

Übung 7

Abgabe bis Donnerstag, 13.12., 11:45 Uhr

Aufgabe 1: [Fehlerabschätzungen bei Splines]

Gegeben sei eine Unterteilung $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ des Intervalls $[a, b]$ und eine Funktion $f \in C^2[a, b]$. Weiterhin sei S_Δ der interpolierende kubische Spline-Interpolant von f bezüglich Δ mit den (vollständigen) Randbedingungen

$$S'_\Delta(a) = f'(a) \text{ und } S'_\Delta(b) = f'(b).$$

- (a) Beweisen sie, dass für alle Funktionen $T(x)$ aus dem Spliner Raum $\mathcal{K}^3[a, b]$

$$\|f(x) - S_\Delta(x)\|^2 \leq \|f(x) - T(x)\|^2$$

gilt.

- (b) Sei nun $f \in C^4[a, b]$. Zeigen sie:

$$\|f(x) - S_\Delta(x)\|^2 = \int_a^b (f(x) - S_\Delta(x))f^{(4)}(x) dx.$$

- (c) Sei $\Gamma = \{a = \bar{x}_0 < \dots < \bar{x}_m = b\}$ eine Verfeinerung von Δ (d.h. $\{x_0, \dots, x_n\} \subseteq \{\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_m\}$). Weiterhin sei S_Γ der interpolierende kubische Spline-Interpolant zu f bezüglich Γ mit vollständigen Randbedingungen. Zeigen sie, dass dann folgende Ungleichungen gelten:

$$\|S_\Delta(x)\|^2 \leq \|S_\Gamma(x)\|^2 \leq \|f(x)\|^2.$$

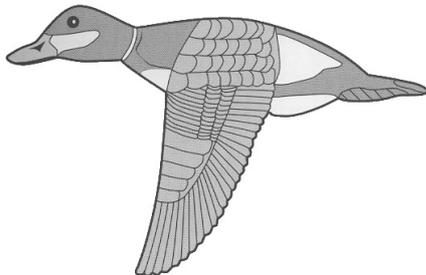
Punkte: 15

Aufgabe 2: [Programmieraufgabe]

Wir betrachten den kubischen Spline-Interpolanten von $n + 1$ Punkten (x_i, f_i) , $0 \leq i \leq n$, mit natürlichen Randbedingungen. Schreiben sie die folgenden Programme:

- (a) Ein Verfahren zur Berechnung des kubischen Splines mit natürlichen Randbedingungen.
- (b) Ein Verfahren zur Auswertung des Spline-Interpolanten in der an einer beliebigen Stelle x .

Wir wollen nun das obere Profil dieser Ente beim Flug in den Süden approximieren. Das Profil wurde von einem Ornithologen vermessen und ist punktweise in der rechten Tabelle angegeben.



x	0.9	1.3	1.9	2.1	2.6	3.0	3.9
f	1.3	1.5	1.85	2.1	2.6	2.7	2.4
x	4.4	4.7	5.0	6.0	7.0	8.0	9.2
f	2.15	2.05	2.1	2.25	2.3	2.25	1.95
x	10.5	11.3	11.6	12.0	12.6	13.0	13.3
f	1.4	0.9	0.7	0.6	0.5	0.4	0.25

- (c) Ermitteln sie den kubischen Spline-Interpolanten des Entenprofils mit Programm (a). Geben sie die jeweiligen Koeffizienten aus.
- (d) Werten sie die beiden Interpolanten mittels des Programms (b) an jeweils 125 Stellen im Abstand 0.1 zwischen 0.9 und 13.3 aus und zeichnen sie das Entenprofil.

Punkte: 20