Übung 6

Abgabe bis Donnerstag, 6.12., 11:45 Uhr

Aufgabe 1: [Konstruktion von Splines]

Gegeben sei eine Unterteilung $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ des Intervalls $[a, b]$. Der kubische Spline $S_\Delta(x)$ interpoliere eine Funktion $f(x)$ an den Punkten x_i, $0 \leq i \leq n$.

(a) Zeigen sie, dass S_Δ die stückweise Darstellung

$$S_\Delta(x) = f(x_i)(1 - 3t^2 + 2t^3) + f(x_{i+1})(3t^2 - 2t^3) + z_i h_i(t - 2t^2 + t^3) + z_{i+1} h_i(-t^2 + t^3)$$

hat, wobei

$$z_i = S'_\Delta(x_i) \text{ für } 0 \leq i \leq n,$$

sowie

$$x_i \leq x \leq x_{i+1},\ t_i = (x - x_i)/h_i \text{ und } h_i = x_{i+1} - x_i \text{ für } 0 \leq i \leq n-1.$$

(b) In dieser Darstellung sind die Ableitungen z_i die einzigen Unbekannten. Leiten sie nun aus der Forderung, dass $S''_\Delta(x)$ stetig ist, die $n-1$ Gleichungen

$$\frac{z_{i-1}}{h_{i-1}} + 2z_i\left(\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i}\right) + \frac{z_{i+1}}{h_i} = 3\left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h_{i-1}^2} + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i^2}\right)$$

für $1 \leq i \leq n-1$, her.

(c) Jetzt fehlen noch zwei Gleichungen für die $n+1$ Unbekannten z_i. Geben sie das zu lösende lineare Gleichungssystem für die natürlichen Randbedingungen

$$S''_\Delta(a) = S''_\Delta(b) = 0$$

in Matrixnotation an.

(d) Formulieren sie den Gauß–Algorithmus zur Lösung dieses speziellen Gleichungssystems.

Punkte: $\boxed{15}$

Aufgabe 2: [Berechnung von Splines]

Wir betrachten die Funktion $f(x) = 2 - |x|$ im Intervall $[-1, 1]$.

(a) Interpolieren sie f an den Stützstellen $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ durch einen kubischen Spline $S_1(x)$ mit den (natürlichen) Randbedingungen

$$S_1''(x_0) = S_1''(x_2) = 0.$$

(b) Verwenden sie nun einen kubischen Spline $S_2(x)$, der die vollständigen Randbedingungen

$$S_2'(x_0) = f'(x_0) \text{ und } S_2'(x_2) = f'(x_2)$$

erfüllt.

(c) Ermitteln sie jetzt das Polynom $P(x)$ vom Grad 4 für die Randbedingungen

$$P'(x_0) = f'(x_0) \text{ und } P'(x_2) = f'(x_2).$$

(d) Berechnen sie für (a) bis (c) jeweils den Interpolationsfehler in der L_∞–Norm.

(e) Zeichnen (bzw. plotten) sie die Funktionen f, S_1, S_2 und P. Wiedurch unterscheiden sich die einzelnen Lösungen qualitativ?

Punkte: $\boxed{15}$

Gesamtpunktzahl: 30 Punkte