Information zum Proseminar

Kurven und konvexe Funktionen

als Blockveranstaltung

PD Dr. Judit Abardia-Evéquoz (abardia@math.uni-frankfurt.de)

15.–19. März 2021, Raum 901

Im ersten Teil des Proseminars werden Kurven insbesondere in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ betrachtet. Eine Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ ist eine differenzierbare Abbildung von einem Intervall nach $\mathbb{R}^3$. Durch die Ableitung der Abbildung $\alpha(t)$ können geometrische Eigenschaften der Kurve hergeleitet werden. Zum Beispiel, entspricht $\alpha'(t) \in \mathbb{R}^3$ dem Geschwindigkeitsvektor. Wie sehr die Kurve gekrümmt ist, wird durch die zweite Ableitung angegeben. Entspricht α einer Geraden, z.B., $\alpha(t) = t$, so ist $\alpha''(t) \equiv 0$, und diese ist nicht gekrümmt, wie erwartet. Der Kreis $\alpha(t) = R(\cos(t), \sin(t))$, $R > 0$, hat die Krümmung $1/R$. Die isoperimetrische Ungleichung (welche Kurve enthält, bei fester Länge, die grösstmögliche Fläche?) und die Keplerschen Gesetzte werden studiert.

Im zweiten Teil, werden geometrische Ungleichungen, die durch konvexe Funktionen entstehen, studiert. Diese spielen eine wichtige Rolle in verschiedenen Gebieten der Mathematik, wie z.B. Analysis, Informationstheorie, oder konvexe Geometrie.

Die genauere Aufteilung der Themen ist wie folgt.

(1) Parametrisierte Kurven (Königsberger, §12.1)

Die Grundbegriffe von Kurven werden eklärt: Definition und Beispiele von Kurven, Tangentialvektor, und Geschwindigkeit. Zudem wird gezeigt, dass jede Kurve (ohne Punkten mit Geschwindigkeit Null) sich lokal als Graph einer Funktion darstellen lässt.

(2) Bogenlänge (Königsberger, §12.2)

Die Formel für die Berechnung der Bogenlänge einer Kurve wird gezeigt. Beispiele für die Berechnung der Länge bekannter Kurven werden betrachtet.

(3) Parameterwechsel und Krümmung ebener Kurven (Königsberger, §12.3 und §12.4)

Was passiert, wenn man die Kurve $\alpha(t)$ durch $\alpha(2t)$ ersetzt? Das Bild der Kurve ist das gleiche, die Geschwindigkeit verdoppelt sich. Es wird der Parameterwechsel definiert und die Invarianten unter Parameterwechsel studiert. Der Parameter, der konstante Geschwindigkeit einer Kurve liefert (die durch Bogenlänge parametrisierte Kurve), spielt eine wichtige Rolle. Der Normalenvektor und die Krümmung einer Kurve in $\mathbb{R}^2$ werden definiert und es werden Beispiele betrachtet.

(4) Kurven in $\mathbb{R}^3$: Fundamentalsatz (do Carmo, §1.5)

In diesem Thema werden Kurven in $\mathbb{R}^3$ und deren Parametrisierung durch Bogenlänge betrachtet. Die Torsion einer Kurve wird zuerst definiert und es wird gezeigt, dass es zu jedem Paar von Funktionen $\kappa(s) > 0$ und $\tau(s)$, $s \in I \subset \mathbb{R}$, eine (bis auf Translation und Rotation) eindeutige Kurve gibt mit Krümmung κ und Torsion τ.

(5) Kurven in $\mathbb{R}^3$: Lokale Kurventheorie (do Carmo, §1.6)

Die lokale kanonische Form (gegeben durch die Taylorentwicklung) einer Kurve wird gegeben. Diese liefert eine besonders einfache Darstellung einer Kurve um einen Punkt und ermöglicht, geometrische Eigenschaften herzuleiten.

(6) Die Sektorfläche ebener Kurven (Königsberger, §12.5)

Der Flächeninhalt, den eine geschlossene Kurve berandet, wird definiert und einige Anwendungen werden betrachtet.

(7) Isoperimetrische Ungleichung (do Carmo §1.7.A)

Die isoperimetrische Ungleichung wird bewiesen: Der Kreis ist die einfache geschlossene Kurve in der Ebene mit gegebener Länge ℓ, die den größten Flächeninhalt berandet.

(8) Windungszahlen (Königsberger, §12.6)

Die Windungszahl einer Kurve zählt wie oft die Kurve um einen bestimmten Punkt herumläuft. Diese Zahl wird untersucht. Insbesondere wird gezeigt, dass es sich um eine ganze Zahl handelt. Eine explizite Form der Windungszahl wird gegeben.

(9) Der Vier-Scheitel-Satz (do Carmo §1.7.B)

Ziel ist, zu zeigen, dass jede einfache geschlossene konvexe Kurve mindestens vier Scheitel (Punkte, wo die Krümmung verschwindet) hat. Dazu wird eine andere Beschreibung der Windungszahl benutzt.

(10) Die Keplerschen Gesetze (Königsberger §12.8 (§12.9 ab 4. Auflage))

Die drei Keplerschen Gesetze über die Bewegung eines Planeten werden gezeigt. Dazu wird das Vektorprodukt eingeführt und benutzt.

(11) Konvexe Funktionen und die Jensensche Ungleichung (Walter, §11.17–§11.19)

Die Jensensche Ungleichung besagt, dass das Bild einer Linearkombination von Punkten unter eine konvexe Funktion f, kleiner ist als dieselbe Linearkombination der Bilder der Punkten unter f. Diese Ungleichung und ihre Integrale Version werden gezeigt. Außerdem wird gezeigt, dass konvexe Funktionen stetig sind, und ihre Ableitung bis auf höchstens abzählbar viele Punkte differenzierbar sind.

(12) Mittelwerte, Hölder und Minkowski Ungleichungen (Walter, §11.21–§11.24)

Das arithmetische Mittel ist bekanntlich größer gleich dem geometrischen Mittel. Eine Verallgemeinerung davon wird zuerst gezeigt. Danach werden die Hölder und Minkowski Ungleichung bewiesen. Sie sind Verallgemeinerungen der Cauchyschen und Dreiecksungleichung.

Literatur:

- M. P. do Carmo: Differentialgeometrie von Kurven und Flächen.Vieweg studium, 1983.
- K. Königsberger: Analysis 1. Springer Verlag, 1995.
- W. Walter: Analysis I, Grundwissen Mathematik, 1985 (alle Ausgabe möglich).

Voraussetzungen für die Vergabe der CP:

- kleine (maximal 5 Seiten) schriftliche Ausarbeitung;
- Vortrag (60-75 Minuten).

Das Proseminar ist unbenotet.

Anmeldung zum Proseminar:

Interessenten sind herzlich eingeladen, bis zum 15.07.2020 eine E-Mail an Judit Abardia (abardia@math.uni-frankfurt.de) zu senden. Spätere Anmeldungen sind auch möglich, falls es noch freie Plätze gibt.

Für weitere Fragen stehe auch Ihnen gerne zur Verfügung.