GOETHE UNIVERSITÄT
FRANKFURT AM MAIN

Einführung in die Numerik
WS 2018/19
Prof. Dr. Thomas Gerstner

Übung 4

Abgabe bis Donnerstag, 22.11., 11:45 Uhr

Aufgabe 1: [Kondition der Polynominterpolation]

(a) Bestimmen sie die Konditionszahlen $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ und $\frac{\partial y}{\partial f_i}$ für die Polynominterpolation. Um welchen Betrag ändert sich $y = P(x)$, wenn f_i sich um ε ändert?

(b) Betrachten sie den Fehler der Polynom–Interpolation einer Funktion f mit $|f^{(n+1)}(x)| \leq c$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ für $n+1$ äquidistante Stützstellen $x_i = -1 + \frac{2i}{n}$. Vergleichen sie den Fehler $P(x) - f(x)$ in den Intervallen $[0, \frac{2}{n}]$ und $[1 - \frac{2}{n}, 1]$ für wachsendes n.

Punkte: $\boxed{8}$

Anmerkung: diese Diskussion liefert einen Hinweis, dass der Interpolationsfehler am Rand des Intervalls wesentlich größer werden kann als im Inneren. Durch eine kluge Wahl der Stützstellen x_i kann jedoch der Interpolationsfehler über das gesamte Intervall minimiert werden. Diese Eigenschaft haben gerade die Nullstellen der Tschebyscheff–Polynome, wie im folgenden gezeigt wird.

Aufgabe 2: [Tschebyscheff–Interpolation]

(a) Die normierten Tschebyscheff–Polynome T_n sind definiert als

$$\begin{aligned} T_0(x) &:= 1 \\ T_n(x) &:= 2^{1-n} \cos(n \cdot \arccos x) \text{ für } n \geq 1. \end{aligned}$$

Bestimmen sie $T_1(x)$ bis $T_3(x)$ direkt aus dieser Definition.

(b) Zeigen sie, dass die normierten Tschebyscheff–Polynome für $n > 2$ der Rekursionsformel

$$T_{n+1}(x) = xT_n(x) - \frac{1}{4}T_{n-1}(x)$$

genügen und berechnen sie daraus $T_4(x)$ und $T_5(x)$.

(c) Zeigen sie: die Nullstellen x_k, $1 \leq k \leq n$, des Tschebyscheff–Polynoms T_n sind für $n \geq 1$ gegeben als

$$x_k = \cos\left(\pi \frac{2k-1}{2n}\right).$$

(d) Beweisen sie die Minimaleigenschaft der normierten Tschebyscheff–Polynome:

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \max_{x \in [-1,1]} |T_n(x)| \leq \max_{x \in [-1,1]} |Q_n(x)|$$

für alle normierten (d.h. mit führenden Koeffizienten 1) Polynome Q_n vom Grad n.

(e) Beweisen sie die Bestapproximationseigenschaft der Tschebyscheff–Polynome: $P(x)$ sei das Interpolationspolynom für die Stützstellen x_k, welche die Nullstellen von T_{n+1} sind. Dann gilt für jedes $f \in C^{n+1}$

$$\max_{x \in [-1,1]} |f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{2^n (n+1)!} \max_{x \in [-1,1]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Punkte: $\boxed{16}$

Aufgabe 3: [Hermite–Interpolation]

(a) Bei der Hermite-Interpolation wird versucht, sowohl die Werte als auch die Ableitungen einer Funktion zu interpolieren. Zeigen sie, dass das Hermite–Interpolationspolynom $P(x)$ für die $N+1$ Stützstellen (x_i, f_i) und Ableitungen (x_i, f_i'), $0 \leq i \leq N$, die Lagrange'sche Darstellung

$$P(x) = \sum_{i=0}^{N} \big(f_i M_i(x) + f_i' N_i(x)\big)$$

hat mit

$$\begin{aligned} M_i(x) &= (1 - 2(x - x_i)L_i'(x_i))(L_i(x))^2 \quad \text{und} \\ N_i(x) &= (x - x_i)(L_i(x))^2 \end{aligned}$$

wobei $L_i(x)$ die bekannten Lagrange–Interpolationspolynome sind.

(b) Wir definieren nun eine neue Folge von Stützstellen z_i, $0 \leq i \leq 2N-1$, durch $z_{2i} = z_{2i+1} := x_i$. Zeigen sie, dass nun das Hermite–Interpolationspolynom $P(x)$ die Newton'sche Darstellung

$$P(x) = g_0 + g_{01}(x - z_0) + g_{012}(x - z_0)(x - z_1) + \ldots + g_{0\ldots 2N-1}(x - z_0)\ldots(x - z_{2N-1}).$$

besitzt.

(c) Zeigen sie, dass die Koeffizienten $g_{\ldots}$ über das folgende Differenzenschema

$$\begin{array}{c|ccccccc} x_0 & g_0 = f_0 & & & & & & \\ & & g_{01} = f_0' & & & & & \\ x_0 & g_1 = f_0 & & g_{012} & & & & \\ & & g_{12} & & g_{0123} & & & \\ x_1 & g_2 = f_1 & & g_{123} & & & & \\ & & g_{23} = f_1' & & & & & \\ x_1 & g_3 = f_1 & & & & & & \\ & & \vdots & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & & \end{array}$$

definiert sind, wobei die unbekannten Einträge über die bekannte Differenzenform

$$g_{i\ldots i+k} = \frac{g_{i+1,\ldots,i+k} - g_{i,\ldots,i+k-1}}{z_{i+k} - z_i}$$

ermittelt werden.

Punkte: $\boxed{8}$

Gesamtpunktzahl: 32 Punkte