Komplexe Zahlen

Erklärung

Definition der komplexen Zahlen

Die komplexen Zahlen sind $\mathbb{C} := \{a + b \cdot i \mid \text{mit } a, b \in \mathbb{R}\}$.

Die *komplexe Einheit* i erfüllt $i^2 = -1$. Es gilt also $i \notin \mathbb{R}$.

Addition

Multipl.

Rechenregeln

Addition in $\mathbb{C}$	Multiplikation in $\mathbb{C}$
$\begin{array}{rrr} & a+ & b \cdot i \\ + & c+ & d \cdot i \\ \hline = & (a+c) + & (b+d) \cdot i \end{array}$	$\begin{array}{rl} & (a + b \cdot i) \cdot (c + d \cdot i) \\ \hline = & a \cdot c + a \cdot d \cdot i + c \cdot b \cdot i + b \cdot d \cdot \underbrace{i^2}_{i^2=-1} \\ = & a \cdot c - b \cdot d + (a \cdot d + c \cdot b) \cdot i \end{array}$

Rechnen wie bisher.
Einzig neu:
- i ausklammern!
- i^2 durch -1 ersetzen!

Erklärung

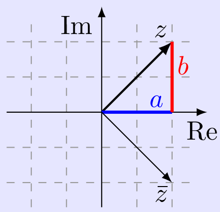
Hinweis

Kartesische Koordinaten: Realteil und Imaginärteil, die konjugiert komplexe Zahl

Jede komplexe Zahl $z = a + b \cdot i$ wird durch

- Realteil $\mathrm{Re}(z) = a \in \mathbb{R}$ und
- Imaginärteil $\mathrm{Im}(z) = b \in \mathbb{R}$

eindeutig beschrieben.
Das Paar (a, b) beschreibt einen Vektor im $\mathbb{R}^2$.
$a + b \cdot i$ ist die Darstellung mit kartesischen Koordinaten.



Zu einer komplexen Zahl $z = a + b \cdot i$ ist die *konjugiert komplexe Zahl* definiert als $\bar{z} = a - b \cdot i$.

Es gilt
- $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(\bar{z})$,
- $\mathrm{Im}(z) = -\mathrm{Im}(\bar{z})$,
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$,
- $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$.

$\bar{z}$ in KK

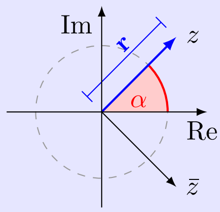
Erklärung

Polarkoordinaten

Jede komplexe Zahl $z = a + b \cdot i$ kann durch ein Paar $(\mathbf{r}, \alpha)$ aus

- Radius $\mathbf{r} \geq 0$ und
- Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$

eindeutig beschrieben werden.
Das Paar $(\mathbf{r}, \alpha)$ ist die Polarkoordinaten-Darstellung von z. Der Winkel wird auch Argument genannt.



Euler-Darstellung

Sind (r, α) die Polarkoordinaten von z, so ist $z = r \cdot e^{i\alpha}$.

Ist $z = r \cdot e^{i\alpha}$, so hat $\bar{z}$ die Form $\bar{z} = r \cdot e^{-i\alpha}$.

Erklärung

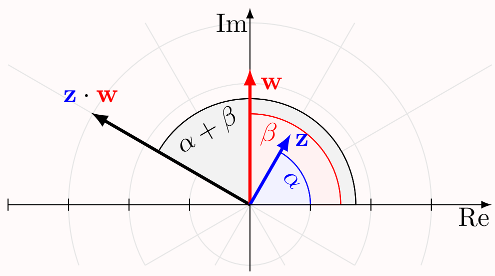
$\bar{z}$ in PK

Erklärung

Für die Multiplikation in Polarkoordinaten gilt:

- Längen werden multipliziert,
- Winkel addieren sich.

$$\left.\begin{array}{r} z = (\mathbf{r}, \alpha) \\ w = (\mathbf{R}, \beta) \end{array}\right\} \Rightarrow z \cdot w = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}, \alpha + \beta)$$



KK→PK

PK→KK

Umrechnung zwischen den Koordinatendarstellungen

Kartesische Koordiaten zu Polarkoordinaten	Polarkoordinaten zu kartesischen Koordinaten
Gegeben: $z = a + b \cdot i$. Gesucht: $z = r \cdot e^{i\alpha}$. • $r = \lvert z \rvert = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ • $\alpha = \begin{cases} \arccos(\frac{a}{r}) & \text{, falls } b \geq 0, \\ -\arccos(\frac{a}{r}) & \text{, falls } b < 0. \end{cases}$	Gegeben: $z = r \cdot e^{i\alpha}$. Gesucht: $z = a + b \cdot i$. • $\mathrm{Re}(z) = r \cdot \cos(\alpha)$, • $\mathrm{Im}(z) = r \cdot \sin(\alpha)$.

Division in $\mathbb{C}$

Sind $w, z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, so gibt es für die Division $\frac{w}{z}$ den folgenen Trick:

$$\frac{w}{z} = \frac{w\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{w\bar{z}}{|z|^2}$$

Der Nenner ist nun eine reelle Zahl.

Erklärung

☺–☹

Aufgaben

Rechnen mit komplexen Zahlen

Aufgabe 1. Berechnen Sie $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$ sowie $\overline{z}$, $\frac{1}{z}$ und z^2 für folgende komplexe Zahlen z:

a) $z = 1 + i$ b) $z = -3$ c) $z = 2i$ d) $z = 3 + 4i$

Lösung

Aufgabe 2. Für $z = 1 - i$ und $w = 1 + i$ berechnen Sie $z \cdot w$ sowie $\frac{w}{z}$.
Zeichnen Sie z und w sowie $z \cdot w$ und $\frac{w}{z}$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Welche Beziehungen gelten für die Winkel der 4 Zahlen?

Lösung

Aufgabe 3. Für welche **ganzen Zahlen** $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt

$$(a + ib)^2 = -8 + 6i \qquad ?$$

Lösung

Aufgabe 4. (Gleichung mit komplexen Zahlen): Für welche **reellen Zahlen** $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$2a - 3bi - a(1 + i) + 5b + 3 - i = 0 \qquad ?$$

Tipp: Analog zu Gleichungen mit Vektoren im $\mathbb{R}^2$, erhalten Sie aus der obigen Gleichung in *komplexen* Zahlen **zwei Gleichungen** in *reellen* Zahlen.

Lösung

Gleichungen mit komplexen Zahlen

Aufgabe 5. Berechnen Sie z aus:

a) $3 - 2i = (5 + i) \cdot z$ b) $2 - 9i = (1 - 2i)(z - 3 + 4i)$ c) $|z + 1| = |z + 2i|$

Lösung

Koordinatenwechsel

Aufgabe 6. Berechnen Sie von den folgenden komplexen Zahlen jeweils Realteil, Imaginärteil, Betrag und Winkel und geben Sie diese in Polarkoordinaten an:

a) $z = 2 - 2i$ b) $z = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$

Lösung

Aufgabe 7. Berechnen Sie von den folgenden komplexen Zahlen z jeweils Realteil, Imaginärteil, Betrag, $\frac{1}{z}$ und $\bar{z}$:

a) $z = \sqrt{-3}$ b) $z = 2 - i$ c) $z = 2 + \sqrt{-3}$ d) $z = 4 + \sqrt{-121}$

Lösung

Aufgabe 8. Berechnen Sie zu den folgenden Polarkoordinaten (r, α) jeweils z in kartesischer Darstellung.

a) $(2, \pi)$ b) $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ c) $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ d) $\left(\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{11\pi}{6}\right)$

Lösung