GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Computational Finance 2
WS 2019/20
Prof. Dr. Thomas Gerstner

Übung 2

Abgabe bis Dienstag, 12.11.

Aufgabe 3: [Ein Binomialverfahren für zwei Wertpapiere]

Ein Binomialbaum für zwei Wertpapiere, wobei die (x, y)-Koordinaten die Wertpapiere und t die Zeitkoordinate darstellen, kann folgendermaßen erstellt werden. Jeder Knoten (x, y) gehe für $t \to t+\Delta t$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ in einen der vier Knoten

$$(xu, yA), (xu, yB), (xd, yC), (xd, yD)$$

für Konstanten u, d, A, B, C, D über.

(a) Zeigen sie, dass der Baum für $AD = BC$ rekombinierend ist.

Sei nun r die risikofreie Zinsrate, σ_1 und σ_2 die Volatilitäten der beiden Wertpapiere und ρ ihre Korrelation, dann können die sechs Konstanten u, d, A, B, C, D wie folgt ermittelt werden:

$$\begin{aligned}
\mu_i =& r_i - \sigma^2/2 \quad \text{für} \quad i = 1, 2\\
u =& \exp(\mu_1 \Delta t + \sigma_1 \sqrt{\Delta t})\\
d =& \exp(\mu_1 \Delta t - \sigma_1 \sqrt{\Delta t})\\
A =& \exp(\mu_2 \Delta t + \sigma_2 \sqrt{\Delta t}(\rho + \sqrt{1-\rho^2}))\\
B =& \exp(\mu_2 \Delta t + \sigma_2 \sqrt{\Delta t}(\rho - \sqrt{1-\rho^2}))\\
C =& \exp(\mu_2 \Delta t - \sigma_2 \sqrt{\Delta t}(\rho - \sqrt{1-\rho^2}))\\
D =& \exp(\mu_2 \Delta t - \sigma_2 \sqrt{\Delta t}(\rho + \sqrt{1-\rho^2}))
\end{aligned}$$

Für Startwerte $x^0 = S_1^0, y^0 = S_2^0$ und zum Zeitpunkt $t_\nu = \nu \Delta t$ können die S_1-Komponenten des Baums wie im eindimensionalen Fall ermittelt werden:

$$x_i^\nu = S_1^0 u^i d^{\nu-i} \quad \text{für} \quad i = 0, \ldots, \nu$$

(b) Überprüfen sie, dass die obige Wahl von A, B, C, D einen rekombinierenden Baum ergibt.

(c) Zeigen sie, dass die S_2-Komponenten des Baums, die zu x_i^ν gehören, durch

$$y_{i,j}^\nu = S_2^0 \exp(\mu_2 \nu \Delta t) \exp(\sigma_2 \sqrt{\Delta t}(\rho(2i-\nu) + \sqrt{1-\rho^2}(2j-\nu)) \quad \text{für} \quad j = 0, \ldots, \nu$$

gegeben sind. Anmerkung: für $\nu \to \nu+1$ entspricht u einer Erhöhung des Index $i \to i+1$, während d einem gleichbleibenden Index $i \to i$ entspricht.

(d) Zeigen sie, dass die Erwartungswerte, Varianzen und Kovarianzen des kontinuierlichen und des diskreten Modells übereinstimmen. Überprüfen sie dazu für die logarithmischen Inkremente $\Delta Y_1 = \log u$ (bzw. $\log d$) und $\Delta Y_2 = \log A$ (bzw. $\log B$, $\log C$ oder $\log D$) die fünf Gleichungen

$$\mathrm{E}(\Delta Y_i) = \mu_i \Delta i, \ \mathrm{Var}(\Delta Y_i) = \sigma_i^2 \Delta t, \ \mathrm{Cov}(\Delta Y_1, \Delta Y_2) = \rho \sigma_1 \sigma_2 \Delta t$$

für $i = 1, 2$ erfüllt sind.