Übungsklausur

Aufgabe 1: [Zahldarstellung]

Ein 16-Bit-Rechner stellt reelle Zahlen im normalisierten Gleitkommaformat mit einem Vorzeichen-Bit, 9 Bits für die Mantisse und 6 Bits für den Exponenten mit einem Bias von 31 dar. Ermitteln sie die Darstellung der Zahl 3,75 sowie den maximalen relativen Abstand zweier aufeinander folgender Zahlen in diesem Rechner.

Aufgabe 2: [Auslöschung]

Der Ausdruck $f(a,b) = a^3 - b^3$ soll auf einem Rechner mit 8 Dezimalstellen Genauigkeit berechnet werden. Erklären sie den Begriff „Auslöschung“, begründen sie, warum bei der Berechnung von $f(a,b)$ für $a, b \in \mathbb{R}$ Auslöschung auftritt und geben sie den relativen Fehler bei der Auswertung von $f(a,b)$ für $a = 10^5 + 1$ und $b = 10^5$ an, wenn Teilergebnisse nach jedem Rechenschritt auf 8 Dezimalstellen gerundet werden.

Aufgabe 3: [Konditionszahl]

Berechnen sie die Konditionszahlen κ_{abs} und κ_{rel} der Funktion $f(x) = x^3$ für $x \in \mathbb{R}$ und überprüfen sie, wo die Auswertung der Funktion qualitativ gut bzw. schlecht konditioniert ist.

Aufgabe 4: [Polynominterpolation]

Gegeben sei die folgende Wertetabelle:

x	1	2	4
$f(x)$	3	1	2

Geben sie das quadratische Polynom, das diese drei Punkte interpoliert, in der Lagrange- und in der Newton-Darstellung an.

Aufgabe 5: [Trigonometrische Interpolation]

Gegeben sei die reelle Funktion $f(x) = \max\{x, \pi\}$ im Intervall $[0, 2\pi)$. Bestimmen sie die Koeffizienten a_0, a_1, b_1 und a_2 des trigonometrischen Interpolationspolynoms

$$p(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + \frac{a_2}{2} \cos(2x),$$

das die Funktion f an den Stellen $x_k = 2\pi k/4$, $k = 0, \ldots, 3$, interpoliert.

Aufgabe 6: [Splines]

Berechnen sie den kubischen Spline S_Δ mit natürlichen Randbedingungen zu der Zerlegung $\Delta = \{[-1,0],[0,1]\}$, der die Punkte $(-1,1), (0,2)$ und $(1,-1)$ interpoliert.

Aufgabe 7: [Quadratur]

(a) Leiten sie die Stützstellen und Gewichte der Simpsonregel zur Berechnung des Integrals $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ her.

(b) Sei nun $f \in C^4[a,b]$. Die Simpsonregel besitzt den Fehler

$$\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \frac{1}{90} f^{(4)}(\xi), \qquad \xi \in [a,b].$$

Ermitteln sie den Fehler der iterierten Simpsonregel für N äquidistante Teilintervalle von $[a,b]$ in Abhängigkeit von N.

Hinweis:

$$\min_{0\le i\le N-1} f^{(4)}(\xi_i) \le \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f^{(4)}(\xi_i) \le \max_{0\le i\le N-1} f^{(4)}(\xi_i), \qquad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}].$$

Aufgabe 8: [Programmieraufgabe]

Schreiben sie eine Matlab- oder Scilabfunktion *Lagrange*(x,y,z), die ein Interpolationspolynom zu den Stützstellen $x = (x_1, \ldots, x_n)$ mit zugehörigen Funktionswerten $y = (y_1, \ldots, y_n)$ mit Hilfe der Lagrange-Interpolationsformel an der Stelle $z \in \mathbb{R}$ auswertet und den Funktionwert f zurückgibt.

Aufgabe 9: [Programmieraufgabe]

Ein Student hat den Algorithmus zur Bestimmung der Polynomkoeffizienten in Newton-Darstellung mit Dividierten Differenzen in MATLAB wie im Folgenden implementiert:

```
function [a]=aufgabe(x,f)
    n=length(x);
    for i=0:n-1
                    for j=i-1:-1:0
                            t(i)=f(i);
                    t(j)=(t(j+1)-t(j))/(x(i)-x(j));
                    end
        a(i)=t(0);
    end
end %end ist hier nicht zwingend notwendig
```

Der Student möchte nun die Funktion für die Vektoren $x = [0,1,2]$ und $f = [1,3,2]$ durch den Aufruf von *aufgabe*([0,1,2],[1,3,2]) ausführen. Der Code enthält jedoch einige Fehler und funktioniert nicht wie erwartet. Geben sie jede Zeile an in der eine Änderung vorgenommen werden muss und erläutern sie kurz, worin das Problem besteht.