Übung 3

Abgabe bis Dienstag, 26.11.

Aufgabe 4: [Schranken]

Es sei $V^{Eur}(S,t,K)$ bzw. $V^{Am}(S,t,K)$ der Wert einer europäischen bzw. amerikanischen Put-Option auf den Basiswert S zum Zeitpunkt $t \leq T$, Ausübungspreis K und Laufzeit T. Es gilt stets

$$V^{Eur}(S,t,K) \leq V^{Am}(S,t,K)\,.$$

Zeigen sie, dass auch gilt

$$V^{Am}(S,t,K) \leq V^{Eur}\left(S,t,Ke^{r(T-t)}\right).$$

Aufgabe 5: [Russische Optionen]

Eine russische Option is eine Option ohne vorgegebene Laufzeit, die jederzeit ausgeübt werden kann. Für $T \to \infty$ reicht es aus die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}S^2} + (r-\delta)S\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S} - rV = 0$$

zu betrachten. Betrachten sie eine russische Put-Option mit Auszahlung $(K-S)^+$ am Kontaktpunkt $S = S_f$.

(a) Zeigen sie mit der Randbedingung für $S \to \infty$, dass für den Optionspreis

$$V(S) = c\left(\frac{S}{K}\right)^{\lambda_2}$$

gilt, wobei

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(1 - q_\delta - \sqrt{(q_\delta - 1)^2 + 4q}\right), \quad q = \frac{2r}{\sigma^2}, \quad q_\delta = \frac{2(r-\delta)}{\sigma^2}$$

und c eine positive Konstante sind.
Hinweis: Verwenden sie die Transformation $S = Ke^x$. (Die zweite Wurzel λ_1 fällt weg).

(b) Zeigen sie, dass V konvex ist.

Für $S < S_f$ wird die Option ausgeübt und ihr Wert ist dann $K - S$. Für $S > S_f$ wird die Option nicht ausgeübt und hat einen Wert $V(S) > K - S$. Indem der Halter der Option entscheidet, wann er ausüben möchte, trifft er eine Entscheidung über den Kontaktpunkt S_f. Er wird diese Entscheidung so treffen, dass der Wert der Option maximal wird.

(c) Zeigen sie

$$V'(S_f) = -1,$$

falls S_f den Wert der Option maximiert.
Hinweis: Bestimmen sie die Konstante c so, dass $V(S)$ stetig am Kontaktpunkt ist.