$ Einträge haben, auf der Diagonale sonst 1, und an allen anderen Stellen 0.
- B_i ist abgeschlossene, nicht-kompakte Untergruppe von $H_i \cong \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.
- Letztes Theorem (für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$): H_i hat invariante Vektoren.
- $A_i = A \cap H_i$ hat invariante Vektoren. Diese nennen wir $W = \{v \in \mathcal{H} : \pi(a)v = v \text{ für alle } a \in A_i\} \neq \{0\}$.
- Zeigen: W ist G-invarianter Unterraum, denn dann folgt:
  - Erhalten Darstellung $\pi_W : G \to U(W)$.
  - Dann $A_i \subseteq \mathrm{kern}(\pi_W)$ und $A_i \not\subseteq \{\pm 1\}$.
  - $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ hat nur G und ± 1 als normale Untergruppen, also $\mathrm{kern}(\pi_W) = G$.
  - Vektoren in W sind G-invariant. Widerspruch.

- Zu zeigen: W ist G-invarianter Unterraum:
- Für $k \neq j$ sei $B_{kj} \subseteq G$ Untergruppe mit 1 auf Diagonale und einzigem Eintrag bei (k, j).
- A und alle B_{kj} erzeugen zusammen G, d.h. es genügt zu zeigen, dass A und die B_{kj} W invariant lassen.
- $A_i \subseteq A$ und A abelsch: A lässt W invariant.
- Für B_{kj} zwei Fälle:
    - k, j beide nicht 1 oder i: B_{kj} vertauscht elementweise mit A_i und lässt daher W invariant.
    - $\{k, j\} \cap \{1, i\} \neq \emptyset$:
        - Dann $aB_{kj}a^{-1} = B_{kj}$ für $a \in A_i$.
        - $A_i B_{kj}$ isomorph zu P, wobei:
        - A_i zu Diagonalmatrizen in P,
        - B_{kj} zu N.
        - Alle A_i-invarianten Vektoren sind B_{kj}-invariant (2.3.7).
        - B_{kj} lässt W invariant.
- Insgesamt lassen A und alle B_{kj} W invariant, damit gilt dasselbe auch für G und wir sind fertig.