GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Einführung in die Numerik
WS 2018/19
Prof. Dr. Thomas Gerstner

Übung 11

Abgabe bis Donnerstag, 31.01., 11:45 Uhr

Aufgabe 1: [LR- und QR-Zerlegung]

Gegeben Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 17 \\ 4 & 10 & 4 \\ 4 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen sie die LR-Zerlegung $A = L \cdot R$ von A.

(b) Berechnen sie die QR-Zerlegung $A = Q \cdot R$ von A mittels Householder-Spiegelungen.

(c) Berechnen sie die QR-Zerlegung $A = Q \cdot R$ von A mittels ebenen Rotationen.

(d) Zeigen sie, dass das Produkt zweier oberer Dreiecksmatrizen wieder eine obere Dreiecksmatrix, und ebenso die Inverse einer oberen Dreiecksmatrix wieder eine obere Dreiecksmatrix ist.

(e) Bestimmen sie die Anzahl der arithmetischen Operationen, die höchstens benötigt werden, um die obigen Zerlegungen einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ zu bestimmen

Punkte: $\boxed{15}$

Aufgabe 2: [Existenz und Eindeutigkeit der LR-Zerlegung]

(a) Zeigen sie, dass die LR-Zerlegung einer regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eindeutig ist, soweit sie existiert. Gilt dies auch, falls A singulär ist?

(b) Finden sie eine reguläre 2×2 Matrix, die keine LR-Zerlegung besitzt.

(c) Sei nun $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch und positiv definit. Der erste Schritt der LR-Zerlegung von A führt zur Darstellung

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline l_{21} & \\ \vdots & I \\ l_{n1} & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} r_{11} & r_{12} \cdots r_{1n} \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right)$$

mit einer Matrix $B \in \mathbb{R}^{(n-1),(n-1)}$. Zeigen sie, dass B wieder symmetrisch und positiv definit ist. Folgern sie daraus, dass A eine LR-Zerlegung (ohne Pivotisierung) besitzt.

Punkte: $\boxed{7}$

Aufgabe 3: [Cholesky-Zerlegung]

(a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch, positiv definit. Zeigen sie, dass die Eigenwerte von A reell und positiv sind und dass $a_{ij}^2 < a_{ii}a_{jj}$ für alle $i \neq j$ gilt.

(b) Zeigen sie, dass die Cholesky-Zerlegung $A = CC^T$ von A bis auf das Vorzeichen der Einträge in C eindeutig ist.

(c) Berechnen sie die Cholesky-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 11 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & 14 \end{pmatrix}.$$

Punkte: $\boxed{8}$

Gesamtpunktzahl: 30 Punkte