GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Stochastische Numerik
SS 2019
Prof. Dr. Thomas Gerstner

Übung 4

Abgabe bis Mittwoch, 26.6.2019

Aufgabe 1: Gegeben sei die skalare stochastische Differentialgleichung

$$X_t = X_0 + \int_{t_0}^{t} a(s, X_s)\, ds + \int_{t_0}^{t} b(s, X_s)\, dW_s$$

für $t \in [t_0, T]$ wobei die Koeffizienten global Lipschitz stetig sind. Zeigen Sie, das für die starke Lösung $t \to X_t$

$$\mathbb{E}\left[|X_t - X_s|^2\right] \leq K\,(t - s)$$

für $s, t \in [t_0, T]$ und $K > 0$ gilt.

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass das vereinfachte Euler-Verfahren nicht stark und das stochastische Euler-Verfahren mit $\Delta W \sim N(0, \Delta)$ stark konsistent ist.

Aufgabe 3: Sei $\{W_t, 0 \leq t < \infty\}$ ein Wiener Prozess. Zeigen Sie mit Hilfe der Itô-Formel das

$$d(\cos(W_t)) = -\frac{1}{2}\cos(W_t)\, dt - \sin(W_t)\, dW_t$$

und

$$d(\sin(W_t)) = -\frac{1}{2}\sin(W_t)\, dt + \cos(W_t)\, dW_t$$

gilt.

Aufgabe 4: Sei $\{W_t, 0 \leq t < \infty\}$ ein Wiener Prozess und sei

$$m_k(t) := \mathbb{E}(W_t^k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Itô-Formel

$$m_k(t) = \frac{1}{2}k(k-1)\int_0^t m_{k-2}(s)\, ds$$

für $k \geq 2$.

Aufgabe 5: [Konvergenzordnung des Euler-Verfahrens]
Gegeben sei die SDE

$$dX_t = X_t\,dt + X_t\,dW_t$$

für $t \in [0,1]$, $X_0 = 1$. Sie sollen diese SDE mit Hilfe des stochastischen Euler Verfahrens für die Schrittweiten $\Delta_i = 2^{-i}$, $i = 4, 5, \ldots, 14$ simulieren und aus den Fehlern zu den jeweiligen Schrittweiten einen loglog-Plot der Konvergenzordnung erzeugen. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

1) Erzeugen Sie einen Wiener-Prozess mit der kleinsten Schrittweite.
2) Berechnen Sie die exakte Lösung $X_1^{e,n}$ der SDE mit diesem Wiener Prozess.
3) Simulieren Sie nun die approximierten Lösungen $X_1^{\Delta_i,n}$ mit dem Euler Verfahren. Die Schrittweiten sind so gewählt, dass sich der Wiener-Prozess für die Simulationen leicht aus den feineren Schrittweiten ableiten lässt.
4) Berechnen Sie den Fehler $err^{\Delta_i,n} = \left|X_1^{e,n} - X_1^{\Delta_i,n}\right|^2$ nach jeder Simulation.
5) Wiederholen Sie die Schritte 1-4 etwa $k = 25$ mal und mitteln Sie am Ende die Fehler, also $err^{\Delta_i} = \left(\frac{\sum_{n=1}^{k} err^{\Delta_i,n}}{k}\right)^{\frac{1}{2}}$.
6) Erzeugen Sie einen loglog-Plot, wobei Sie auf der Abszissenachse die Anzahl der Schritte und auf der Ordinatenachse den Fehler auftragen.
7) Zeichnen Sie noch die Ordnungslinie $\frac{1}{2}$ ein und verschieben Sie diese so auf der Ordinatenachse, dass sie zu Ihren Daten passt.