Lineare Unabhängigkeit, Basis & Dimension

Linearkombination und Spann

Erklärung

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Wir sagen ein Vektor $v \in V$ lässt sich als **Linearkombination** der Vektoren $v_1, \ldots, v_k \in V$ schreiben, wenn es Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ gibt mit

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot v_i \;=\; \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k.$$

Erklärung

Das Erzeugnis oder auch der **Spann** von $v_1, \ldots, v_k$ ist $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle := \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_k)$

$$:= \left\{ v \in V : v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \text{ mit } \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K \right\}.$$

Man nennt $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ auch lineare Hülle der Vektoren $v_1 \ldots v_k$.

- $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ ist ein Untervektorraum von V.
- $v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot v_i$
  $\Rightarrow v \in \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$.
- Ferner ist $\operatorname{span}(\emptyset) = 0$

Beispiel

Erzeugendensystem

Erklärung

Sei $I \subset \mathbb{N}$ eine Indexmenge.
Eine Menge $\{v_i : i \in I\} \subset V$ ist ein **Erzeugendensystem** von V, wenn gilt:

$$\operatorname{span}(\{v_i, i \in I\}) = V.$$

Man sagt dann auch, dass die Menge $\{v_i : i \in I\}$ den Vektorraum V erzeugt.

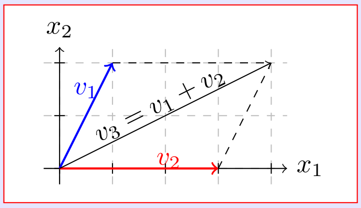
Lineare Unabhängigkeit

Erklärung

Die Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ heißen **linear unabhängig**, wenn gilt

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$$

Andernfalls heißen die Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ **linear abhängig**.
Im Bild rechts: $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$



Der Nullvektor ist immer linear abhängig.

Basis und Dimension

Erklärung

Wir nennen $\{v_1, ..., v_n\}$ eine **Basis** von V, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

- B1: Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig.
- B2: $V = \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n)$.

Eine Basis ist ein minimales linear unabhängiges Erzeugendensystem von Vektoren.

Jeder Vektorraum hat eine Basis. Ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis, so ist die Darstellung

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i \qquad \text{für jeden Vektor } v \in V \text{ eindeutig.}$$

Jede Basis hat dieselbe Mächtigkeit, d.h. dieselbe Anzahl an Vektoren.

Die Basis eines Vektorraums ist nicht eindeutig.

Hinweis

Erklärung

Formaler ausgedrückt: Sind $v_1, \ldots, v_n$ und $w_1, \ldots, w_k$ Basen von V, so gilt $n = k$.
Zudem ist jeder n-dimensionale Vektorraum isomorph zu $\mathbb{R}^n$.

Für einen K-Vektorraum V definieren wir die **Dimension** $\dim(V)$ als die Mächtigkeit seiner Basis. Hat V eine Basis aus n Vektoren, so ist $\dim(V) = n$. Bei nicht endlicher Basis ist $\dim(V) = \infty$.

Dimensionssätze

Erklärung

Seien V_1 und V_2 zwei endlichdimensionale Vektorräume und $f : V_1 \to V_2$ eine lineare Abbildung.

Dann gelten:

- $\dim(V) = \dim \ker(f) + \dim \operatorname{bild}(f)$, **Kern-Bild-Satz**
- $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$ - $\dim(V_1 \cap V_2)$ **Dimensionsformel**.

Aufgaben

Linearkombination und Spann

Aufgabe 1. Gegeben sei die Menge W bestehend aus den 6 Vektoren $v_1, ..., v_6 \in \mathbb{R}^4$, wobei

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, v_6 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) $\operatorname{span}(v_2, v_3, v_5) = \operatorname{span}(v_3, v_5)$

b) $\operatorname{span}(v_1, v_2, v_4) = \operatorname{span}(v_2, v_3, v_5, v_6)$

c) $\operatorname{span}(v_1, v_5, v_6) = \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$

d) $\operatorname{span}(v_2, v_3, v_5) = \operatorname{span}(v_1, v_3, v_5)$

e) $\operatorname{span}(v_2, v_5, v_6) = \operatorname{span}(v_3, v_5, v_6)$

Aufgabe 2. Schreiben Sie - falls möglich - jeden Vektor $v_i \in W, i = 1, 2, \dots, 6$, (siehe Aufgabe 1) als Linearkombination von anderen Vektoren $v_1, \dots, v_6$ aus W.

Lineare Unabhängigkeit

Aufgabe 3. Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch?

a) Die Vektoren $\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}6\\-1\\7\end{pmatrix}$ sind linear unabhängig.

b) Zwei Vektoren v_1 und v_2 sind genau dann linear abhängig, wenn es ein $\lambda \in K$ gibt mit $\lambda v_1 = v_2$.

Die Menge $\operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bildet mit der Addition gegeben durch

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

für $f, g \in \operatorname{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und Skalarmultiplikation gegeben durch $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ einen Vektorraum.

c) Die Funktionen $f_1(x) = x^2 + x + 1$, $f_2(x) = 2x + 1$ und $f_3(x) = 3x^2 - 5x - 1$ sind linear unabhängig in $\operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Aufgabe 4. Sei $V = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ der Vektorraum der Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.
Für alle $x \in \mathbb{R}$ sei die Abbildung $\delta_x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert als

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = y, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Abbildungen δ_x, $x \in \mathbb{R}$, linear unabhängig sind.

Basis und Dimension

Aufgabe 5. Sei V ein Vektorraum. Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V heißt Basis von V . Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) $v_1, \dots, v_n$ ist eine Basis von V .

b) $v_1, \dots, v_n$ ist ein minimales Erzeugendensystem, d.h. $v_1, \dots, v_n$ ist ein Erzeugendensystem und für alle i mit $1 \leq i \leq n$ ist $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$ kein Erzeugendensystem.

Aufgabe 6. Bestimmen Sie eine Basis für die folgenden Unterräume.

$$A := \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}\right), \qquad B := \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix}\right),$$

$$C := \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

Bestimme eine Basis des folgenden Unterraums; dabei müssen a, b, c die gegebene Gleichung erfüllen.

$$D := \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : a + 2b = 2c\right)$$